Reinhard Höpfner, VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

June 8, 2020

Kap. IV : Definition des stochastischen Integrals

KAP IV Definition des stochastischen Integrals

Gegeben: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, übl. Vor.

A. Räume $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^{2,c}$

4.1 Def: Schreibe $\mathcal{M}^2 := \mathcal{M}^2(P, \mathbb{F})$ für Klasse aller càdlàg $(P, \mathbb{F})$-Martingale mit

$$\sup_{t \geq 0} E(M_t^2) < \infty .$$

Identifiziere M, M' in $\mathcal{M}^2$ falls M, M' P-ununterscheidbar.
Schreibe $\mathcal{M}^{2,c}$ für Klasse aller stetigen $M \in \mathcal{M}^2$.

4.2 Satz: Für $M \in \mathcal{M}^2$ existiert ein 'Abschluss nach rechts'

$$(M_\infty, \mathcal{F}_\infty) : \quad M_\infty \in L^2(P), \quad \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \in [0,\infty)} \mathcal{F}_t$$

so daß gilt:

i) $$E\Big(\sup_{t \in [0,\infty)} M_t^2\Big) \leq 4 \sup_{t \in [0,\infty)} E(M_t^2) = 4\, E(M_\infty^2)$$

ii) M ist die càdlàg-Modifikation von $t \to E(M_\infty | \mathcal{F}_t)$

iii) $M_t \longrightarrow M_\infty$ P-f.s. und in $L^2(P)$.

iv) $\{ M_T^2 : T \text{ bel. } \mathbb{F}\text{-SZ} \}$ ist gleichgradig integrierbar,
(mit Def. $M_T := M_\infty$ auf $\{T = \infty\}$ wegen Ex des Abschlusses nach rechts)

Bew: Sei $M \in \mathcal{H}^2$; M^2 und $X := |M|$ sind rechtsstetig. Submart.

a) ~~11.35~~, 11.36, 11.37 angewandt auf

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\ ,\ (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

zeigen: α) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |M_n| \in \mathcal{L}^2(P)$

β) $\{ M_n^2 : n \geq 1 \}$ ist gleichgradig integrierbar

γ) $\exists\, M_\infty \in \mathcal{L}^2(P)$ so daß $M_n \longrightarrow M_\infty$ P-f.s. und in $\mathcal{L}^2(P)$

δ) $E\big(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} M_n^2\big) \leq 4 \cdot \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} E(M_n^2) < \infty$.

Wegen gleichgrad. Int.: β) und 11.33 gilt: $M_n = E(M_\infty | \mathcal{F}_n)$ P-f.s. $\forall n$, und $(M_n)_n, (\mathcal{F}_n)_n$ kann durch Hinzunahme von

$$M_\infty\ ,\ \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n \quad (= \sigma(M_n : n\in\overline{\mathbb{N}}_0) \text{ wegen } γ)!)$$

fortgesetzt werden zu einem Martingal

$$(M_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}\ ,\ (\mathcal{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}_0}\ .$$

b) Da $M, \mathbb{F}$ bereits mit Indexmenge $[0,\infty)$ gegeben sind, gilt

$$M_t = E(M_{\lfloor t\rfloor+1} | \mathcal{F}_t) = E(M_\infty | \mathcal{F}_t)$$

für jedes $t \geq 0$, das ist ii).

c) Mit α) und Doob's upcrossing inequality 3.8 a) gilt

$$E(N_{a,b}^{\mathbb{Q}^+}) \leq \frac{1}{b-a}(K + |a|) \quad \forall\ a<b \text{ in } \mathbb{Q}$$

mit $K := \underbrace{\sup\limits_{t\in[0,\infty)} E(|M_t|)}_{\text{da } M\in\mathcal{H}^2} < \infty$, also ($\to$ 3.8) existiert

$\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ t \text{ rat.}}} M_t$ P-f.s., muß dann aber P-f.s. übereinstimmen

mit $M_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ aus γ). Da alle Pfade von M

càdlàg, ist gezeigt:

$$M_t \longrightarrow M_\infty \quad P\text{-f.s.}, \quad t \to \infty.$$

d) Aus der Existenz der Abschlussvariable $M_\infty \in L^2(P)$ gilt wie in 3.4 für das nichtneg. Submart. $\left((M_t^2)_{t\in[0,\infty]}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]} \right)$ zunächst

(x) $\quad \{ M_T^2 : T \in \mathcal{T}^f_{[0,\infty]} \}$ ist gleichgradig integrierbar.

