C. Lokalisation, $\int H\,dM$ für $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$

4.14 Def: a) Eine Klasse $\mathcal{C}$ von stoch. Proz. auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$ heißt <u>stabil unter Stoppen</u> falls

$$X \in \mathcal{C},\ T\ \mathbb{F}\text{-SZ} \Rightarrow X^T = (X_{T \wedge t})_{t \geq 0} \in \mathcal{C}.$$

b) Ist $\mathcal{C}$ stabil unter Stoppen, so bezeichnet $\mathcal{C}_{loc}$ die Klasse aller Prozesse X auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, welche <u>lokal zur Klasse $\mathcal{C}$</u> gehören, d.h.:

zu X gibt es eine aufsteigende Folge $(T_n)_n$ von $\mathbb{F}$-SZ so daß $\lim_n T_n = \infty$ P-fs und

$X^{T_n} \in \mathcal{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$(T_n)_n$ heißt dann <u>lokalisierende Folge für X</u>.

4.14' Bem: Ist $X \in \mathcal{C}_{loc}$ und sind $(T_n)_n$, $(\tilde{T}_n)_n$ lokalisierende Folgen für X, so sind auch

$$(T_n \wedge \tilde{T}_n)_n\ ,\ (T_n \wedge n)_n$$

lokalisierende Folgen für X, wegen 4.14 a).

4.15 Satz/Def: Die Klasse der <u>vorhersehbaren beschränkten Prozesse</u> ist stabil unter Stoppen. Ein Prozeß X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{F}, P)$ heißt <u>vorhersehbar und lokal beschränkt</u> falls X vhs und

$\exists$ $\mathbb{F}$-St $T_n \uparrow \infty$ (P-f.s.) so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$:
X^{T_n} ist (vhs und) beschränkt

<u>Bew:</u> Ist $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ $\mathbb{F}$-vhs, T bel. $\mathbb{F}$-St, so

$$Y^T = \underbrace{Y \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}}_{\text{vhs}} + \underbrace{\underset{\mathcal{F}_{T-}\text{-mb}}{Y_T} \cdot \mathbb{1}_{]\!]T,\infty[\![}}_{\text{vhs}}$$

vorhersehbar (2.4, 2.23, 2.25). □

4.16 Satz/Def: Die Klassen $\mathcal{M}^2$ und $\mathcal{M}^{2,c}$ ($\rightarrow$ 4.1) sind stabil unter Stoppen. $\mathcal{M}^2_{loc}$ (bzw $\mathcal{M}^{2,c}_{loc}$) ist die Klasse aller Prozesse X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{F}, P)$ mit Eigenschaft

$\exists$ $\mathbb{F}$-St $T_n \uparrow \infty$ (P-f.s.) so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$:
$X^{T_n} \in \mathcal{M}^2$ (bzw: $\in \mathcal{M}^{2,c}$).

Ein <u>lokales Martingal</u> ist ein Prozeß X so daß für $(T_n)_n$ wie oben gilt

X^{T_n} ist Martingal, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bew:</u> Die Klasse aller $(P, \mathbb{F})$-Martingale ist stabil unter Stoppen nach 3.14; für $M \in \mathcal{M}^2$ gilt für jede $\mathbb{F}$-St

$$\sup_{t\geq 0} E((M_t^T)^2) \leq E(\sup_{t\geq 0} M^2_{T\wedge t}) \leq E(\sup_{t\geq 0} M_t^2) \leq 4E(M_\infty^2).$$

12.6.20

Damit sind $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{M}^{2,c}$ stabil unter Stoppen. □

4.17 Satz: Zu $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ gibt es (bis auf P-Ununterscheidb.) genau einen $\mathbb{F}$-vorhersehbaren wachsenden Prozeß V so daß

$$M^2 - V \quad \text{ist ein lokales } (P,\mathbb{F})\text{-Martingal.}$$

Nenne V Meyerprozeß/Spitzklammerprozeß zu M, schreibe $\langle M \rangle$.

