Reinhard Höpfner, VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

June 25, 2020

Kap. VI Stetige Semimartingale, Ito-Formel

Kap. VI Stetige Semimartingale, Itô-Formel

Generalvoraussetzung: übl. Hyp. an $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$.

6.1 Def: Definiere in Verschärfung von 4.16 und 3.20

$\mathcal{M}_{loc}$:= Klasse aller stetigen lokalen $(P,\mathbb{F})$-Mart. mit $M_0 \equiv 0$

$\mathcal{V}^c_{loc}$:= Klasse aller stetigen $\mathbb{F}$-BV-Prozesse V mit $V_0 \equiv 0$

In diesem Rahmen ist die Notation

$$\mathcal{A}_{loc} := \{ V \in \mathcal{V}^c_{loc} : V \text{ ist wachsend} \}$$

konsistent mit 4.21 (alle stetige $\mathbb{F}$-wachsende Prozesse sind vorhersehbar und lokal integrabel).

6.1' Bem: Prozesse X in $\mathcal{M}_{loc}, \mathcal{V}^c_{loc}, \mathcal{A}_{loc}$ sind lokal beschränkt (wegen Stetigkeit und $X_0 \equiv 0$: betr. $\tau^n := \inf\{t>0 : |X_t| > n\}$), und $\mathcal{M}_{loc} = \{ X \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc} : X_0 \equiv 0 \}$.

6.2 Def: Schreibe $\mathcal{S}$ für die Klasse aller d-dim Prozesse

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^d \end{pmatrix} : \quad X^i = X^i_0 + M^i + A^i$$

mit $M^i \in \mathcal{M}_{loc}$ und $A^i \in \mathcal{V}_{loc}$, $1 \le i \le d$. Nenne X ein d-dim. stetiges Semimartingal bez. $(P, \mathbb{F})$:

6.3 Satz: In 6.2 sind für $1 \le i \le d$

lokaler Martingalteil M^i von X^i

vorhersehbarer BV-Teil A^i von X^i

eindeutig bestimmt, b.a.U.

Bew: Sind $X_0^i + M^i + A^i = X^i = X_0^i + \tilde{M}^i + \tilde{A}^i$ zwei Semimartingaldarstellungen desselben X, so ist

$$M^i - \tilde{M}^i = \tilde{A}^i - A^i$$

zugleich lokales Mart. und vhs BV-Prozeß: 5.3, 5 $\square$

6.4 Def: Sei $X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$. Nenne Netz für X

jedes doppelt indizierte System von $\mathbb{F}$-Stoppzeiten

$(\sigma^n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aufsteigend in k, $\sigma^n_0 \equiv 0$, $\sigma^n_k \uparrow \infty$ P-f.s. $k \to \infty$

welche für jedes n und alle i, j, k die Bedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \ge 0} \left| M^i_{t \wedge \sigma^n_{k+1}} - M^i_{t \wedge \sigma^n_k} \right| \le \frac{1}{n}, \\ |||A^i|||_{\sigma^n_{k+1}} - |||A^i|||_{\sigma^n_k} \le \frac{1}{n}, \\ |||\langle M^i, M^j \rangle|||_{\sigma^n_{k+1}} - |||\langle M^i, M^j \rangle|||_{\sigma^n_k} \le \frac{1}{n} \\ \sigma^n_{k+1} - \sigma^n_k \le \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

erfüllt. Ein solches existiert stets, da alle M^i, A^i, $\langle M^i, M^j \rangle$ stetig sind und in 0 starten ($\to$ 5.17), z.B.:

$$\sigma^n_{k+1} := \left(\sigma^n_k + \tfrac{1}{n}\right) \wedge \inf\Big\{ t > \sigma^n_k : \text{es ex. } 1 \le i \le \ell \text{ so daß} \\ |M^i_t - M^i_{\sigma^n_k}| > \tfrac{1}{n} \ \underline{\text{oder}}\ \langle M^i \rangle_t - \langle M^i \rangle_{\sigma^n_k} > \tfrac{1}{n} \ \underline{\text{oder}}\ |||A^i|||_t - |||A^i|||_{\sigma^n_k} > \tfrac{1}{n} \Big\}$$

