## B. Stochastische Integrale $\int H\,dM$, $M \in \mathcal{M}^2$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ erfülle übl. Hyp.

**4.6 Def:** Schreibe $\mathcal{E}_0$ für Klasse aller Proz. der Form

$$\begin{cases} H = \xi_i \, 1_{]r_i, r_{i+1}]}, & r_i < r_{i+1}, \ \xi_i \text{ beschr. } \mathcal{F}_{r_i}\text{-mb} \\ H = \xi_0 \, 1_{[0]}, & \xi_0 \text{ beschränkt } \mathcal{F}_0\text{-mb.} \end{cases}$$

Schreibe $\mathcal{E}$ für den von $\mathcal{E}_0$ aufgespannten linearen Raum

aller Proz der Form $\sum_{i=1}^{\ell} H^i$, $H^i$ wie oben, $\ell \geq 1$

und nenne $\mathcal{E}$ Raum der vorhersehbaren Elementarprozesse.

**4.6' Def:** Für $M \in \mathcal{M}^2$ und für Doléansmaß $\lambda_{M^2}$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$:

$$\begin{cases} L^2(M) := L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{F}), \lambda_{M^2}) \\ \text{versehen mit } L^2\text{-Norm} \quad \|H\|_{L^2(M)} = \left(\lambda_{M^2}(H^2)\right)^{1/2} \end{cases}$$

identifiziere $H, H'$ in $L^2(M)$ wenn $\|H - H'\|_{L^2(M)} = 0$; beachte

$$\lambda_{M^2}(H^2) = \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} H^2 \, d\lambda_{M^2} = E\left(\int_{[0,\infty)} H_s^2 \, d\langle M \rangle_s\right)$$

nach 3.22+3.26, für $\mathbb{F}$-vorhersehbare Prozesse $H = (H_s)_{s \geq 0}$.

$M \in \mathcal{M}^2 \Rightarrow \lambda_{M^2}$ ist endl. Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, also sind alle beschränkten vorhersehbaren Prozesse in $L^2(M)$, insbes:

$$\mathcal{E} \subset L^2(M)$$

für jedes $M \in \mathcal{M}^2$.

4.7 Konstruktion: Für Integranden aus $\mathcal{E}_0$ und Integratoren $M \in \mathcal{M}^2$ kann man einen Prozeß

$$I = \int H\,dM \in \mathcal{M}^2 \quad (\text{mit } I_0 = 0)$$

ganz elementar definieren:

I) Betrachte Elementarprozesse $H \in \mathcal{E}_0$. Im Fall

① $H = \xi 1_{]r_1, r_2]}$, $r_1 < r_2$, $\xi$ beschränkt $\mathcal{F}_{r_1}$-mb

def. $I = (I_t)_{t \geq 0}$ durch

$$I_t := \begin{cases} 0 & t \leq r_1 \\ \xi(M_t - M_{r_1}) & r_1 < t \leq r_2 \\ \xi(M_{r_2} - M_{r_1}) & r_2 < t \end{cases} = \xi(M^{r_2} - M^{r_1})_t$$

mit $M^r$ = der zu Zeit $r$ eingefrorene Prozeß.

3.14: $M^r$ ist $(P, \mathbb{F})$-Martingal.

wegen $E(\sup_{t \geq 0} M_t^2) < \infty$ gilt $M^r \in \mathcal{M}^2$.

Dann auch $E(\sup_{t \geq 0} I_t^2) < \infty$ da $\xi$ beschränkt.

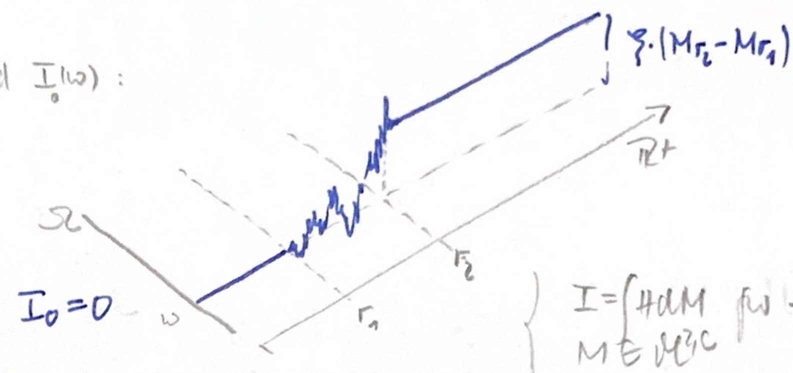
Auch ist $I$ Martingal: betr. $F \in \mathcal{F}_s$, $s < t$, dann