Bew: Sei $(T_n)_n$ eine lokalisierende Folge für M:

$$M^{T_n} \in \mathcal{M}^2, \ \forall n; \quad T_n \uparrow \infty, \ P\text{-f.s.}$$

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach 3.22+3.23 genau einen (b.a.U.) vhs wachsenden Prozeß V^n so daß

$$(M^{T_n})^2 - V^n \quad \text{ist Martingal};$$

dabei können Pfade von V^n als konstant auf $[\![T_n,\infty[\![$ festgelegt werden, und es gilt

$$E((V^n)_{T_n}) = E(M^2_{T_n}) < \infty \quad \forall n.$$

Wegen Eindeutigkeit aller $(V^n)_n$ muß gelten

$$(V^n)^{T_{n-1}} = V^{(n-1)} \quad \text{wegen} \quad (M^{T_n})^{T_{n-1}} = M^{T_{n-1}}.$$

Also leistet

$$V := \sum_{n\geq 1} (V^n - V^{(n-1)}) = \sum_{n\geq 1} (V^n - V^{(n-1)}) \underbrace{1_{[\![T_{n-1},\infty[\![}}_{\in \mathcal{P}(\mathbb{F})}$$

das gewünschte (üblicher Typ: durch Abänderung der Pfade auf der P-Nullmenge $\{\sup_n T_n < \infty\}$ sind alle Pfade càdlàg). □

<u>4.18 Def:</u> Für $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ def $L^2_{loc}(M)$ als Klasse aller vorhersehbaren Prozesse $H = (H_t)_{t \geq 0}$ mit Eigenschaft:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{es ex. eine lokalisierende Folge } (T_n)_n \text{ für } M \\ \text{so daß gilt:} \quad \begin{array}{l} M^{T_n} \in \mathcal{M}^2 \ \forall n \quad (T_n \uparrow \infty \ P\text{-f.s.}) \\ H \in L^2(M^{T_n}) \ \forall n. \end{array} \end{array} \right.$$

<u>4.19 Satz:</u> Ist $H = (H_t)_{t \geq 0}$ vorhersehbar und lokal beschränkt, so $H \in L^2_{loc}(M)$ für jedes $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$.

<u>Bew:</u> 4.15: es ex Folge $T_n^{(1)} \uparrow \infty$ (P-f.s.) so daß $H^{T_n^{(1)}}$ beschränkt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$(+) \qquad \left| H(s \wedge T_n^{(1)}(\omega), \omega) \right| \leq : C_n \quad \forall (s,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega .$$

Sei $T_n^{(2)} \uparrow \infty$ (P-f.s.) so daß $M^{T_n^{(2)}} \in \mathcal{M}^2$ für jedes n.
Setze $T_n := T_n^{(1)} \wedge T_n^{(2)}$; dann gilt $T_n \uparrow \infty$ P-f.s.
Da $\mathcal{M}^2$ stabil unter Stoppen, gilt $M^{T_n} \in \mathcal{M}^2$, und für das Doléansmaß $\lambda_{(M^{T_n})^2}$ gilt (3.12c), 3.22)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{(M^{T_n})^2}(]\!]0, T_n]\!]) = E(M^2_{T_n} - M^2_0) < \infty \\ \lambda_{(M^{T_n})^2}(]\!]T_n, \infty[\![) = 0 . \end{array} \right.$$

wegen (+) ist H auf $[\![0,T_n]\!]$ wieder beschränkt:

$$\lambda_{(M^{T_n})^2}(H^2) \le C_n^2 \cdot \lambda_{(M^{T_n})^2}([\![0,T_n]\!]) < \infty.$$

