Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Lösungen zur Übungsaufgabe 3.5 **May 29, 2020**

Aufgabe 3.5 : Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Aufgabe 3.2.

a) Für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ ist

$$I = (I_t)_{t\geq 0} \quad , \quad I_t \ = \int_0^t (1_A)_s \, dM_s$$

ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal.

Hinweis: mit den vorhersehbaren Rechtecken anfangen, dann Dynkinschluss! Wegen der einfachen Struktur der Pfade von M kann das Integral pfadweise bei festem $\omega \in \Omega$ als Riemann-Stieltjes-Integral berechnet werden.

b) Beachte: T ist strikt positiv. Man zeige: ist S eine weitere $\mathbb{F}$-Stopzeit, so

$$S(\omega) < T(\omega) \ \ \forall\, \omega \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad S = 0 \quad P\text{-fast sicher}\ .$$

Hinweis: Betrachte $A :=]]S, \infty[[\in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, dann ist das Integral I in a) ein $\mathbb{F}$-Martingal mit $I_T = M_T - M_S$.

c) Man folgere: für die $\mathbb{F}$-Stopzeit T gibt es keine ankündigende Folge von $\mathbb{F}$-Stopzeiten.

Lösungen zu 3.5 : Man hat mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus 3.4

$$X = 1_{[[T,\infty[[} \quad , \quad M_t \ = \ X_t - \lambda(T \wedge t) \quad \text{wobei} \quad T \wedge t \ = \int_0^t 1_{\{0\}}(X_v)\, dv \ = \int_0^t 1_{[[0,T]]}(v)\, dv\ .$$

M ist ein gleichgradig integrables $(P, \mathbb{F})$-Martingal, da der Positivteil aller M_t durch 1 und der Negativteil aller M_t durch λT (mit $E(T) = \frac{1}{\lambda}$) abgeschätzt werden. Die Pfade von M sind konstant auf $[[T, \infty[[$.

3.5 a): Betrachte für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ (dies sind Teilmengen von $[0,\infty)\times\Omega$) Prozesse $I = I^A$

$$I = (I_t)_{t\geq 0} \quad , \quad I_t \ := \int_0^t (1_A)_v \, dM_v \ := \int_0^t (1_A)_v \, dX_v \ - \ \lambda \int_0^t (1_A\, 1_{[[0,T]]})_v \, dv$$

wobei alle Integrale pfadweise bei festem ω als Riemann-Stieltjes-Integrale aufzufassen sind (beachte: nach 1.5 ist der vorhersehbare Prozess 1_A insbesondere ein messbarer Prozess, also ist für jedes $\omega \in \Omega$ $\{0 \leq v < \infty : (v,\omega) \in A\}$ als ω-Schnitt durch A eine Borelmenge). Mit $M = M^T$ gilt $I = I^T$.

Zum Nachweis der Martingaleigenschaft von $I = I^A$ für beliebiges $A \in \mathcal{P}(I\!\!F)$ ist zu zeigen

$$E(1_F\,(I_t^A - I_s^A)) \;=\; 0$$

für $s < t$, $F \in \mathcal{F}_s$ beliebig aber fest, bzw. äquivalent

$$(*) \qquad E\left(\int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_A\right)_v dX_v\right) \;=\; E\left(\lambda \int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_A\,1_{[[0,T]]}\right)_v dv\right) .$$

Beachte: die Integranden $1_{]s,t]\times F}\,1_A$ und $1_{]s,t]\times F}\,1_A\,1_{[[0,T]]}$ in $(*)$ sind vorhersehbare Prozesse.

Wir zeigen zuerst, dass das System

$$\mathcal{H} \;:=\; \{A \in \mathcal{P}(I\!\!F) : \;\; (*) \text{ gilt für } A \;\}$$

(bei festem $s < t$, $F \in \mathcal{F}_s$) Dynkin ist:

i) Es gilt $A = [0,\infty)\times\Omega$ in $\mathcal{H}$ da in diesem Fall $I^A = M$ und somit I^A ein Martingal ist.

ii) $\mathcal{H}$ ist komplementstabil, wegen i), und da $[0,\infty)\times\Omega$ in $A \,\dot\cup\, ([0,\infty)\times\Omega)\setminus A$ zerfällt.

