6.9 Hauptsatz (Itô-Formel für stetige Semimartingale)

Sei $X=(X_t)_{t\ge 0}$ ein d-dim. stetiges Semimartingal

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^d \end{pmatrix} : \quad X^i = X^i_0 + M^i + A^i , \quad 1 \le i \le d$$

mit $M^i \in \mathcal{M}_{loc}$, $A^i \in \mathcal{V}_{loc}$. Sei $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$-Fkt.

Dann ist

$$F(X) = \left(F(X_t) \right)_{t \ge 0}$$

ein stetiges Semimartingal, und es gilt

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i F(X_s)\, dM^i_s + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i F(X_s)\, dA^i_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t D_{ij} F(X_s)\, d\langle M^i, M^j \rangle_s$$

bis auf P-Ununterscheidbarkeit.

Bem: 1) Notation $D_i F := \frac{\partial F}{\partial x_i}$, $D_{ij} F := \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$.

2) Häufig schreibt man kurz

$$\int D_i F(X_s)\, dX^i_s := \int D_i F(X_s)\, dM^i_s + \int D_i F(X_s)\, dA^i_s .$$

3) Vgl: Ikeda-Watanabe (1989) S. 66f, Revuz-Yor (1991) S. 138, Karatzas-Shreve (1991) S. 153

Zusätzliche Terme bei Semimart. mit Sprüngen: Jacod-Shiryaev (1987) S. 57, Spezialfall der 'Itô-Semimartingale' in Ikeda-Watanabe!

Bew: A) Sei zuerst für alle i,j die Prozesse M^i, $|||A^i|||$, $\langle M^i, M^j\rangle$ beschränkt. Sei auch X_0^i beschränkt, damit X^i beschränkt (etwa durch $C<\infty$).

Dann wird $F\in\mathcal{C}^2$ nur auf $B_C(0)\subset\mathbb{R}^d$ gebraucht. Nach Abänderung von F auf dem Komplement von $B_{2C}(0)$ kann

$$F\in\mathcal{C}^2_K \quad (\mathcal{C}^2 \text{ mit kompaktem Träger})$$

angenommen werden.

1) Für $F\in\mathcal{C}^2_K$ sind $F, D_iF, D_{ij}F$ beschränkt und gleichmäßig stetig. Für $x\in\mathbb{R}^d$ und $h\in\mathbb{R}^d$ liefert Betr. von

Rudin S. 127 $$[0,\infty)\ni\lambda \longrightarrow G(\lambda):=F(x+\lambda h)\in\mathbb{R}$$

eine Entwicklung

$$F(x+h)-F(x)=\sum_{i=1}^d h_iD_iF(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d h_ih_jD_{ij}F(x+\vartheta h)$$

mit Zwischenstelle $\vartheta=\vartheta(x,h)\in(0,1)$, und damit Abschätzung (wegen glm. Stet. von $D_{ij}F$)

$$(+)\quad\left\{\begin{array}{l} \Big| F(x+h)-F(x) \\ \quad -\Big(\sum_{i=1}^d h_iD_iF(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d h_ih_jD_{ij}F(x)\Big)\Big| \le |h|^2\cdot\rho(h) \\ \text{mit } \lim_{h\to 0}\rho(h)=0, \quad \text{o.B.d.A. } \rho(\cdot) \text{ mon. wachsend.}\end{array}\right.$$

2) Sei nun $\{(\sigma_k^n)_k : n\in\mathbb{N}\}$ ein Netz für X. Wegen $X^i=X_0^i+M^i+A^i$ dann insbesondere

$$(++) \quad \max_{1\le i\le d} \ \sup_{\substack{t\ge 0\\ k\in\mathbb{N}}} \left| X^i_{t\wedge\sigma^n_k} - X^i_{t\wedge\sigma^n_{k-1}} \right| \le \frac{2}{n}$$

für jedes n, damit

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_k \left(F(X_{t\wedge\sigma^n_k}) - F(X_{t\wedge\sigma^n_{k-1}}) \right)$$

$$\overset{(+)}{=} \sum_{i=1}^d \sum_k \left(X^i_{t\wedge\sigma^n_k} - X^i_{t\wedge\sigma^n_{k-1}} \right) D_i F(X_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \sum_k \left(X^i_{t\wedge\sigma^n_k} - X^i_{t\wedge\sigma^n_{k-1}} \right)\left(X^j_{t\wedge\sigma^n_k} - X^j_{t\wedge\sigma^n_{k-1}} \right) D_{ij} F(X_{t\wedge\sigma^n_{k-1}})$$

$$+ R_n(t)$$

wobei $(R_n(t))_{t\ge 0}$ ein Prozess von Restgliedern mit der Eigenschaft

$$|R_n(t)| \le \sum_{i=1}^d \underbrace{\sum_k \left(X^i_{t\wedge\sigma^n_k} - X^i_{t\wedge\sigma^n_{k-1}} \right)^2}_{\xrightarrow{n\to\infty} \langle M^i \rangle_t \ P\text{-stoch., 6.5}} \ \underbrace{\rho\left(\frac{2}{n}\right)}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}$$

wegen (+) und (++), also

$$R_n(t) \longrightarrow 0 \quad P\text{-stochastisch } n\to\infty.$$

3) Wegen Stetigkeit der Pfade von X gilt für jedes $i = 1,\dots,d$ mit

$$H^n := \sum_k D_i F(X_{\sigma^n_{k-1}}) \, \mathbb{1}_{]\sigma^n_{k-1}, \sigma^n_k]}$$

$$H = \left(D_i F(X_t) \right)_{t\ge 0}$$

$$H^n \longrightarrow H \quad \text{punktweise auf } \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

und $|H^n|, |H| \le \tilde{C}$, $M^i \in \mathcal{M}^2$ (wg Beschr. von A))

$$H^n \to H \text{ in } L^2(M), \quad \int H^n dM^i \to \int H dM^i \text{ in } \mathcal{M}^2$$

und damit insbes.

