Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Einige Übungsaufgaben zu Kapitel IV **June 15, 2020**

Man setze für alle Aufgaben dieses Blattes 'übliche Hypothesen' voraus.

Aufgabe 4.1 : Sei $M \in \mathcal{M}^2$ und $H \in L^2(M)$. Sei T eine $I\!F$-Stopzeit. Man überlege sich sorgfältig und im Detail, warum die Stopregel 4.13' ii) gilt:

$$\left(\int H dM \right)^T = \int H \, dM^T = \int (H \, 1_{[[0,T]]}) \, dM^T = \int (H \, 1_{[[0,T]]}) \, dM = \int (H \, 1_{]]0,T]]}) \, dM \; .$$

<u>Hinweis:</u> Man beginne mit elementaren Integranden $H \in \mathcal{E}_0$. Man kann M zerlegen:

$$M = M^T + N \quad , \quad N := (M - M^T) 1_{]]T,\infty[[} \; .$$

Aufgabe 4.2 : Sei $M \in \mathcal{M}^2$. Zeige: für Elementarprozesse $H = (H_t)_{t \geq 0}$ gilt

$$\left\langle \int H dM \right\rangle = \int H^2 \, d\langle M \rangle \; .$$

Aufgabe 4.3 : Für einen $I\!F$-wachsenden Prozess $H = (H_t)_{t \geq 0}$ und eine Konstante $C < \infty$ betrachte man Eigenschaften i) oder ii):

i) H hat beschränkte Sprünge über vorhersehbare $I\!F$-Stopzeiten, d.h.:

$$(\Delta H)_S \leq C \quad \text{für jede vorhersehbare Stopzeit } S \; ;$$

ii) H hat beschränkte Sprünge, d.h.:

$$(\Delta H)(t, \omega) \leq C \quad \text{für alle } (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega \; .$$

Zeige: a) unter ii) ist H lokal beschränkt;

b) ist H vorhersehbar, so sind i) und ii) äquivalent.

<u>Hinweis:</u> Darstellung von cadlag Prozessen nach Kap. 2 D.