3.17 Def: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F}$ rs. Ein Prozeß $V = (V_t)_{t \geq 0}$ heißt **$\mathbb{F}$-wachsender Prozeß** falls gilt:

V ist $\mathbb{F}$-adaptiert, $V_0 \equiv 0$, alle Pfade

$V_\cdot(\omega)$, $\omega \in \Omega$, sind nichtfallende càdlàg-Fkt $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

3.18 Hauptsatz Doob-Meyer-Zerlegung (o. Bew. / mit Ref.)

übl. Hyp. an $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$.

Sei $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ein $(P, \mathbb{F})$-Submartingal, càdlàg, Klasse [LD].

a) Dann gibt es einen (bis auf P-Ununterscheidbarkeit (→ 1.2) genau einen) $\mathbb{F}$-vorhersehbaren wachsenden Prozeß $V = (V_t)_{t \geq 0}$ so daß gilt:

$$X - V \quad \text{ist } (P, \mathbb{F})\text{-Martingal}$$

(insbes. $E(V_t) < \infty \ \forall t \geq 0$). V heißt **$(P, \mathbb{F})$-Kompensator von X** (oder: 'duale vorhersehbare Projektion' von X)

b) Für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ gilt

$$\lambda_X(A) = \int_\Omega P(d\omega) \int_{(0,\infty)} 1_A(s,\omega)\, V(\omega, ds) .$$

27.5.20

c) V kann stetig gewählt werden falls X P-fs keine Sprünge über vorhersehbare $\mathbb{F}$-St besitzt:

$$\forall\ \mathbb{F}\text{-vhs St } S: \quad (\Delta X)_S 1_{\{S<\infty\}} = 0 \quad P\text{-fs}.$$

Ref: Métivier 1982 15.4 S.96, Jacod-Shiryaev 3.15 p.32, Dellacherie 1972 T50 S.118

Neuer kurzer Existenzbeweis:

Beiglböck, Schachermayer, Veliyev
A short proof of the Doob-Meyer thm.
STA 122, 1204–1209 (2012)

3.19 Bem: was bedeutet c)? Sei dazu S vhs $\mathbb{F}$-SZ, OBdA beschränkt. ÜA: es ex. ankünd. Folge $(S_n)_n$ für S; damit

$$E((\Delta X)_S) = \lim_n E(X_S - X_{S_n})$$

Lebesgue [LD]: $\{X_{S_n} : n\}$ gleichgrad. int., und X càdlàg

$$\overset{3.18\,a)}{=} \lim_n E(V_S - V_{S_n})$$

$$= E((\Delta V)_S).$$

Hat X P-fs keine Sprünge über vhs SZ, so gilt für jede vhs SZ S:

$$E((\Delta V)_S) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (\Delta V)_S = 0 \quad P\text{-fs}$$

V wachsend

Gestalt 2.31 des vorhersehbaren càdlàg-Prozesses V zeigt

$$V = V_- + 0 \quad P\text{-fs}$$

ÜA: nach Abänderung der Pfade von V auf einer P-Nullmenge (in $\mathcal{F}_0$!) ist V stetig. □

3.20 Def: $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F}$ r.s. Ein Prozeß $V=(V_t)_{t\geq 0}$ heißt $\mathbb{F}$-BV-Prozeß (lokal von beschr. Variation) falls

$$\left\{ \begin{array}{l} V \text{ ist } \mathbb{F}\text{-adaptiert}, \quad V_0 \equiv 0, \quad \text{es ex. } \mathbb{F}\text{-wachsende} \\ \text{Prozesse } V^{(1)} \text{ und } V^{(2)} \text{ so daß } \quad V = V^{(1)} - V^{(2)}. \end{array} \right.$$

In engem Zusammenhang mit der Eindeutigkeitsaussage in 3.18 steht

3.21 Satz (o. Bew./m. Ref.): ü.A., sei $X=(X_t)_{t\geq 0}$ bez. $(P,\mathbb{F})$ zugleich Martingal und vorhersehbarer BV-Prozeß. Dann $X \equiv 0$ bis auf P-Ununterscheidbarkeit.

Ref: Jacod-Shiryaev 3.16 S.32, Métivier 1982 S.96.

