Reinhard Höpfner, VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

June 18, 2020

Kap. V : Vorhersehbare quadratische Kovariation

Kap. V Vorhersehbare quadrat. Kovariation

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, übl. Hyp. Ziel des Kap. ist der Beweis der folgenden drei Sätze:

5.1 Satz: Zu $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$ gibt es bis auf P-Ununterscheidbarkeit genau einen $\mathbb{F}$-vorhersehbaren BV-Prozeß $(\to 3.17, 3.20)$ $V = (V_t)_{t \geq 0}$ so daß gilt

$$MN - V \quad \text{ist ein lokales } (P,\mathbb{F})\text{-Martingal.}$$

V ist gegeben durch

$$V_t = \left\langle \frac{M+N}{2} \right\rangle_t - \left\langle \frac{M-N}{2} \right\rangle_t, \quad t \geq 0.$$

5.2 Def: Nenne den (b.a.u. eindeutigen) Prozeß V aus 5.1 die vorhersehbare quadratische Kovariation zwischen M und N, Schreibweise $\langle M, N \rangle := V$.

5.3 Bem: Entsprechend heißt der Meyerprozeß $\langle M \rangle$ von M auch vorhersehbare quadratische Variation von $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$.

<u>5.4 Satz:</u> Für $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $H \in L^2_{loc}(M)$, $K \in L^2_{loc}(N)$:

$$\left\langle \int H\,dM, \int K\,dN \right\rangle = \int HK\,d\langle M,N\rangle$$

(Gleichheit zwischen <u>Prozessen</u>, b.a. P-Ununterscheidbarkeit)

Insbes. gilt dann mit $K \equiv 1$

$$\left\langle \int H\,dM, N \right\rangle = \int H\,d\langle M,N\rangle.$$

<u>5.5 Charakterisierungssatz:</u> Für $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $H \in L^2_{loc}(M)$ ist

$$X := \int H\,dM \in \mathcal{M}^2_{loc}$$

charakterisiert als der (b.a.U.) <u>einzige</u> Prozess $\hat{X} \in \mathcal{M}^2_{loc}$ mit der Eigenschaften

(*) $\quad \hat{X}_0 \equiv 0$, $\langle \hat{X}, N \rangle = \int H\,d\langle M,N\rangle$ für <u>alle</u> $N \in \mathcal{M}^2_{loc}$.

<u>Rest des Kap.:</u> Beweise zu 5.1, 5.4, 5.5, plus einige damit zusammenhängende Resultate.

5.6 Def: Eine càdlàg-Funktion $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt **BV-Funktion** (von beschränkter Variation über endliche Intervalle) falls:

$$|||f|||_t := \sup_{\substack{\text{Partitionen von } [0,t] \\ 0=t_0<\dots<t_\ell=t,\ \ell\in\mathbb{N}}} \sum_{j=1}^{\ell} |f(t_j)-f(t_{j-1})| < \infty$$

für alle $0<t<\infty$.

5.7 Bem.: Eine BV-Fkt $V: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $V(0)=0$ kann als Differenz zweier nicht-fallender càdlàg-Fkt a, b geschrieben werden

$$V = a - b, \quad a(0)=b(0)=0.$$

Eine 'minimale' Darstellung ist $a := |||V|||$, $b := |||V||| - V$.
Ist V stetig, so auch $|||V|||$.
In Lebesgue-Stieltjes-Integralen darf abgeschätzt werden

$$|dV_s| \le da_s + db_s.$$

Ref: Brémaud, App. A4 über Lebesgue-Stieltjes-Integrale.

Liefern an dieser Stelle den Bew. von Satz 3.21 nach:

5.8 Lemma ($\to$ 3.21): Ist Y mit $Y_0=0$ zugleich lokales Martingal und vorhersehbarer BV-Prozess, so gilt

$$Y = 0 \quad \text{bis auf } P\text{-Ununterscheidbarkeit.}$$

Bew: 1) Nach Lokalisierung mit $(\tau_n)_n$ ist Y^{τ_n} zugleich cadlag-Martingal und vorhersehbarer BV-Prozeß, $\forall n$. Nach 3.15 ist Y^{τ_n} daher stetig, $\forall n$. Also Y stetig.

2) Für Y stetig, lokales Mart., vhs BV-Prozeß zeige

$$Y = 0 \quad (\text{b.a.U.})$$

Bew: Mit Y ist $|||Y|||$ stetig (5.7) und $\mathbb{F}$-adaptiert, also $\mathbb{F}$-vorhersehbar, daher

(*) $\quad Y, \; |||Y|||, \; |||Y||| - Y$ sind vhs

(**) $\quad |||Y|||, \; |||Y||| - Y$ sind vhs wachsende Prozesse.

