Nächstes Ziel ist der Beweis des Satzes

<u>5.12 Satz:</u> Seien $M, N \in \mathcal{M}^2_{loc}$, $H \in L^2_{loc}(M)$, $K \in L^2_{loc}(N)$.

Dann stimmen

$$d\lambda_{I_M(H)\cdot I_N(K)} = HK\, d\lambda_{M\cdot N}$$

17.6.20

als signierte Maße auf $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}(\mathcal{F}))$ überein.

<u>Vorbem:</u> nach 5.11 arbeiten diese auf $(\mathbb{R}^+\times\Omega, \mathcal{P}(\mathcal{F}))$ als

$$d\lambda_{I_M(H)\cdot I_N(K)}(\omega, s) = P(d\omega) \langle I_M(H), I_N(K)\rangle(\omega, ds)$$

$$[HK\, d\lambda_{M\cdot N}](\omega, s) = P(d\omega)\, H_s(\omega) K_s(\omega) \langle M, N\rangle(\omega, ds)$$

<u>Bew.:</u> 1) Lokalisation: reicht Beweis im Fall

(*) $\quad M, N \in \mathcal{M}^2$, $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(N)$.

Unter (*) sind wie im Bew. von 5.9

$$\lambda_{M\cdot N} = \lambda_{\left(\frac{M+N}{2}\right)^2} - \lambda_{\left(\frac{M-N}{2}\right)^2}$$

$$\lambda_{I_M(H)\cdot I_N(K)} = \ldots$$

Differenzen von <u>endlichen</u> Maßen auf $(\mathbb{R}^+\times\Omega, \mathcal{P}(\mathcal{F}))$.

2) Unter (x) genügt zu zeigen:

(o) $$\lambda_{I_M(H)\cdot I_N(K)}(R) = \int_{\mathbb{R}\times\Omega} 1_R \; HK \; d\lambda_{M\cdot N}$$

für alle vhs $R \in R \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$ (denn: $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ bildet einen $\cap$-stab. Erzeuger von $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, man betrachte endliche Mengen, bzw. Differenzen endl. Mengen). Nach Def. in 5.11 ist (o) äquivalent zu

(oo) $$\begin{cases} E\left(\int_0^\infty (1_R)_s \, d\langle I_M(H), I_N(K)\rangle_s\right) \\ \quad = E\left(\int_0^\infty (1_R)_s \, H_s K_s \, d\langle M,N\rangle_s\right) \end{cases}$$

für alle vhs $R \in R \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$. $R \in$ der Form $[0]\times F$, $F \in \mathcal{F}_0$ erhalten Maß gleich 0 unter allen Doléansmaßen, bleibt zu betrachten

(ooo) $$R = 1_F \, 1_{]r_1, r_2]} \qquad F \in \mathcal{F}_{r_1}, \; r_1 < r_2 .$$

3) Weise (o)–(ooo) zuerst nach für hinreichend einfache vhs Integranden H, K in $\int H dM$, $\int K dN$ nach: betrachte

$$H := 1_A \, 1_{]u,\infty[} \; , \quad A \in \mathcal{F}_u$$

$$K := 1_B \, 1_{]v,\infty[} \; , \quad B \in \mathcal{F}_v .$$

Für diese ist

$$(1_R H K)(s,\omega) = 1_{\underbrace{F\cap A\cap B}_{\in \mathcal{F}_{\max(r_1,u,v)}}}(\omega) \; 1_{]\max(r_1,u,v),\, r_2]}(s)$$

des Indikator eines vorhersehbaren Rechteckes (oder $=\emptyset$), also

$$\text{r.h.s in } (00) = E\left(1_{\tilde{F}} \left(\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_{\tilde{r}} \right) \right)$$

für $\tilde{r} := \max(r_1,u,v)$ und $\tilde{F} := F\cap A\cap B \in \mathcal{F}_{\tilde{r}}$ falls $\tilde{r}<t$, und $\;--- = 0\;$ sonst.

Die einfache Form von H, K ergibt aber auch

$$I_M(H) = 1_A\,(M-M^u)\,1_{]u,\infty[} = H\cdot(M-M^u)$$

$$I_N(K) = 1_B\,(N-N^v)\,1_{]v,\infty[} = K\cdot(N-N^v)$$

so gilt

$$d\langle I_M(H), I_N(K)\rangle = \underbrace{H\,K\,1_{]\max(u,v),\infty[}}_{=HK}\, d\langle M,N\rangle$$

und folglich auch

$$\text{l.h.s in } (00) = E\left(\int_0^\infty (1_F HK)_s \, d\langle M,N\rangle_s \right)$$

$$\overset{\text{s.o.}}{=} E\left(1_{\tilde{F}} \left(\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_{\tilde{r}} \right) \right)$$

mit Notationen $\tilde{r} = \max(r_1,u,v)$ und $\tilde{F} = F\cap A\cap B \in \mathcal{F}_{\tilde{r}}$ wie oben falls $\tilde{r}<t$, und $\;-- = 0\;$ sonst.