iii) $\mathcal{H}$ ist stabil unter Bildung abzählbarer disjunkter Vereinigungen:

für $(A_j)_j$ paarweise disjunkt in $\mathcal{P}(I\!\!F)$ betrachte

$$B_n \;:=\; A_1 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, A_n \quad , \quad B_n \uparrow \dot\bigcup_n A_n =: B_\infty \,.$$

Endliche Additivität von Riemann-Stieltes Integralen zeigt bei festem ω

$$\int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{B_n}\right)_v dX_v \;=\; \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{A_j}\right)_v dX_v$$

$$\lambda \int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{B_n}\,1_{[[0,T]]}\right)_v dv \;=\; \sum_{j=1}^n \lambda \int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{A_j}\,1_{[[0,T]]}\right)_v dv$$

für jedes n. Danach zeigen (zuerst) monotone Konvergenz von Riemann-Stieltes Integralen bei festem ω und (danach) dominierte Konvergenz bezüglich $P(d\omega)$ (beachte an dieser Stelle wieder $E(T) = \frac{1}{\lambda}$)

$$E\left(\int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{B_n}\right)_v dX_v\right) \;\longrightarrow\; E\left(\int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{B_\infty}\right)_v dX_v\right)$$

$$E\left(\lambda \int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{B_n}\,1_{[[0,T]]}\right)_v dv\right) \;\longrightarrow\; E\left(\lambda \int_0^\infty \left(1_{]s,t]\times F}\,1_{B_\infty}\,1_{[[0,T]]}\right)_v dv\right) .$$

Gezeigt ist, dass auch $\dot\bigcup_n A_n =: B_\infty$ zur Klasse $\mathcal{H}$ gehört. Somit ist $\mathcal{H}$ Dynkin.

Da M ein Martingal ist, sieht man leicht, dass die Klasse $\mathcal{R}(I\!\!F)$ der vorhersehbaren Rechtecke in $\mathcal{H}$ enthalten ist. Da $\mathcal{H}$ Dynkin, zeigt dies $\mathcal{H} = \mathcal{P}(I\!\!F)$.

In $(*)$ waren $s < t$ und $F \in \mathcal{F}_s$ beliebig aber fest. Also ist gezeigt, dass für alle $A \in \mathcal{P}(I\!\!F)$ der Prozess $I = I^A$ ein Martingal ist.

3.5 b): Betrachte $I\!\!F$-Stopzeiten $S \leq T$.

Stets gilt $]]S, \infty[[\in \mathcal{P}(I\!\!F)$ nach 2.4 b). Aussage a) für $A =]]S, \infty[[$ und $I = I^A$ zeigt

$$\begin{aligned} I_T &= \int_0^\infty \left(1_{[[0,T]]}\, 1_A\right)_v \, dM_v \;=\; \int_0^\infty \left(1_{[[0,T]]}\, 1_{]]S,\infty[[}\right)_v \, dM_v \\ &= \int_0^\infty \left(1_{]]S,T]]}\right)_v \, dM_v \;=\; M_T - M_S \; . \end{aligned}$$

Wegen der gleichgradigen Integrabilität von M ist auch I ein gleichgradig integrables Martingal (beachte: dieselben Abschätzungen für Positiv- und Negativteile aller I_t wie oben für M_t, und Pfade von I sind auf $[[T, \infty[[$ konstant), daher

$$E(I_T) = E(I_0) = 0 \quad \text{und} \quad E(M_T) = 1 - \lambda E(T) = 0 \; .$$

Beachte auch, dass T strikt positiv ist.

Angenommen, es gebe $I\!\!F$-Stopzeiten S mit der Eigenschaft $S < T$ auf Ω. Aus $S < T$ folgte

$$M_S \;=\; 0 - \lambda S \;\leq\; 0 \quad , \quad M_S \;<\; 0 \quad \text{auf } \{S > 0\} \; .$$

Wäre $P(S > 0) > 0$, hätte man im Widerspruch zur Martingaleigenschaft von I

$$I_T \;=\; M_T - M_S \quad , \quad E(I_T) = 0 \; , \; E(M_T) = 0 \; , \; E(M_S) < 0 \; .$$

Also ist die Annahme absurd, und für jede $I\!\!F$-Stopzeit mit $S < T$ auf Ω muss gelten

$$S = 0 \quad P\text{-fast sicher} \; .$$

3.5 c): Nach b) kann es insbesondere keine T ankündigenden Folgen $(S_n)_n$ von $I\!\!F$-Stopzeiten geben.