Daraus geht man über mit fallenden Folgen $T_n \downarrow T$ für $T \in \mathcal{T}_{[0,\infty]}$

$$T_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\}} + \infty \, 1_{\{T \geq n\}} \quad \in \mathcal{T}^f_{[0,\infty]}$$

wegen der càdlàg-Pfade von M^2 auf die Gesamtheit aller HP von (x) in $L^1(P)$. Damit gilt

$$\{ M_T^2 : T \in \mathcal{T}_{[0,\infty]} \} \text{ ist gleichgrad. integr.}$$

e) Mit $I_n := 2^{-n}\mathbb{N}_0$ gilt wie in 11.36

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad E\left(\sup_{t\in I_n} M_t^2\right) \leq 4 \cdot \underbrace{\sup_{t\geq 0} E(M_t^2) < \infty}_{\text{vor. } \mathcal{M}^2}$$

und damit wegen der càdlàg-Pfade von M

$$E\left(\sup_{t\geq 0} M_t^2\right) = \sup_n E\left(\sup_{t\in I_n} M_t^2\right) \leq -\!\!\shortparallel\!\!- < \infty.$$

Wegen Ex. des Abschlusses M_∞ ist das i). $\square$

4.2' Bem: Für $M^{(i)} \in \mathcal{M}^2$ und wegen Existenz des Abschlusses $M^{(i)}_\infty \in L^2(P)$
und 4.2 ii)+iii)

$$\begin{cases} M^{(i)} \text{ ist càdlàg-Modifikation von } t \to E(M^{(i)}_\infty \mid \mathcal{F}_t) \\ M^{(i)}_t \longrightarrow M^{(i)}_\infty \text{ P-f.s. und in } L^2(P),\ t\to\infty \end{cases}$$

folgende Aussagen gleichwertig:

- $M^{(1)}_\infty = M^{(2)}_\infty$ im Sinne der Äquivalenz in $L^2(P)$
- es ex. eine P-Nullm. $N \in \mathcal{F}_\infty$ so daß

$$\omega \in \Omega \setminus N \Rightarrow M^{(1)}_\bullet(\omega) = M^{(2)}_\bullet(\omega) \quad \Big(\Leftrightarrow \overbrace{M^{(1)}_t(\omega) = M^{(2)}_t(\omega)\ \forall t \in \mathbb{Q}^+}^{\in \mathcal{F}_\infty}\Big)$$

wegen der übl. Hyp: $N \in \mathcal{F}_0$, $M^{(1)}$ ist Version von $M^{(2)}$, damit:
Martingale in $\mathcal{M}^2$ sind durch ihre Limesvariablen in $L^2(P)$ eindeutig festgelegt.

4.3 Satz: Der Raum $\mathcal{M}^2$ versehen mit

- Metrik $d_{\mathcal{M}^2}(M,\tilde{M}) := \| M_\infty - \tilde{M}_\infty \|_{L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)}$
- Norm $\| M \|_{\mathcal{M}^2} := \| M_\infty \|_{L^2(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)}$
- Skalarpr. $(M,\tilde{M})_{\mathcal{M}^2} := E(M_\infty \cdot \tilde{M}_\infty)$

ist ein Hilbertraum. Nenne $M,\tilde{M}$ orthogonal in $\mathcal{M}^2$ falls $E(M_\infty \cdot \tilde{M}_\infty) = 0$.

Bew: klar nach 4.2': $\mathcal{M}^2 \mathrel{\hat{=}} L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ ist linearer Raum, $d_{\mathcal{M}^2}$ Metrik auf $\mathcal{M}^2$ (beachte: $d_{\mathcal{M}^2}(M,\tilde{M}) = 0$ bedeutet P-Ununterscheidbarkeit der Martingale $M, \tilde{M}$), und

$\mathcal{M}^2$ vollständig $\mathrel{\hat{=}}$ $L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ vollständig

(vgl. Stoch. I, 2.18), aber was bedeutet das?

Sei $(M^n)_n$ Cauchyfolge in $\mathcal{M}^2$. Dann ist $(M^n_\infty)_n$ CF in $L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$, Vollstd. von L^p-Räumen: es ex. ZV N_∞ in $L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ mit $\| M^n_\infty - N_\infty \|_{L^2(\mathcal{F}_\infty, P)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Sei $N = (N_t)_{t \geq 0}$ die càdlàg-Version des Martingals $(E(N_\infty | \mathcal{F}_t))_{t \geq 0}$ (3.9, übl. Hyp.!) Dann $N \in \mathcal{M}^2$, und $d_{\mathcal{M}^2}(M^n, N) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$. □

4.3' Bem: Gilt $M^n \to M$ in $\mathcal{M}^2$, so nach 4.2 und wegen Existenz der Limesvariablen M^n_∞, M_∞

$$E\Big(\sup_{t \in [0,\infty]} | M^n_t - M_t |^2 \Big) \leq 4 E\big((M^n - M)^2_\infty\big) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

also

$$\sup_{t \in [0,\infty]} (M^n_t - M_t) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

in $L^2(P)$ und damit auch P-stochastisch.