$$1_F(I_t - I_s) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq r_1 \\ (1_F \xi)(M_t - M_{r_1 \vee s}) & \text{für } r_1 < t \leq r_2 \\ (1_F \xi)(M_{r_2} - M_{r_1 \vee s}) & \text{für } t > r_2 \end{cases}$$

wegen $(1_F \xi)$ beschränkt $\mathcal{F}_{r_1 \vee s}$-mb und $M \in \mathcal{M}^2$ hat man $E(1_F(I_t - I_s)) = 0$. Also $I \in \mathcal{M}^2$.

Zusammen: $I \in \mathcal{M}^2$ 'fängt zu Zeit $r_1$ zu leben an und friert zu Zeit $r_2$ wieder fest':

typ. Pfad $I_\cdot(\omega)$:




$\Big\{$ $I = \int H\,dM$ für $H = \xi 1_{]r_1,r_2]}$, $M \in \mathcal{M}^{2,c}$

Im Fall

(ii) $H = \xi 1_{[0]}$, $\xi$ beschränkt $\mathcal{F}_0$-mb

def. $I = (I_t)_{t\ge 0}$ durch $I_t \equiv 0$ $\forall t$, triv. in $\mathcal{M}^2$.

II) Betrachte nun die Eigenschaften der Abbildung

$$\mathcal{E}_0 \ni H \longrightarrow \int H\,dM \in \mathcal{M}^2 :$$

a) Es gilt eine Isometrieeigenschaft

$$\left\| \int H\,dM \right\|_{\mathcal{M}^2} = \| H \|_{L^2(M)} :$$

Bew: klar im Fall (ii): $I = \int H\,dM$ ist def. als $0 \in \mathcal{M}^2$, und $H = \xi 1_{[0]}$ ist äquivalent zu $0$ in $L^2(M)$ und 3.12 a).

Betr. Fall (i): $H = \xi 1_{]r_1,r_2]}$, $\xi$ beschränkt $\mathcal{F}_{r_1}$-mb, $r_1 < r_2$.

Approx. $\xi^2$ monoton (und gleichmäßig) durch

(*) $$\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}_0 \\ \text{endl.}}} \frac{j}{2^n} 1_{\{\frac{j}{2^n} \le \xi^2 < \frac{j+1}{2^n}\}} \uparrow \xi^2, \quad n\to\infty.$$

Damit

$$\|I\|^2_{\mathcal{M}^2} = E(I_\infty^2) = E([\xi(M_{r_2}-M_{r_1})]^2)$$

$$= E(\xi^2(M_{r_2}^2 - M_{r_1}^2)) - \underbrace{2E(\underbrace{\xi^2 M_{r_1}}_{\mathcal{F}_{r_1}\text{-mb}}(M_{r_2}-M_{r_1}))}_{=0 \text{ da } M\in\mathcal{M}^2}$$

$$= E\left( \xi^2 (M^2_{\tau_2} - M^2_{\tau_1}) \right)$$

$$= \lambda_{M^2}\left( \xi^2 1_{]\tau_1,\tau_2]} \right) = \lambda_{M^2}(H^2) = \left(\|H\|_{L^2(M)}\right)^2$$

und wg. des Doléansmaßes zu $M^2$ in 3.12(a) und 4.6'.

b) N. Konstr. als 'gewichtete Zuwächse' gilt für $H \in \mathcal{E}_0$ u. Konstr.

$$M \in \mathcal{M}^{2,c} \Rightarrow I = \int H\,dM \in \mathcal{M}^{2,c}$$

c) es gilt Orthogonalitätseigenschaft: für $M \in \mathcal{M}^2$ und $H^{(1)}, H^{(2)} \in L^2(M)$:

$\xi^{(i)}$ beschr. $\mathcal{F}_{\tau_1^{(i)}}$-mb, $H^{(i)} = \xi^{(i)} 1_{]\tau_1^{(i)},\tau_2^{(i)}]}$

folgt aus

$$\bigcap_{i=1}^{2} ]\tau_1^{(i)},\tau_2^{(i)}] = \emptyset$$

Orthogonalität in $\mathcal{M}^2$:

$$I^{(1)} = \int H^{(1)}\,dM \;\perp\; I^{(2)} = \int H^{(2)}\,dM \quad \text{in } \mathcal{M}^2.$$

Bew: zu zeigen ist $E(I^{(1)}_\infty I^{(2)}_\infty) = 0$. Betrachte

$$E(I^{(1)}_\infty I^{(2)}_\infty) = E\left( \xi^{(1)}(M_{\tau_2^{(1)}} - M_{\tau_1^{(1)}})\, \xi^{(2)}(M_{\tau_2^{(2)}} - M_{\tau_1^{(2)}}) \right)$$

wobei OBdA $\tau_2^{(1)} \le \tau_1^{(2)}$: $\quad ]\,\tau_1^{(1)} \quad ]\,\tau_2^{(1)} \; ]\,\tau_1^{(2)} \quad ]\,\tau_2^{(2)}$ .

Dann $I^{(1)}_\infty$ mb bezgl. $\mathcal{F}_{\tau_2^{(1)}}$

also mb bez. $\mathcal{F}_{\tau_1^{(2)}}$, also

$$E(I^{(1)}_\infty I^{(2)}_\infty) = E\Big(I^{(1)}_\infty \underbrace{E(I^{(2)}_\infty \mid \mathcal{F}_{\tau_1^{(2)}})}_{=0}\Big) = 0. \quad \square$$

4.8 Hauptsatz: a) Fix $M \in \mathcal{M}^2$. Dann $\exists^1$ lineare Isometrie $L^2(M) \to \mathcal{M}^2$

$$I_M: \quad \underbrace{L^2(M) \ni H}_{\text{Norm } \|H\|_{L^2(M)}} \longrightarrow \underbrace{\int H\,dM}_{\text{Norm } \|\int H\,dM\|_{\mathcal{M}^2}} \in \mathcal{M}^2$$

welche auf $\mathcal{E}_0$ erklärt ist als

8.6.20

$$I_M(H) = \begin{cases} \xi(M^{r_2} - M^{r_1}) & \text{falls } H = \xi 1_{]\!]r_1, r_2]\!]}, \ \xi \text{ beschr. } \mathcal{F}_{r_1}\text{-mb} \\ 0 & \text{falls } H = \xi 1_{[\![0]\!]}, \ \xi \text{ beschr. } \mathcal{F}_0\text{-mb.} \end{cases}$$

b) Für $M \in \mathcal{M}^2$ und $H \in L^2(M)$ nenne den stoch. Prozess

$$I_M(H) = \int H\,dM \in \mathcal{M}^2$$

stochastisches Integral von $H$ bzgl. $M$, übl. Schreibweise auch $H \circ M$.
Den Zustand dieses Prozesses zur Zeit $t \geq 0$ bezeichnet man wahlweise mit

$$I(H)_t, \quad \int_0^t H\,dM, \quad \underbrace{\int_0^t H_s\,dM_s}, \quad (H \circ M)_t .$$

Vorsicht: das ist i.a. keine pfadweise Definition !!!

Bew: 1) Def. auf $\mathcal{E}$ ($\leftarrow$ 4.6): ist $H \in \mathcal{E}$ von Form $\sum_{i=1}^{\ell} H_i$, $H_i \in \mathcal{E}_0$, so setze $I(H) := \sum_{i=1}^{\ell} I(H_i)$.

Linearität der Abb. $I: \mathcal{E} \to \mathcal{M}^2$ klar, Wohldefiniertheit:
zu verschiedenen Darst. desselben $H$

$$H = \sum_{i=1}^{\ell} H_i, \quad H_i = \xi_i 1_{]\!]s_i, t_i]\!]}, \ \xi_i \text{ beschr. } \mathcal{F}_{s_i}\text{-mb}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} K_j, \quad K_j = \eta_j 1_{]\!]u_j, v_j]\!]}, \ \eta_j \text{ beschr. } \mathcal{F}_{u_j}\text{-mb}$$

ordne alle Zeitpunkte $s_i, t_i, u_j, v_j$ aufsteigend

$$0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k < r_{k+1} < \infty$$

und schreibe $H$ in Form

$$H = \sum_{\nu=1}^{k} \varphi_\nu 1_{]\!]r_\nu, r_{\nu+1}]\!]}$$

mit

$$\varphi_r = \sum_{i=1}^{\ell} \xi_i 1_{\{s_i \le r_r < r_{r+1} \le t_i\}} = \sum_{j=1}^{m} \eta_j 1_{\{u_j \le r_r < r_{r+1} \le v_j\}}$$

