Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Einige Übungsaufgaben zu den Kapiteln V und VI **June 22, 2020**

nach Korrektur eines Fehlers in der Aufgabenstellung 5.1 d) **July 9, 2020**

Aufgabe 5.1 : Auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien unabhängige Prozesse

$$B \text{ Standard-Brownsche Bewegung }, \ N \, , \ N^{(i)} \, , \ i \in I\!N \, , \text{ Standard-Poisson mit Parameter } \lambda$$

gegeben, mit dasselben $0 < \lambda < \infty$. T_n bezeichne die Zeit des n-ten Sprunges von N, $T_n^{(i)}$ die Zeit des n-ten Sprunges von $N^{(i)}$. Sei $I\!F$ eine Filtration in $\mathcal{A}$, so dass B und alle N, $N^{(i)}$ $I\!F$-adaptiert sind, unabhängige Zuwächse bezüglich $I\!F$ besitzen, und so dass die üblichen Hypothesen erfüllt sind. Sei $\{(\sigma_k^{(n)})_k : n \in I\!N\}$ ein Netz von $I\!F$-Stopzeiten für B, d.h. für jedes $n \in I\!N$ gilt

$$\sigma_0^{(n)} = 0 \quad , \quad \sigma_k^{(n)} = \inf\left\{ t > \sigma_{k-1}^{(n)} \; : \; \left| B_t - B_{\sigma_{k-1}^{(n)}} \right| > \frac{1}{n} \text{ oder } t - \sigma_{k-1}^{(n)} > \frac{1}{n} \right\} \; , \; k \in I\!N \; .$$

Betrachte

$$Y := (\, B_t + (N_t - \lambda t)\,)_{t \geq 0} \; ,$$

$$M^{(n)} := \left(1_{[[T_n, \infty[[}(t) - \int_0^t \lambda \, 1_{]]T_{n-1}, T_n]]}(s) \, ds \right)_{t \geq 0} \; ,$$

$$X^{(m)} := \left(B_t + \sum_{i=1}^{m} 2^{-i} \left(1_{[[T_1^{(i)}, \infty[[}(t) - \lambda(t \wedge T_1^{(i)}) \right) \right)_{t \geq 0} \; ,$$

$$X^{(\infty)} := \left(B_t + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \left(1_{[[T_1^{(i)}, \infty[[}(t) - \lambda(t \wedge T_1^{(i)}) \right) \right)_{t \geq 0} \; ;$$

sei X eine cadlag-Modifikation von $X^{(\infty)}$.

a) Für jedes $n \in I\!N$ gilt: $M^{(n)} \in \mathcal{M}^2$; $L^2(M^{(n)})$ ist die Klasse aller vorhersehbaren Prozesse $H = (H_t)_{t \geq 0}$ mit der Eigenschaft $E\left(\int_{T_{n-1}}^{T_n} H_s^2 \, ds \right) < \infty$.

b) Die Prozesse Y, $X^{(m)}$ und X sind in $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(P, I\!F)$.

c) $L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ ist die Klasse aller vorhersehbaren Prozesse H so dass $\int_0^{\bullet} H_s^2 \, ds \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$.

d) Zeige: für jedes $m < \infty$ und jedes $0 < t < \infty$ gilt

$$\left\langle X^{(m)} \right\rangle_t = t + \sum_{i=1}^{m} 2^{-2i} \, \lambda \, (t \wedge T_1^{(i)})$$

e) Zeige: für jedes $m < \infty$ und jedes $0 < t < \infty$ gilt P-stochastische Konvergenz für $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(X^{(m)}_{t \wedge \sigma_k^{(n)}} - X^{(m)}_{t \wedge \sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad t \, + \sum_{0<s\leq t} |(\Delta X^{(m)})_s|^2 \quad = \quad t \, + \sum_{i=1}^{m} 2^{-2i} \, 1_{\{T_1^{(i)} \leq t\}} \, .$$

f) Wie kann man mithilfe eines sehr elementaren Argumentes aus der Aussage a) einen Beweis für

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(X_{t \wedge \sigma_k^{(n)}} - X_{t \wedge \sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad t \, + \sum_{0<s\leq t} |(\Delta X)_s|^2 \quad \overset{\text{a.s.}}{=} \quad t \, + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i} \, 1_{\{T_1^{(i)} \leq t\}} \, .$$

herleiten?

Aufgabe 5.2 : Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 5.1 betrachte $M := (N - \lambda \, \mathrm{id}) \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(P, \mathbb{F})$. Man zeige, dass der Prozess der linken Limiten $(M_{s-})_{s\geq 0}$ zu $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ gehört (dazu gebe man eine lokalisierende Folge explizit an) und berechne

$$\int_0^t M_{s-} \, dM_s$$

für $0 < t < \infty$ beliebig aber fest (anzustreben ist ein Ausdruck in Form einer Funktion von M_t, N_t).

<u>Hinweis:</u> Man benutze (ohne dies separat zu beweisen), dass wegen der BV-Pfade von M das stochastische Integral $\int H_s \, dM_s$ für $H \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ als Stieltjes-Integral berechnet werden darf, und nutze die Formel zur partiellen Integration T2 im App. 4 von Brémaud (1981), pdf scan vom Freitag 19.06.20.

Aufgabe 5.3 : Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 5.1 betrachte $B \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(P, \mathbb{F})$. Dann gilt für stetige Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\int f(s) \, dB_s \, , \int g(s) \, dB_s \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}} \quad , \quad \left\langle \int f(s) \, dB_s \, , \int g(s) \, dB_s \right\rangle_t \; = \; \int_0^t f(s) g(s) \, ds \, .$$