Richtig nützlich ist aber erst die nächste Formulierung (ist aber eigentlich nur Stoch. I 2.18, 2.22):

<u>4.4 Satz:</u> Gilt $M^n \to M$ in $\mathcal{M}^2$, so <u>ex.</u> eine TF $(n_k)_k$ und eine P-Nullmenge $N \in \mathcal{F}_\infty$ so daß

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N : \quad M^{n_k}_\cdot(\omega) \to M_\cdot(\omega) \quad \underline{\text{glm. auf } [0,\infty]}$$

(Beachte: übl. ⇝ $N \in \mathcal{F}_0$!)

<u>Bew:</u> Wähle $(n_k)_k$ so daß $d_{\mathcal{M}^2}(M^{n_k}, M) < 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann nach 4.2

$$P\Big(\sup_{t \geq 0} |M^{n_k}_t - M_t|^2 > \frac{1}{k}\Big) \leq k \cdot E\Big(\sup_{t\geq 0} |M^{n_k} - M|^2_t\Big)$$

$$\leq 4 \cdot k \cdot E\big(|M^{n_k} - M|^2_\infty\big) < 4k\, 2^{-k}$$

summierbar in $k \in \mathbb{N}$, also Borel-Cantelli

$$\sup_{t \geq 0} |M^{n_k}_t - M_t|^2 > \frac{1}{k} \quad \text{für höchstens endlich viele } k \in \mathbb{N},$$

P-f.s. Damit konvergieren Pfade $M^{n_k}_\cdot$ gleichm. auf $[0,\infty]$ (wegen Ex. der Limesvariablen $M^{n_k}_\infty, M_\infty$) gegen Pfade $M_\cdot$, P-fast sicher. □

5.6.20

4.5 Satz: $\mathcal{M}^{2,c}$ ist abgeschlossen in $\mathcal{M}^2$.

Bew: Betr. $(M^n)_n \subset \mathcal{M}^{2,c}$ und $M \in \mathcal{M}^2$ so daß $M^n \to M$ in $\mathcal{M}^2$. Wähle TF $(n_k)_k$ und 4.4 so daß für $\omega \notin N$ gilt $M^{n_k}_\cdot(\omega) \xrightarrow{k\to\infty} M_\cdot(\omega)$ glm. auf $\mathbb{R}^+$. Damit $M_\cdot(\omega)$ stetig für $\omega \notin N$. □

4.5' Satz: Für $M \in \mathcal{M}^2$ ist λ_{M^2} ein endliches Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Bew:
$$\lambda_{M^2}(\mathbb{R}^+\times\Omega) = \lim_{N\to\infty} \lambda_{M^2}([0,N]\times\Omega)$$
$$= \lim_{N\to\infty} E(M_N^2 - M_0^2) = E(M_\infty^2) - E(M_0^2).$$

4.5'' Bem: a) Für $M \in \mathcal{M}^2$ ist M^2 ein Submart. v. Kl. [LD], 4.2 iv).

b) Martingale $M \in \mathcal{M}^2$ sind aus ihrer Limesvariable $M_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ als P-f.s. eindeutige Version von $E(M_\infty | \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$ hergeleitet: also gilt i.a. nicht $M_0 = 0$.

c) Für $M \in \mathcal{M}^2$ unterscheiden sich die Prozesse
$$X^{(1)} := M^2, \quad X^{(2)} := M^2 - M_0^2, \quad X^{(3)} := (M - M_0)^2$$
höchstens durch ein $(P,\mathbb{F})$-Martingal und/oder einen konstanten Prozeß, haben daher dasselbe Doléansmaß wegen

$$\begin{cases} \lambda_X(]s,t]\times F) = E(1_F(X_t - X_s)), & F \in \mathcal{F}_s,\ s<t \\ \lambda_X(\{0\}\times F) = 0, & F \in \mathcal{F}_0. \end{cases}$$

Schreibe also für $\lambda_{X^{(i)}}$, $i=1,2,3$, stets λ_{M^2}. □