6.5 Satz: Sei $X = X_0 + M + A$ ein stetiges Semimartingal, $d=1$. Ist $\{(\sigma^n_k)_k : n \in \mathbb{N}\}$ ein Netz für X, so gilt für $H = (H_t)_{t \geq 0}$ $\mathbb{F}$-adaptiert, linksstetig, lokal beschränkt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} H_{\sigma^n_{k-1}} \left(X_{t \wedge \sigma^n_k} - X_{t \wedge \sigma^n_{k-1}}\right)^2 \longrightarrow \int_0^t H_s \, d\langle M \rangle_s$$

P-stoch. für $n \to \infty$, für jedes feste $0 < t < \infty$.

Bew: A) Sei zuerst $M, |||A|||, \langle M \rangle, |H|$ beschränkt durch eine Konst $C < \infty$. Sei $0 < t < \infty$ fest.

1) Schreibe $y_k := \left(M_{t \wedge \sigma^n_k} - M_{t \wedge \sigma^n_{k-1}}\right)^2$ und zeige:

$$\xi_n := \sum_{k \in \mathbb{N}} y_k \quad \text{erfüllt} \quad \sup_n E(\xi_n^2) \leq 6 \cdot C^4.$$

Bew: Für Mart. N und $u < v$ gilt $(N_v - N_u)^2 = N_v^2 - N_u^2 - 2N_u(N_v - N_u)$, also

$$E\left(y_k \mid \mathcal{F}_{t \wedge \sigma^n_{k-1}}\right) = E\left(M^2_{t \wedge \sigma^n_k} - M^2_{t \wedge \sigma^n_{k-1}} \mid \mathcal{F}_{t \wedge \sigma^n_{k-1}}\right),$$

also wegen $M_0 = 0$

$$E\Big(\sum_l y_l\Big) \leq E(M_t^2) \leq C^2$$

$$E\Big(\sum_{l > k} y_l \mid \mathcal{F}_{t \wedge \sigma^n_k}\Big) = E\Big(\underbrace{M_t^2 - M^2_{t \wedge \sigma^n_k}}_{\leq M_t^2 \leq C^2} \mid \mathcal{F}_{t \wedge \sigma^n_k}\Big) \leq C^2.$$

wegen

$$\sum_{l,k} y_l y_k = \sum_k \underbrace{y_k^2}_{\leq (2C)^2 \cdot y_k} + 2 \sum_k y_k \underbrace{\sum_{l > k} y_l}_{E(\cdot \mid \mathcal{F}_{t \wedge \sigma^n_k}) \leq C^2}$$

folgt

$$E(\xi_n^2) \leq 6 \cdot C^2 \cdot E\Big(\sum_k y_k\Big) \leq 6 \cdot C^4.$$

2) Da H beschränkt und mit $y_k = (M_{t\wedge\sigma_k^n} - M_{t\wedge\sigma_{k-1}^n})^2$

$$E(y_k \mid \mathcal{F}_{t\wedge\sigma_{k-1}^n}) = E(\langle M\rangle_{t\wedge\sigma_k^n} - \langle M\rangle_{t\wedge\sigma_{k-1}^n} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\sigma_{k-1}^n})$$

wie in 1), ist

$$j_n := \sum_k H_{\sigma_{k-1}^n}\left(y_k - (\langle M\rangle_{t\wedge\sigma_k^n} - \langle M\rangle_{t\wedge\sigma_{k-1}^n})\right)$$

in $L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Wir zeigen

$$j_n \to 0 \quad \text{in } L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, P).$$

Bew: Schreibe kurz

$$\delta_k := \langle M_{t\wedge\sigma_k^n}\rangle - \langle M\rangle_{t\wedge\sigma_{k-1}^n}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Dann wie in Schritt 1)

$$(\ast) \qquad E(y_k - \delta_k \mid \mathcal{F}_{t\wedge\sigma_{k-1}^n}) = 0 \quad \forall k$$

also wegen Beschränktheit von H und $(\ast)$

$$(\ast\ast) \quad E(j_n^2) \le C^2 \cdot E\left(\sum_k (y_k - \delta_k)^2\right)$$

wobei nach Wahl der $(\sigma_k^n)_k$

$$y_k = (M_{t\wedge\sigma_k^n} - M_{t\wedge\sigma_{k-1}^n})^2 \le \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\delta_k = \langle M\rangle_{t\wedge\sigma_k^n} - \langle M\rangle_{t\wedge\sigma_{k-1}^n} \le \frac{1}{n}.$$

