Die folgenden beiden Sätze sind sehr nützlich:

4.10 Satz: Betr. $M \in \mathcal{M}^2$ und $H^n \to H$ in $L^2(M)$.
Dann gibt es eine TF $(n_k)_k$ und eine P-Nullm. $N \in \mathcal{F}_\infty$ s.d.

$$\forall\, \omega \in \Omega \setminus N: \quad I(H^{n_k})_\cdot(\omega) \xrightarrow{k\to\infty} I(H)_\cdot(\omega) \quad \underline{\text{glm.}} \text{ auf } \mathbb{R}^+.$$

Bew: I als lineare Isometrie $L^2(M) \to \mathcal{M}^2$: $H^n \to H$ in $L^2(M)$ impliziert $I(H^n) \longrightarrow I(H)$ in $\mathcal{M}^2$, $n\to\infty$. Rest 4.4. □

4.11 Folgerung: a) Ist $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, so $\int H dM \in \mathcal{M}^{2,c}$ $\forall H \in L^2(M)$.
b) Für alle $M \in \mathcal{M}$ und alle $H \in L^2(M)$ gilt $I_0 = 0$ P-f.s., $I =$ "$\int H dM$".

Bew: beachte: $\mathcal{E}$ liegt dicht in $L^2(M)$.
Wähle Folge $(H_n)_n$ in $\mathcal{E}$ mit $H_n \to H$ in $L^2(M)$.
N. Konstr. in 4.7 gelten beide Beh. für Integranden in $\mathcal{E}_0$.
Linearität des Int: beide Beh. gelten für alle $H_n \in \mathcal{E}$, $n \geq 1$.
Wende jetzt 4.10 an:
P-f.s. Pfade von $\int H dM$, $H \in L^2(M)$, werden glm. auf $\mathbb{R}^+$ approx. durch Pfade von $\int H_{n_k} dM$, $(n_k)_k$ geeign. TF. □

10.6.20

4.12 Satz: Zu $H = (H_t)_{t \geq 0}$ $\mathbb{F}$-adaptiert, linksstetig und beschränkt definiere

$$H^n(t,\omega) := \sum_{j=1}^{\infty} H\left(\tfrac{j-1}{2^n}, \omega\right) 1_{\left]\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right]}(t), \quad t \geq 0,\ \omega \in \Omega.$$

Dann H^n, $n \geq 1$, $H \in L^2(M)$ für jedes $M \in \mathcal{M}^2$, und es gilt →

$$\begin{cases} H^n \to H & \text{pktw. auf } \mathbb{R}^+ \times \Omega \text{ und in } L^2(M) \\ \underline{P\text{-stoch}+L^2(P)}: & I_0(H^n) \to I_0(H) \text{ glm auf } [0,\infty], \; n\to\infty \\ \exists \text{ TF } (n_k)_k \text{ s.d. } \underline{P\text{-f.s. gilt}}: & I_0(H^{n_k}) \to I_0(H) \text{ glm auf } [0,\infty], \; k\to\infty \end{cases}$$

für jedes $M \in \mathcal{M}^2$, wobei $I(H^n)$ explizit:

$$\int_0^t H^n \, dM = \sum_{j=1}^{\infty} H\left(\tfrac{j-1}{2^n}\right)\left(M_{t\wedge \frac{j}{2^n}} - M_{t\wedge \frac{j-1}{2^n}}\right), \; t \geq 0.$$

Bem: Resultat erlaubt Simulation: kann man die Zuwächse von M simulieren (Bsp $M = B$, $M = (N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$, ..., jeweils exponential z.B. mehr), so kann man jede $t \to \int_0^t H_s \, dM_s$ simulieren ...

Kloeden-Platen Num. sol. of SDE's Springer 1992

Bew: 1) Darstellung von $\left(I_M(H^n)\right)_t = \int_0^t H^n dM$ folgt sofort aus Lstr. 4.7: da H beschränkt, gilt $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$H^n 1_{]0,m]} = \sum_{j=1}^{m(2^n)} H\left(\tfrac{j-1}{2^n}\right) 1_{]\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]} \in \mathcal{E}.$$

2) Mit H ist jedes H^n linksstetig und $\mathbb{F}$-adaptiert, also $\mathbb{F}$-vhs, und wegen Linksstetigkeit von H:

$$H^n(t,\omega) \longrightarrow H(t,\omega) \quad \text{punktweise auf } \mathbb{R}^+ \times \Omega.$$

Beschr. von H und 4.5' (dom. Konvergenz) $\Rightarrow$ $H_n, n \geq 1, H$ in $L^2(M)$ für jedes $M \in \mathcal{M}^2$.

Dom. Konv.:

$$H^n \to H \quad \text{in } L^2(M).$$

und wegen Isometrie

$$I_M(H^n) \to I_M(H) \quad \text{in } \mathcal{M}^2$$

für jedes $M \in \mathcal{M}^2$. Der Rest ist dann 4.3' und 4.4 für die Martingale $I_M(H^n), I_M(H)$ in $\mathcal{M}^2$. $\square$

4.13 Hs: a) Für $M, M' \in \mathcal{M}^2$ und $H \in L^2(M) \cap L^2(M')$:

$$\int H \, d(M-M') = \int H\,dM - \int H\,dM' .$$

b) Für $M \in \mathcal{M}^2$ und $H, H' \in L^2(M)$:

$$\int (H+H')\,dM = \int H\,dM + \int H'\,dM$$

Bew. ÜA

Bew: 1) Beide Aussagen klar n. Konstr. in 4.7 falls $H, H' \in \mathcal{E}$.