Gezeigt ist (0) – (000) für die einfachen Integranden

$$H = 1_A 1_{]u,\infty[},\ A\in\mathcal{F}_u,\quad K = 1_B 1_{]v,\infty[},\ B\in\mathcal{F}_v.$$

4) Linearität von $H\to I_M(H)$, $K \to I_N(K)$ sowie Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ($\to$ 5.10):

man hat dann auch (o)–(ooo) für die Integranden

$$H = 1_A 1_{]u,\tilde{u}]}, \quad A \in \mathcal{F}_u, \; u < \tilde{u}$$

$$K = 1_B 1_{]v,\tilde{v}]}, \quad B \in \mathcal{F}_v, \; v < \tilde{v}$$

und damit für endl. gewichtete Summen

$$(+) \qquad H = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i 1_{R_i}, \quad R_i \in \mathcal{R}(\mathbb{F}),$$

$$(++) \qquad K = \sum_{j=1}^{m} \beta_j 1_{R_j}, \quad R_j \in \mathcal{R}(\mathbb{F}).$$

Beachte: wegen $M, N \in \mathcal{M}^2$ hat man isometrisch

$$L^2(M) \ni H \longrightarrow I_M(H) \text{ in } \mathcal{M}^2$$

$$L^2(N) \ni K \longrightarrow I_N(K) \text{ in } \mathcal{M}^2,$$

Elementarprozesse (+) liegen dicht in $\mathcal{E}$ und damit in $L^2(M)$

Elementarprozesse (++) —— " —— und damit in $L^2(N)$

so dass Bilinearität und Stetigkeit (→ 5.10, 5.11') in (oo) den Beweis von Satz 5.12 abschließen. □

5.13 Folgerungen: für M, N, K, H wie in 5.12:

$$\left\langle \int H\,dM, \int K\,dN \right\rangle = \int HK\, d\langle M,N\rangle$$

$$\left\langle \int H\,dM \right\rangle = \int H^2\, d\langle M\rangle$$

(Gleichheit von rcll BV-Prozessen / rcll wachsenden Prozessen b. a. U.)

Bew: 5.12 und Darstellung des Doléans-Maßes gemäß 5.11: für $A \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ gilt

$$E\left(\int_0^\infty (1_A)_s \, d\langle I_M(H), I_N(K)\rangle_s \right)$$

$$= E\left(\int_0^\infty (1_A)_s \, H_s K_s \, d\langle M,N\rangle_s \right)$$

$$= E\left(\int_0^\infty (1_A)_s \, d\left(\int_0^\cdot HK\, d\langle M,N\rangle \right) \right)$$

variieren von $A \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ liefert Gleichheit der vorhersehbaren Prozesse $\langle I_M(H), I_N(K)\rangle$ und $\int_0^\cdot HK\, d\langle M,N\rangle$ bis auf P-Ununterscheidbarkeit usw.. $\square$

5.14 Bew. von Satz 5.4: 5.13. $\square$

5.15 Folgerung: Für $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ und $H \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$ betrachte

$$N := \int H \, dM \quad \in \mathcal{M}^2_{loc}.$$

Für vorhersehbare Prozesse $K = (K_t)_{t \geq 0}$ gilt dann

$$(*) \qquad K \in \mathcal{L}^2_{loc}(N) \iff HK \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$$

und unter $(*)$

$$(**) \qquad \int K \, dN = \int HK \, dM.$$

Bew: 1) Lokalisation: $M \in \mathcal{M}^2$, $N \in \mathcal{M}^2$, $H \in \mathcal{L}^2(M)$, $K \in \mathcal{L}^2(N)$.

2) Nach 5.12 und 1) gilt (endliche Maße auf $\mathcal{P}(\mathcal{F})$)

$$d\lambda_{N^2} = d\lambda_{(I_M(H))^2} = H^2 \, d\lambda_{M^2}$$

und also für vorhersehbare Prozesse K

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} K^2 \, d\lambda_{N^2} < \infty \iff \int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} H^2 K^2 \, d\lambda_{M^2} < \infty.$$

Das zeigt

$$K \in \mathcal{L}^2(N) \iff HK \in \mathcal{L}^2(M)$$

und damit $(*)$.