$\square$

4.20 Hauptsatz: Sei $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$.

a) Dann gibt es (bis auf P-Ununterscheidbarkeit) genau einen Prozess

$$(\diamond) \qquad I(H) = \int H\,dM \quad \in \mathcal{M}^2_{loc}$$

mit der Eigenschaft

ist $(T_n)_n$ eine lokalisierende Folge für M so daß $H \in L^2(M^{T_n})$ für jedes n, so gilt für jedes n:

$$(I(H))^{T_n} = \int H\,d(M^{T_n}) = \int H 1_{]\!]0,T_n]\!]}\,dM$$

Nenne $(\diamond)$ das stoch. Integral von H bzgl. M.

b) $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc} \Rightarrow \int H\,dM \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$.

c) 'Stoppaussagen' aus 4.13' bleiben gültig.

Bew: 'durch Zusammenkleben' mittels

$$\int H 1_{]\!]T_{n-1},T_n]\!]}\,dM = \int H\,d(M^{T_n} - M^{T_{n-1}}) = \int H\,d(M^{T_n}) - \int H\,d(M^{T_{n-1}}).$$

$\square$

2.20' Bsp/Ausblick: Wozu braucht man 'allgemeine' stoch. Int. $\int H\,dM$, $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $H \in L^2_{loc}(M)$?

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, übl. Hyp., sei gegeben

- $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ (z.B. Summe aus BB und Mischungen kompensierter Poissonprozesse incl. Skalierung)
- beschränkte vorhersehbare Prozesse $a = (a_t)_{t \geq 0}$, $b = (b_t)_{t \geq 0}$, a nichtnegativ, b strikt positiv

Man sucht einen $\mathbb{F}$-adaptierten Prozess $\xi = (\xi_t)_{t \geq 0}$ Lösung von

$$(*) \quad d\xi_s = (a_s - b_s \xi_s)\,ds + dM_s, \quad s \geq 0$$

(Abklingen des gegenwärtigen Zustandes z.Zt s mit zufallsabhängiger Rate b_s, zufälliger Input mit Rate a_s, dazu Martingalfluktuation dM_s) bzw in Integraldarstellung

$$(**) \quad \xi_t = \xi_0 + \int_0^t (a_s - b_s \xi_s)\,ds + (M_t - M_0), \quad t \geq 0.$$

Ansatz zur Lösung von $(*)$ bzw $(**)$: Akkumulieren von Input z.Zt s / Abklingen über $]s,t]$ liefert Ansatz für Lösung (Verifikation i.a.R. mit Itô-Formel, s.u. Kap. VI):

$$\xi_t = \underbrace{\xi_0}_{\text{Start-wert}} \underbrace{e^{-\int_0^t b_v dv}}_{\text{Abklingen über }]0,t]} + \int_0^t \underbrace{e^{-\int_s^t b_v dv}}_{\text{Abklingen über }]s,t]} \underbrace{(a_s ds + dM_s)}_{\text{Input zur Zeit } s}$$

bzw mit

$$B_s := \int_0^s b_v dv \ , \ s \geq 0 :$$

$$\xi_t = e^{-B_t} \left\{ \xi_0 + \int_0^t e^{+B_s} a_s ds + \int_0^t e^{+B_s} dM_s \right\}$$

Das möchte man lieber, doch braucht man

$$H = (H_s)_{s \geq 0} \in L^2_{loc}(M)$$

(hier: vorhersehbar u. lokal beschr.: $H_s = e^{+B_s}$)

$$M = (M_s)_{s \geq 0} \in \mathcal{M}^2_{loc}$$

(z.B.: Summe aus BB und komp. Poissonlösungen)

und muß Integralen $\int H dM$ einen Sinn geben, was i.a. nicht pfadweise möglich ist (einfach sind nur die Riemann-Stieltjes-Integrale $B_s = \int_0^s b_v dv$, $\int_0^t e^{+B_s} a_s ds$!)