Also liefert $(\ast\ast)$ die Behauptung:

$$E(j_n^2) \le C^2 \cdot E\Big(\sum_k (\underbrace{y_k^2}_{\le \frac{1}{n^2}\cdot y_k} - \underbrace{2y_k\delta_k}_{\ge 0} + \underbrace{\delta_k^2}_{\le \frac{1}{n}\cdot\delta_k})\Big)$$

$$\le \frac{1}{n}\cdot C^2 \cdot \Big\{\underbrace{E(\sum_k y_k)}_{\overset{1)}{\le} E(M_t^2) \le C^2} + E(\underbrace{\sum_k \delta_k}_{= \langle M\rangle_t \le C})\Big\}$$

$$= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n\to\infty.$$

3) Für $u<v$ folgt aus der Zerlegungsdarstellung von X

$$(X_v - X_u)^2 = (M_v - M_u)^2 + (A_v - A_u)^2 + 2(M_v - M_u)(A_v - A_u)$$

folglich nach Wahl der $(\sigma^n_k)_k$ mit $y_k = (M_{t\wedge\sigma^n_k} - M_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})^2$:

$$\left|(X_{t\wedge\sigma^n_k} - X_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})^2 - y_k\right| \le \frac{3}{n}\left(|||A|||_{t\wedge\sigma^n_k} - |||A|||_{t\wedge\sigma^n_{k-1}}\right) \quad \forall k.$$

Wegen Beschränktheit von H folgt

$$(\diamond) \begin{cases} \sum_k H_{\sigma^n_{k-1}}(X_{t\wedge\sigma^n_k} - X_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})^2 \\ = \sum_k H_{\sigma^n_{k-1}}(M_{t\wedge\sigma^n_k} - M_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})^2 + \frac{3C}{n}|||A|||_t . \end{cases}$$

22.6.20

4) Approx. der linksstetigen beschränkten Prozeß H durch

$$H^n := \sum_k H_{\sigma^n_{k-1}} 1_{]\sigma^n_{k-1}, \sigma^n_k]}$$

punktweise auf $\mathbb{R}^+\times\Omega$. Dann $H^n, n\ge 1, H$ vorhersagbar und beschränkt durch C. Dominierte Konvergenz:

$$\sum_k H_{\sigma^n_{k-1}}(\langle M\rangle_{t\wedge\sigma^n_k} - \langle M\rangle_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})$$
$$= \int_0^t H^n_s \, d\langle M\rangle_s \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t H_s \, d\langle M\rangle_s$$

pfadweise in ω. Nach Schritt 2) gilt dann

$$\begin{cases} \sum_k H_{\sigma^n_{k-1}}(M_{t\wedge\sigma^n_k} - M_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})^2 = \sum_k H_{\sigma^n_k} y_k \\ \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^t H_s \, d\langle M\rangle_s \end{cases}$$

P-stochastisch. Wegen $(\diamond)$ ist damit die Beh. des Satzes unter der Beschränktheitsvoraussetzung aus A) bewiesen.

B) Für allg. $X = X_0 + M + A$ in $\mathcal{S}$ und H linksstetig und lokal beschränkt wähle $(S_m)_m$ lok. Folge für H (4.15), setze

$$T_m := \inf\{t > 0 : |M_t| > m \text{ oder } \langle M\rangle_t > m \text{ oder } |||A|||_t > m\} \wedge S_m$$