$r = 1, \dots, k$; dabei ist $\varphi_r$ $\mathcal{F}_{r_r}$-mb und beschränkt $\forall r$. Damit führen beide Darstellungen des Prozesses $H$ auf dieselbe (in $\mathcal{M}^2$ orthogonale, 4.7 III b)) Zerlegung

$$I(H) = \sum_{r=1}^{k} I(\varphi_r 1_{]\!]r_r, r_{r+1}]\!]}) \in \mathcal{M}^2.$$

Also $I$ wohldef. als lin. Abb. $\mathcal{E} \to \mathcal{M}^2$; weil $\mathcal{E} \subset L^2(M)$ (4.6).

2) zeige: es gilt

$$\forall H \in \mathcal{E} \text{ bel.}: \quad \| I(H) \|_{\mathcal{M}^2} = \| H \|_{L^2(M)}$$

d.h. $I$ ist eine lineare Isometrie $\mathcal{E} \to \mathcal{M}^2$:

wähle für $H$ Darstellungen wie in 1)

$$\begin{cases} H = \sum_{r=0}^{k} H^{(r)}, \quad H^{(r)} = \varphi_r 1_{]\!]r_r, r_{r+1}]\!]}, \quad \varphi_r \text{ beschr. } \mathcal{F}_{r_r}\text{-mb} \\ \text{falls } r \geq 1, \quad H^{(0)} = \varphi_0 1_{[\![0]\!]} \text{ mit } \varphi \text{ beschr. } \mathcal{F}_0\text{-mb}, \\ 0 \le r_1 < r_2 < \dots < r_k < \infty. \end{cases}$$

Dann nach 1) und 4.7 III b):

$$I(H^r) \text{ orthogonal in } \mathcal{M}^2, \quad 0 \le r \le k$$

und damit

$$\| I(H) \|_{\mathcal{M}^2}^2 = \sum_{r=0}^{k} \| I(H^r) \|_{\mathcal{M}^2}^2$$

genauso

$$H^r \text{ orthogonal in } L^2(M), \quad 0 \le r \le k$$

also

$$\| H \|_{L^2(M)}^2 = \sum_{r=0}^{k} \| H^r \|_{L^2(M)}^2$$

Nach 4.7 III a) gilt aber

$$\| I(H^r) \|_{\mathcal{M}^2} = \| H^r \|_{L^2(M)}, \quad 0 \le r \le k.$$

3) Zeige: $\mathcal{E}$ liegt dicht in $\mathcal{L}^2(M)$:

Zum Beweis betrachte

$$\mathcal{H} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \text{es ex. } (H_n)_n \subset \mathcal{E} \text{ mit } H_n \to 1_A \text{ in } \mathcal{L}^2(M)\}$$

und zeige $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\mathbb{F})$; beachte: wegen $M \in \mathcal{H}^2$ ist $\lambda_{M^2}$ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{F}))$.

α) $\mathcal{H}$ ist Dynkin:

i) $\mathbb{R}^+ \times \Omega \in \mathcal{H}$ da $H_m := 1_{]0,m]} \to 1_{\mathbb{R}^+ \times \Omega}$ in $\mathcal{L}^2(M)$.

ii) c-Stabilität: sei $(H_n)_n$ in $\mathcal{E}$ so daß $H_n \to 1_A$ in $\mathcal{L}^2(M)$, dann

$$\|(1 - H_n) 1_{]0,m]} - (1 - 1_A) 1_{]0,m]}\|_{\mathcal{L}^2(M)} \le \|H_n - 1_A\|_{\mathcal{L}^2(M)} \to 0$$

$= 1_{\mathbb{R}^+ \times \Omega}$ 3.11'' !!