Betr. Stoppzeiten

$$\tau^n := \inf\{t > 0 : |||Y|||_t > n\}$$

dann sind alle drei Prozesse in (*) beschränkt auf $[\![0, \tau^n]\!]$ (beachte $Y_0 \equiv 0$, Y stetig), dabei insbesondere

$|||Y|||^{\tau_n}$ ist Submartingal von Kl. [LD]

Y^{τ_n} ist Martingal.

Schreibe V für den Kompensator von $|||Y|||^{\tau_n}$ nach 3.18: V ist der (b.a.U.) einzige vhs wachsende Prozeß s.d.

(1) $\quad |||Y|||^{\tau_n} - V$ ist Martingal.

Da $|||Y|||^{\tau_n}$ vorhersehbar und wachsend, kompensiert es sich selbst:

(2) $$|||Y|||^{T_n} = V$$

bis auf P-Ununterscheidbarkeit. Nach (**) ist aber auch

(3) $$A := |||Y|||^{T_n} - Y^{T_n}$$

ein vorhersehbarer wachsender Prozess, und es gilt

(4) $$|||Y|||^{T_n} - A = Y^{T_n}$$ ist Martingal.

Vergleich von (1)+(4) ergibt

$$V = A \quad \text{(b.a.U.)}$$

und (2)+(3) ergeben dann

$$Y^{T_n} = 0 \quad \text{(b.a.U.)}.$$

Nach Def. von $(T_n)_n$ gilt $T_n \uparrow \infty$ auf ganz Ω, damit

$$Y = 0$$

bis auf P-Ununterscheidbarkeit. □

Lemma 5.3 ist entscheidend für die Eindeutigkeitsaussage in Satz 5.1

5.9 Bew. von Satz 5.1: 1) Existenz: für $M, N \in \mathcal{M}^c_{loc}$ schreibe

$$MN = \left(\frac{M+N}{2}\right)^2 - \left(\frac{M-N}{2}\right)^2$$

und kompensiere separat: dann ist

$$V := \left\langle \frac{M+N}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{M-N}{2} \right\rangle$$

ein stet. BV-Prozeß mit der Eigenschaft

(+) $\quad MN - V$ ist lokales Martingal.

2) Eindeutigkeit: Sind V_1, V_2 verschiedene Feste. stet. BV-Prozesse mit (+), so

$V_1 - V_2$ ist stet. BV Proz. und lokales Martingal.

5.3: $V_1 - V_2 = 0$ b.a.U. □

Damit ist Satz 5.1 bewiesen. □

<u>5.10 Bem:</u> Die vorhersehbare quadratische Kovariation

$$\langle M, N \rangle \; : \; M \in \mathcal{M}^2_{loc},\ N \in \mathcal{M}^2_{loc}$$

ist bilinear.

<u>Bew:</u> $V := \langle M_1 + M_2, N \rangle$ kompensiert $(M_1+M_2) \cdot N = M_1 \cdot N + M_2 N$, also $V = \langle M_1, N \rangle + \langle M_2, N \rangle$ b.a.U. wieder mit der Eindeutigkeitsaussage von Lemma 5.3. □

Wdh I: <u>signiertes Maß</u> auf einer σ-Alg. bedeutet Differenz zweier σ-endlicher Maße.

5.11 Def: Zu $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$ wird durch

$$\lambda_{M,N}(A) := E\Big(\int_0^\infty (1_A)_s \, d\langle M,N\rangle_s\Big), \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

ein signiertes Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ definiert. Nenne auch $\lambda_{M,N}$ ein Doléansmaß.

5.11' Bem: Betr. Folgen $(M^{i,n})_n \in \mathcal{M}^2$, $i=1,2$: aus

$$M^{i,n} \to 0 \text{ in } \mathcal{M}^2, \quad i=1,2$$

für $n \to \infty$ folgt

$$\sup_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})} \big| \lambda_{M^{1,n},M^{2,n}}(A) \big| \xrightarrow{n\to\infty} 0 .$$

Bew: Für $A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ gilt nach 5.11 und 5.7

$$\big|\lambda_{M^{1,n},M^{2,n}}(A)\big|$$

$$\le E\Big(\int_0^\infty (1_A)_s \, d\Big\langle \frac{M^{1,n}+M^{2,n}}{2}\Big\rangle_s\Big) + E\Big(\int_0^\infty (1_A)_s \, d\Big\langle \frac{M^{1,n}-M^{2,n}}{2}\Big\rangle_s\Big)$$

$$\le E\Big(\Big\langle \frac{M^{1,n}+M^{2,n}}{2}\Big\rangle_\infty\Big) + E\Big(\Big\langle \frac{M^{1,n}-M^{2,n}}{2}\Big\rangle_\infty\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big\{ E\big((M^{1,n}+M^{2,n})^2_\infty\big) + E\big((M^{1,n}-M^{2,n})^2_\infty\big)\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ E\big((M^{1,n})^2_\infty\big) + E\big((M^{2,n})^2_\infty\big)\Big\}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

wegen Voraussetzung $M^{i,n} \to 0$ in $\mathcal{M}^2$. $\square$