Dann $T_m \uparrow \infty$, und für jedes t fest und $\varepsilon > 0$ bel. klein existiert ein $m_0 = m_0(t, \varepsilon)$ so daß

$$P(T_m \le t) < \varepsilon \quad \forall m \geq m_0 .$$

Dann erfüllen

$$\hat{M} := M^{T_m}, \ \hat{A} := A^{T_m}, \ \hat{H} := H^{T_m}$$

die Beschränktheitsvoraussetzung aus A), und mit $\tilde{X} := X^{T_m}$

$$P\left(\left|\sum_k H_{\sigma^n_{k-1}}\left(X_{t\wedge\sigma^n_k} - X_{t\wedge\sigma^n_{k-1}}\right)^2 - \int_0^t H\,d\langle M\rangle\right| > \gamma\right)$$

$$\leq P(T_m \le t) +$$

$$+ P\left(\left|\sum_k \hat{H}_{\sigma^n_{k-1}}\left(\tilde{X}_{t\wedge\sigma^n_k} - \tilde{X}_{t\wedge\sigma^n_{k-1}}\right)^2 - \int_0^t \hat{H}\,d\langle\hat{M}\rangle\right| > \gamma\right)$$

und wegen A) ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

6.6 Folgerung: Zu $X \in \mathcal{S}$ ex. TF $(u_\ell)_\ell$ von $\mathbb{N}$ so daß

$$\left.\begin{array}{l} \sum_k \left(X_{t \wedge \sigma_k^{u_\ell}} - X_{t \wedge \sigma_{k-1}^{u_\ell}} \right)^2 \longrightarrow \langle M \rangle_t \\ P\text{-f.s. für } \ell \to \infty, \text{ für alle } t \in \mathbb{Q}^+. \end{array}\right\}$$

Bew: 6.5 mit $H \equiv 1$, übliches Teilfolgenarg. für stoch. Konv. □

Interpret: Im Sinne von 6.6 'kann $\langle M \rangle_\bullet$ aus $X_\bullet$ erzeugt werden', und der typische Pfad eines Semimartingals ist von endlicher quadratischer Variation.

6.7 Bem: Für Semimart. mit Sprüngen siehe Ikeda-Watanabe, Métivier, Jacod-Shiryaev: hier gilt

$$\sum_k \left(X_{t \wedge \sigma_{k+1}^n} - X_{t \wedge \sigma_k^n} \right)^2 \longrightarrow \langle M^c \rangle_t + \sum_{0 < s \leq t} |\Delta X_s|^2$$

wobei der stetige Martingalteil M^c von M (eind. best.) entsteht, indem dem Martingalteil von X im Sinne von 2.31 und 3.25 alle Sprünge kompensiert weggenommen werden (→ Métivier Thm 17.7, Kap. 18, Thm 20.5)

6.8 Satz: Sei $X = X_0 + M + A \in \mathcal{S}$, $d \geq 1$ bel.
Sei $\{(G^n_k)_k : n \in \mathbb{N}\}$ ein Netz für X.
Dann gilt für H linksstetig, $\mathcal{F}$-adapt., lokal beschränkt

$$\sum_k H_{G^n_{k-1}} (X^i_{t \wedge G^n_k} - X^i_{t \wedge G^n_{k-1}})(X^j_{t \wedge G^n_k} - X^j_{t \wedge G^n_{k-1}})$$

$$\longrightarrow \int_0^t H_s \, d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

P-stoch. für $n \to \infty$, für alle $1 \leq i, j \leq d$.

Bew: wie Beweis 6.6, beachte zusätzlich 5.18

$$|||\langle M^i, M^j \rangle|||_v - |||\langle M^i, M^j \rangle|||_u \leq \prod_{j=1}^{2} \sqrt{\langle M^\ell \rangle_v - \langle M^\ell \rangle_u}$$

für $u < v$. □

6.8' Folgerung: Sei $X = X_0 + M + A \in \mathcal{S}$, $d = 1$, sei Y ein stetiges Semimart. ohne stetigen Martingalteil: $Y = Y_0 + V$, $V \in \mathcal{V}^c_{loc}$. Dann mit Bez. wie oben

$$\sum_k (Y_{t \wedge G^n_k} - Y_{t \wedge G^n_{k-1}})^2 \longrightarrow 0$$

$$\sum_k H_{G^n_{k-1}} (X_{t \wedge G^n_k} - X_{t \wedge G^n_{k-1}})(Y_{t \wedge G^n_k} - Y_{t \wedge G^n_{k-1}}) \longrightarrow 0$$

P-stoch. für $n \to \infty$, $0 < t < \infty$ bel. Dies entspricht

$$\langle M, 0 \rangle = \left\langle \left(\frac{M+0}{2}\right)^2 - \left(\frac{M-0}{2}\right)^2 \right\rangle = 0 .$$