also wird $A^c$ approx. in $\mathcal{L}^2(M)$ durch

$$(1 - H_n) 1_{]0,m]}, \quad n, m \to \infty.$$

iii) $\dot{\bigcup}_{\text{abz}}$-Stabilität: sind $A_i$, $i \ge 1$, disjunkt in $\mathcal{H}$, wähle für jedes $A_i$ ein $K_i \in \mathcal{E}$ mit

$$\|K_i - 1_{A_i}\|_{\mathcal{L}^2(M)} < \varepsilon \cdot 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Dann mit $H_n := \sum_{i=1}^n K_i \in \mathcal{E}$:

$$\|1_{\dot{\bigcup}_{i=1}^\infty A_i} - 1_{\dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i}\|_{\mathcal{L}^2(M)} < \varepsilon \quad \text{für } n \text{ groß genug}$$

$$\|1_{\dot{\bigcup}_{i=1}^n A_i} - H_n\|_{\mathcal{L}^2(M)} \le \sum_{i=1}^n \|K_i - 1_{A_i}\| < \varepsilon$$

Also wird $\dot{\bigcup}_{i=1}^\infty A_i$ approx. in $\mathcal{L}^2(M)$ durch $(H_n)_n \subset \mathcal{E}$.

β) $\mathcal{H}$ Dynkin, $\mathcal{H} \supset \mathcal{R}(\mathbb{F}) \Longrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

<u>Rest</u> ist Aufgabe aus Blatt: zerlege $H = H^+ - H^-$ in $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, approx. $H \ge 0$ durch $H \wedge p$, $p \in \mathbb{N}$, in $\mathcal{L}^2(M)$, approx. $H$ nichtneg. + beschränkt mon. und <u>glm</u> durch

$$\sum_{j=1}^{p 2^n} \frac{j-1}{2^n} 1_{A_{nj}} \quad \text{mit } A_{nj} := \left\{\frac{j-1}{2^n} \le H < \frac{j}{2^n}\right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{F}).$$

4) Abschluss des Bew.: Da $\mathcal{M}^2$ vollständig und $\mathcal{E}$ dicht in $\mathcal{L}^2(M)$, kann jede lineare Isometrie $\mathcal{E} \to \mathcal{M}^2$ auf genau eine Weise zu einer linearen Isometrie $\mathcal{L}^2(M) \to \mathcal{M}^2$ fortgesetzt werden (Dieudonné 1969, Foundations of Modern Analysis, (3.15.5))

($H \in \mathcal{L}^2(M)$: wähle $(H_n)_n \in \mathcal{E}$ s.d. $H_n \to H$ in $\mathcal{L}^2(M)$; dann ist $(H_n)_n$ CF in $\mathcal{L}^2(M)$, also $(I(H^n))_n$ CF in $\mathcal{M}^2$; $\mathcal{M}^2$ vollstd.: also ex $N \in \mathcal{M}^2$ s.d. $I(H^n) \to N$ in $\mathcal{M}^2$. Wegen Isometrieeigenschaft von $I: \mathcal{E} \to \mathcal{M}_2$ ist $N \in \mathcal{M}^2$ unabhängig von Wahl der $H$ approx. Folge $(H^n)_n \subset \mathcal{L}^2(M)$ festgelegt.
Also ist $I(H) := N$ eindeutig und wohldef.; u. insb. gilt

$$\|I(H)\|_{\mathcal{M}^2} = \lim_n \|I(H_n)\|_{\mathcal{M}^2} \overset{2)}{=} \lim_n \|H_n\|_{\mathcal{L}^2(M)} = \|H\|_{\mathcal{L}^2(M)}$$

Damit ist

$$I : \mathcal{L}^2(M) \to \mathcal{M}^2$$

eine lineare Isometrie. ) □

<u>4.9 Bem:</u> Bis auf einfache Spezialfälle ist die Def. des stoch. Int.

$$\int_0^t H_s \, dM_s, \quad t \geq 0$$

<u>keine pfadweise Definition</u>, sondern man konstruiert ein Martingal $\int H \, dM$ als <u>Limes einer CF in $\mathcal{M}^2$</u>

$$\text{CF} \quad \left(\int H^n \, dM\right)_{n \geq 1}, \quad H^n \in \mathcal{E}, \quad H^n \to H \text{ in } \mathcal{L}^2(M).$$