2) zeige b): Da $\mathcal{E}$ dicht in $L^2(M)$, wähle Folgen $(H_n)_n, (H'_n)_n$ in $\mathcal{E}$ mit $H_n \to H$ in $L^2(M)$, $H'_n \to H'$ in $L^2(M)$: 'lineare Isometrie'.

3) zeige a): Mit Dynkinschluss ausgehend von $H = 1_R$, $R \in \mathcal{R}(\mathbb{F})$:

(×) Aussage a) gilt für $H = 1_A$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Zerlege nun allg. $H \in L^2(M) \cap L^2(M')$ in $H = H^+ - H^-$,
approx. $H \geq 0$ durch $(H \wedge N)$, $N \in \mathbb{N}$;
approx. $H \geq 0$ beschränkt ($\leq N$) durch

(××) $$H_n := \sum_{j=1}^{N2^n-1} \frac{j}{2^n} 1_{\{\frac{j}{2^n} \leq H < \frac{j+1}{2^n}\}} + N 1_{\{H=N\}} :$$

sowohl monoton als auch gleichmäßig für $n \to \infty$ in allen drei Räumen

(o) $L^2(M)$, $L^2(M')$, $L^2(M-M')$

(d.h. bzgl. endlicher Maße $\lambda_{M^2}, \lambda_{(M')^2}, \lambda_{(M-M')^2}$ auf $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{P}(\mathbb{F}))$):

(×) und (××) zeigen:

$$\int H_n \, d(M-M') = \int H_n\,dM + \int H_n\,dM'$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nun Isometrieeigenschaft der Räume in (o)

$I_M : L^2(M) \to \mathcal{M}^2$, $I_{M'} : L^2(M') \to \mathcal{M}^2$

$I_{M-M'} : L^2(M-M') \to \mathcal{M}^2$

ausnutzen. □

4.13' Satz: Sei $M \in \mathcal{M}^2$, $H, H' \in L^2(M)$, S, T bel. $\mathbb{F}$-SZ.

Dann gilt b.a.U in $\mathcal{M}^2$:

i) $$M^T = M_0 + \int 1_{[\![0,T]\!]}\, dM = M_0 + \int 1_{]\!]0,T]\!]}\, dM$$

ii) $$\left(\int H\, dM\right)^T = \int (H 1_{[\![0,T]\!]})\, dM = \int (H 1_{]\!]0,T]\!]})\, dM = \int H\, d(M^T)$$

iii) $S \leq T$: $$\left(\int H\, d(M^T)\right)^S = \int H\, d(M^S)$$

iv) $$\underbrace{H = H' \text{ auf }]\!]0,T]\!]}_{\text{reicht: } \lambda_{M^2}\text{-f.s.}} \Rightarrow \int H\, dM = \int H'\, dM \text{ auf } [\![0,T]\!].$$

Bew: Beachte stets $\lambda_{M^2}(\{0\} \times \Omega) = 0$.

Zeige nur i), analoge Argumente sonst.

Für $T \in \mathcal{T}_{[0,\infty]}$ gilt: T ist absteigender Limes der

$$T_n := \sum_{j=1}^{n2^n} \frac{j}{2^n} 1_{\{\frac{j-1}{2^n} < T \leq \frac{j}{2^n}\}} + \infty\, 1_{\{T > n\}} \in \mathcal{T}^f_{[0,\infty]}$$

(Ex. der Limesvar. M_∞ für $M \in \mathcal{M}^2$!), und

$]\!]T_n, \infty[\![$ aufsteigender Limes der $]\!]T_n, T_n+m]\!]$, $m \to \infty$.

Da $]\!]T_n, T_n+m]\!]$ endl. Vereinigung von ZE: Kstr. 4.6

$$\int 1_{]\!]T_n, T_n+m]\!]}\, dM = M^{T_n+m} - M^{T_n}.$$

Isometrieeigenschaft und $n \to \infty$ (beachte 4.2 iii)!)

$$\int 1_{]\!]T_n,\infty[\![}\, dM = M - M^{T_n}$$

Isometrieeigenschaft und $n \to \infty$ (Stetigkeit-Pfade von M, gleichgradige Integrierbarkeit (3.12') der $\{M^2_{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$)

$$\int 1_{]\!]T,\infty[\![}\, dM = M - M^{T} \quad \text{in } \mathcal{M}^2.$$

Das bedeutet

$$\int 1_{]\!]0,T]\!]}\, dM = M^{T} - M_0 \quad \text{in } \mathcal{M}^2.$$

4.13'' Bisheriges Fazit: $M \in \mathcal{M}^2$: können bis jetzt integrieren

i) jeden beschränkten vhs Prozess H bez. beliebigem $M \in \mathcal{M}^2$

ii) $H \in L^2(M)$ bez. $M \in \mathcal{M}^2$, Kriterium (4.6')

$$\lambda_{M^2}(H^2) = \int_{\mathbb{R}\times\Omega} H^2 \, d\lambda_{M^2} = E\Big(\int_{[0,\infty)} H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\Big) < \infty.$$

Stetigkeit von M sind sowohl für Def. des Raumes $L^2(M)$ (4.5''c)) als auch für Def. von $\int H\,dM$ irrelevant.

Beachte: Noch sind BB B und kompensierter Poisson-Prozess $M = (N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ nicht in $\mathcal{M}^2$, wohl aber alle eingefrorenen Prozesse

$$(B_{t\wedge n})_{t\geq 0}, \quad (M_{t\wedge n})_{t\geq 0}, \quad \text{usw.}$$