3) Nachweis von $(**)$ via z. Approx. von H, K durch Elementarprozesse, ähnlich Bew. Schritte 3)-4) von 5.12. $\square$

5.16 Beweis des Charakterisierungssatzes 5.5: zz ist:

für $M \in \mathcal{M}^2_{loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$ ist

$$X = I_M(H) = \int H\,dM$$

das einzige Element $X \in \mathcal{M}^2_{loc}$ mit der Eigenschaft

$$X_0 \equiv 0, \quad \langle X, N\rangle = \int H\, d\langle M, N\rangle \text{ für } \underline{\text{alle}}\ N \in \mathcal{M}^2_{loc}.$$

Wegen 5.15 reicht Bew. der Eindeutigkeit. Sei $\tilde{X}$ ein anderes Element aus $\mathcal{M}^c_{loc}$ mit $\tilde{X}_0 \equiv 0$ und $\langle \tilde{X}, N\rangle = \int H\, d\langle M, N\rangle$ für alle $N \in \mathcal{M}^2_{loc}$. Bilinearität:

$$\langle X - \tilde{X}, N\rangle = 0 \quad \text{für alle } N \in \mathcal{M}^2_{loc}.$$

Insbesondere gilt dies für $N := X - \tilde{X}$, also

$$\langle X - \tilde{X}\rangle = 0.$$

Mit lokalisierender Folge $(T_n)_n$ für $X - \tilde{X}$: mit 4.2.i)

$$E\Big(\sup_t (X-\tilde{X})^2_{t \wedge T_n}\Big)$$

$$\le 4 \cdot E\big((X-\tilde{X})^2_{T_n}\big) = 4 \cdot E\big(\langle X - \tilde{X}\rangle_{T_n}\big) = 0$$

also $X = \tilde{X}$ auf $[0, T_n]$ b.a.U., $T_n \uparrow \infty$ P-f.s. $\square$

Zum Abschluss des Kap. zwei ergänzende Resultate:

5.17 HS: $M, N \in \mathcal{M}^{2,loc}$: für $0 \le s < t < \infty$ gilt

$$|||\langle M,N\rangle|||_t - |||\langle M,N\rangle|||_s \le \sqrt{\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s}\,\sqrt{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}$$

Bew: 1) zeige zuerst: $\forall\ 0 \le s < t < \infty$ gilt

$$(*1) \qquad |\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s| \le \sqrt{\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s}\,\sqrt{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}$$

Bew: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig betrachte den wachsenden Prozess $\langle M+\lambda N\rangle$: Bilinearität liefert

$$(*2) \qquad (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s) + 2\lambda(\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s) + \lambda^2(\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s) \ge 0$$

Ist $\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s = 0$, so $\langle M,N\rangle_t - \langle M,N\rangle_s = 0$ da $\lambda \in \mathbb{R}$ bel.

Falls $\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s > 0$, wähle

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s}{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}}\,;$$

dann $(*2) \Rightarrow (*1)$..

2) zeige mit $(*1)$ die Behauptung. Nach Def. der Totalvariation

$$|||\langle M,N\rangle|||_t - |||\langle M,N\rangle|||_s = \sup_{\substack{\pi \text{ Part. von }]s,t] \\ s=r_0<r_1<\dots<r_l=t}} \sum |\langle M,N\rangle_{r_i} - \langle M,N\rangle_{r_{i-1}}|$$

Aber $(*1)$ und CS $\left(\sum|a_i b_i| \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}\right)$ liefern für jedes π

$$\sum_\pi |\langle M,N\rangle_{r_i} - \langle M,N\rangle_{r_{i-1}}| \le \sum_\pi \sqrt{\langle M\rangle_{r_i} - \langle M\rangle_{r_{i-1}}}\,\sqrt{\langle N\rangle_{r_i} - \langle N\rangle_{r_{i-1}}}$$

$$\le \sqrt{\sum_\pi (\langle M\rangle_{r_i} - \langle M\rangle_{r_{i-1}})}\,\sqrt{\sum_\pi (\langle N\rangle_{r_i} - \langle N\rangle_{r_{i-1}})}$$

$$= \sqrt{\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s}\,\sqrt{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}. \qquad \square$$

5.18 Satz: $M, N \in \mathcal{M}_0^{2,loc}$: $|||\langle M,N\rangle|||$ ist lokal integrierbar.

Bew: Wähle gemeinsame lokalisierende Folge $(T_n)_n$ für M und N, dann mit 5.18

$$|||\langle M,N\rangle|||_{T_n} \le \underbrace{\sqrt{\langle M\rangle_{T_n}}}_{\in L^2(P)} \underbrace{\sqrt{\langle N\rangle_{T_n}}}_{\in L^2(P)}.$$

woraus mit Hölder ($\int |fg| \, dP \le \ldots$)

$$E(|||\langle M,N\rangle|||_{T_n}) \le \sqrt{E(\langle M\rangle_{T_n})} \sqrt{E(\langle N\rangle_{T_n})} < \infty.$$

□

19.6.20