Die wichtigste Anwendung von 3.18 für Def. stoch. Integrale ist

3.22 Folg./Def.: ü.H., sei M ein $(P,\mathbb{F})$-Martingal, càdlàg, es gelte

$$E(M_t^2) < \infty \quad \forall\, 0 \leq t < \infty.$$

Dann gibt es (bis auf P-Ununterscheidbarkeit genau) einen $\mathbb{F}$-vorhersehbaren wachsenden Prozeß $V=(V_t)_{t\geq 0}$ so daß

$$M^2 - V \quad \text{ist } (P,\mathbb{F})\text{-Martingal}.$$

V heißt Meyerprozeß oder 'spitze Klammer' von M, Schreibweise

$$\langle M \rangle := V.$$

Bew: 3.18 für den nichtneg. Submart. M^2 (3.5': [LS]). □

3.23 Bem: Mit Meyerprozess $\langle M\rangle = V$ ist das Doléans-Maß λ_{M^2} von M^2 die Gestalt

3.18 (b)

$$\lambda_{M^2}(A) = \int_\Omega P(d\omega)\int_{[0,\infty)} 1_A(s,\omega)\,\langle M\rangle(ds,\omega)$$

$$= E_P\left(\int_{[0,\infty)} (1_A)_s \, d\langle M\rangle_s\right)$$

3.24 Bsp: Schreibe id für den det. Prozess $(t)_{t\geq 0}$.

ÜA 3.5 + 3.6 zeigen:

i) Sei N ein Poissonprozess m. Par. λ (→ Def. 13.9 Stoch II). Bez. der kanonischen Filtr. $\mathbb{F}$ gilt für $M = (N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$:

$$\langle M\rangle = \lambda \cdot id$$

ii) Sei B eine BB (→ Def. 13.14 Stoch II). Bez. der rechtsstetigen Geschichte $\mathbb{F}$ von B gilt

$$\langle B\rangle = id .$$

iii) Beide Aussagen bleiben richtig bez. jeder rechtsstetigen Filtr., bez. der B bzw. N unabhg. Zuwächse haben, und auch bez. einer solchen komplettiert unter P.

<u>3.25 Satz:</u> übl. Hyp., sei T $\mathbb{F}$-SZ, sei $\xi \geq 0$ eine $\mathcal{F}_T$-mb ZV, $\xi \in L^1(P)$. Betrachte den <u>Ein-Sprung-Prozeß</u>

$$X := \xi \, 1_{[\![T,\infty[\![}.$$

Dann ist X ein nichtnegatives $(P,\mathbb{F})$-Submartingal, also [LD], mit càdlàg-Pfaden. Sei

$\hat{X}$ $(P,\mathbb{F})$-Kompensator von X.

Dann gilt:

a) $\hat{X}$ ist konstant auf $[\![T,\infty[\![$.

b) <u>T $\mathbb{F}$-vhs:</u> auch $\hat{X}$ ist ein <u>Ein-Sprung-Sprungprozeß</u>

$$\hat{X} = E(\xi / \mathcal{F}_{T-}) \cdot 1_{[\![T,\infty[\![}$$

b') T $\mathbb{F}$-vhs und ξ $\mathcal{F}_{T-}$-mb: insbes.

$$\hat{X} = X.$$

c) T <u>$(P,\mathbb{F})$-völlig unerreichbar</u>: dann kann $\hat{X}$ <u>stetig</u> festgelegt werden.

d) T bel. $\mathbb{F}$-SZ, Spezialfall $\xi \equiv 1$: für $s<t$ gilt

$$E(\hat{X}_t - \hat{X}_s / \mathcal{F}_s) = E(X_t - X_s / \mathcal{F}_s) = P(T \in]s,t] / \mathcal{F}_s)$$

und dies ist $= 0$ auf $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

Bew: I) sei T vorhersehbare $\mathbb{F}$-St:

b') ist Spezialfall von b), und a) für vhs St folgt aus b).
Reicht also Beweis von b): zeige für ξ $\mathcal{F}_{T-}$-mb und T vhs:

$$(*) \qquad M := \left(\xi - E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\right) \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} \quad \text{ist } (P,\mathbb{F})\text{-Martingal.}$$

sei dazu $s<t$, $F \in \mathcal{F}_s$, zeige

$$E(\mathbb{1}_F M_t) = E(\mathbb{1}_F M_s).$$

Zunächst gilt nach 2.17

$$(+) \qquad E\left(\mathbb{1}_{F \cap \{s<T\}} \left(\xi - E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\right)\right) = 0$$

da $F \in \mathcal{F}_s$, $F \cap \{s<T\} \in \mathcal{G}_T$ Erzeuger von $\mathcal{F}_{T-}$; genauso

$$(++) \qquad E\left(\mathbb{1}_{F \cap \{t<T\}} \left(\xi - E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\right)\right) = 0$$

da $F \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ und $F \cap \{t<T\} \in \mathcal{G}_T$. Damit