Spezialfall $a_s \equiv a$, $b_s \equiv b$ deterministisch ; $M = 6 \cdot B$ ergibt Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

$$\xi_t = e^{-bt} \left\{ \xi_0 + a \cdot \int_0^t e^{bs} ds + 6 \cdot \int_0^t e^{bs} dB_s \right\}$$

als Lösung der SDE

$$d\xi_s = (a - b\xi_s) ds + 6 \, dB_s \ , \ s \geq 0 .$$

brauche einfache Beschreibung des Integranden in 4.20:

4.21 Def: Ein $\mathbb{F}$-wachsender Prozess $V = (V_t)_{t\geq 0}$ ($\to$3.17) heißt integrabel falls

$$\sup_{t\geq 0} V_t \in \mathcal{L}^1(P).$$

Schreibe

$\mathcal{A} :=$ Klasse aller $\mathbb{F}$-vorhersehbaren wachsenden integrablen Proz.

und $\mathcal{A}_{loc}$ für Klasse aller $\mathbb{F}$-vhs wachsenden Prozesse, welche lokal zu $\mathcal{A}$ gehören.

4.22 Satz: Sei $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ mit Meyerprozess $\langle M \rangle$ (4.17), sei H vorhersehbar. Dann gleichwertig:

i) $H \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$

ii) $\int H^2 \, d\langle M \rangle \in \mathcal{A}_{loc}$.

Bew: ii) ist äquivalent zur Existenz einer aufsteigenden Folge von $\mathbb{F}$-SZ mit $\lim_n T_n = \infty$ P-f.s. und

$$\forall n: \left(\int H^2 \, d\langle M \rangle\right)^{T_n} \in \mathcal{A},$$

d.h.

$$\forall n: E\left(\left(\int H^2 \, d\langle M \rangle\right)_{T_n}\right) < \infty.$$

wegen

$$\left(\int H^2 \, d\langle M \rangle\right)^{T_n} = \int H^2 1_{[\![0,T_n]\!]} \, d\langle M \rangle = \int H^2 \, d\left(\langle M^{T_n} \rangle\right)$$

ist dies nach 4.18 und 4.6' äquivalent zu

$$\forall n: H \in \mathcal{L}^2(M^{T_n})$$

und also zu

$$H \in \mathcal{L}^2_{loc}(M). \qquad \square$$

4.23 Bsp: a) Mit Schreibweise id für det. Proz. $(t)_{t\geq 0}$ wie in 3.24:

i) B SBB: Kompensator von B^2 ist id;

$$\langle B\rangle = id.$$

ii) N Poissonprozeß m. Par. $\lambda>0$, $M := (N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$:
Kompensator von M^2 ist $\lambda \cdot id$

$$\langle M\rangle = \lambda \cdot id.$$

Für vorhersehbare Prozesse H ist also die Bedingung

$$(*) \qquad \int H_s^2\, ds = \left(\int_0^t H_s^2\, ds\right)_{t\geq 0} \in \mathcal{A}_{loc}$$

hinreichend und notwendig für

$$H \in \mathcal{L}^2_{loc}(B) \text{ und } H \in \mathcal{L}^2_{loc}(M).$$

(→ 3.24, 4.13", 4.21).

b) Ist $t \to \int_0^t H_s^2\, ds$ ein wachsender Prozeß mit stetigen Pfaden (d.h. nichtexplodierend), so gilt $(*)$. Eine lokalisierende Folge erhält man z.B. durch

$$T_n := \inf\{t>0 : \int_0^t H_s^2\, ds > n\} \wedge n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

$(*)$ gilt insbesondere falls H vorhersehbar u. lokal beschr., 4.15.

c) ein Gegenbeispiel: für ξ, beschränkt $\mathcal{F}_0$-meßbar betrachte

$$H_s := \begin{cases} 1 & s\geq 1 \\ \xi \cdot \sqrt{\frac{1}{1-s}} & 0\leq s<1 \end{cases}$$

vhs, $(*)$ verletzt. □