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{1}_F M_s) &\overset{\text{Def}}{=} E\left(\mathbb{1}_F \left(\xi - E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\right) \mathbb{1}_{\{T \le s\}}\right) \\
&\overset{(+)}{=} \text{———} \,\text{''}\, \text{———} + 0 \\
&= E\left(\mathbb{1}_F \left(\xi - E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\right)\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{1}_F M_t) &\overset{\text{Def}}{=} E\left(\mathbb{1}_F \left(\xi - E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\right) \mathbb{1}_{\{T \le t\}}\right) \\
&\overset{(++)}{=} \text{———} \,\text{''}\, \text{———} + 0 \\
&= E\left(\mathbb{1}_F \left(\xi - E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\right)\right)
\end{aligned}$$

Zusammen folgt $E(1_F M_t) = E(1_F M_s)$ und damit (*).

Nach 2.25 b) ist der Prozeß

$$\hat{X} := E(\xi \mid \mathcal{F}_{T-})\, 1_{[\![T,\infty[\![}$$

$\mathbb{F}$-vorhersehbar, càdlàg, wf., also $\mathbb{F}$-wachsend i.S.v. 3.17. Wegen

$$X - \hat{X} \overset{(*)}{=} M \qquad (P,\mathbb{F})\text{-Martingal}$$

ist damit der Kompensator $V = \hat{X}$ des Submart. X nach 3.18 a) gefunden.

II) Sei T eine P-völlig unerreichbare $\mathbb{F}$-SZ. Für ξ $\mathcal{F}_T$-mb und T völlig unerreichbar kann $\hat{X}$ nach 3.18 c) stetig festgelegt werden. Das ist c).

III) Sei T bel. $\mathbb{F}$-SZ. Zeige a) allgemein:

erster Bew: Fix $s<t$, $F \in \mathcal{F}_s$. Da $\hat{X}$ $(P,\mathbb{F})$-Komp. von X:

$$(x) \qquad E(1_F (X_t - X_s)) = E(1_F(\hat{X}_t - \hat{X}_s)).$$

Betrachte $s<t$ rational und $F := \{T \le s\}$: dafür zeigt (x)

$$\hat{X}_t - \hat{X}_s = 0 \text{ auf } \{T \le s\} \quad P\text{-f.s.}$$

da $\hat{X}$ nichtfallend. Aber $\hat{X}$ càdlàg, Def. Typ.: also

$\hat{X}$ ist konstant auf $[\![T,\infty[\![$.

zweiter Bew: Für $q \in \mathbb{Q}^+$ gilt

3.12 c) : $\lambda_X(\underbrace{]\!]T,T+q]\!]}_{\in \mathcal{P}(\mathbb{F})}) = E(X_{T+q} - \underbrace{X_T}_{=0}) = 0$

3.18 b) : $\displaystyle \overset{\|}{\int_\Omega P(d\omega) \int_{(0,\infty)} 1_{]\!]T,T+q]\!]}(s,\omega)\, \hat{X}(ds,\omega)}$

pfadweise als R-S-Integral
≥ 0 da $\hat{X}$ càdlàg \& wachsend
$= \hat{X}(T+q,\omega) - \hat{X}(T,\omega)$

Also

$\hat{X}(T+q,\omega) = \hat{X}(T,\omega)$ für P-f.a. $\omega \in \Omega$, $\forall q \in \mathbb{Q}^+$

$\hat{X}$ càdlàg, d.h.: $\hat{X}$ konstant auf $[\![T,\infty[\![$.

zeige d): Spezialfall $\xi \equiv 1$, so für $s<t$ und $F \in \mathcal{F}_s$

$$1_F(X_t - X_s) = 1_F\, 1_{\{s<T\leq t\}}. \quad \square$$

3.6.20