$$E\left(\sup_{t \ge 0} \left| \int^t H^n_s dM^i_s - \int^t H_s dM^i_s \right|^2\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

wegen $|||A^i||| \in \mathcal{A}$ (wg Beschränktheit von A)) und dominierter Konvergenz gilt

$$E\left(\sup_{t \ge 0} \left| \int^t H^n_s dA^i_s - \int^t H_s dA^i_s \right|\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Gezeigt ist für $1 \le i \le d$ insbesondere

$$\sum_k D_i F(X_{t \wedge \sigma^n_{k-1}}) (X^i_{t \wedge \sigma^n_k} - X^i_{t \wedge \sigma^n_{k-1}})$$

$$= \int^t H^n_s dM^i_s + \int^t H^n_s dA^i_s$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\int^t H_s dM^i_s + \int^t H_s dA^i_s}_{} \quad \underline{P\text{-stoch}}$$

$$= \int^t D_i F(X_s) dM^i_s + \int^t D_i F(X_s) dA^i_s .$$

Für bel. i, j zeigt Satz 6.8

$$\sum_k D_{ij} F(X_{t \wedge \sigma^n_{k-1}}) (X^i_{t \wedge \sigma^n_k} - X^i_{t \wedge \sigma^n_{k-1}})(X^j_{t \wedge \sigma^n_k} - X^j_{t \wedge \sigma^n_{k-1}})$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \int^t D_{ij} F(X_s) d\langle M^i, M^j\rangle_s$$

P-stoch.

4) Abschluß d. Bew. unter A): Mit Schritte 2) und 3) wegen Eindeutigkeit (bis auf P-Nullm.) des P-stoch. Lim., für alle $t \in \mathbb{Q}^+$, und Stetigkeit aller Pfade: Gleichheit der Prozesse

$$
\begin{aligned}
&F(X_t) - F(X_0) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i F(X_s)\, dM_s^i + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i F(X_s)\, dA_s^i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t D_{ij} F(X_s)\, d\langle M^i, M^j \rangle_s \qquad , t \geq 0
\end{aligned}
$$

24.06.20

bis auf Ununterscheidbarkeit unter P.

Selbststudium

A') Der Bew. unter A) bleibt gültig, wenn die Beschränktheitsvor. abgeändert wird zu

$$
\begin{cases}
M^i, \ \|A^i\|, \ \langle M^i, M^j \rangle \quad \text{beschr. durch } \tilde{C}, \ \forall i,j \\
X_0 \quad \text{i.a. unbeschränkt} \\
F \in C_K^2
\end{cases}
$$

denn dann sind $F(X)$, $D_i F(X)$, $D_{ij} F(X)$ beschränkt, Entw. in Bew. schritt 2) sowie die Konvergenzargumente in Bew. schritt 3) bleiben gültig.

B) Für $F \in C^2$ schreibe

$$
\begin{aligned}
L(F)_t &:= F(X_t) - F(X_0) \\
R(F)_t &:= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t D_i F(X_s)\, dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t D_{ij} F(X_s)\, d\langle M^i, M^j \rangle_s
\end{aligned}
$$

für l.h.s bzw. r.h.s in der Itô-Formel. Ist X_0^i unbeschränkt, so ist X^i auch nicht lokal beschränkt ($\to$ 4.14)!

Def. oder

$$T_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } |X_0| > n \\ \inf\{t > 0 : \text{ es ex. } i \text{ in } 1,\dots,d \text{ so daß } \\ |X^i| > n \text{ oder } |M^i| > n \text{ oder } |||A^i||| > n \\ \text{oder } \langle M^i \rangle > n\} > 0 & \text{falls } |X_0| \leq n. \end{cases}$$

Klar $T_n \uparrow \infty$; für die in 0 startenden stet. Proz. gilt

M^i, $|||A^i|||$, $\langle M^i \rangle$ beschränkt auf $[\![0, T_n]\!]$.

Zu T_n ex. $\tilde{F}^{(n)} \in \mathcal{C}^2_K$ so daß $F = \tilde{F}^{(n)}$ auf $\overline{B}_{2n}(0)$.

Daher

$$R(F) = R(\tilde{F}^{(n)}) \quad \text{auf } [\![0, T_n]\!]$$

und

$$L(F) = L(\tilde{F}^{(n)}) \quad \text{auf } A \subset \mathbb{R}^+ \times \Omega$$

wobei $A := (\{|X_0| \leq n\} \times [0, \infty)) \cap [\![0, T_n]\!]$
$\cup (\{|X_0| > n\} \times [0, \infty)) \cap \emptyset)$

nach Def. von T_n. Trivialerweise gilt aber für l.h.s

$$L(F)_{T_n} = 0 = L(\tilde{F}^{(n)})_{T_n} \quad \text{auf } \{T_n = 0\}$$

und beides zusammen zeigt

$$L(F) = L(\tilde{F}^{(n)}) \quad \text{auf } [\![0, T_n]\!].$$

selbst-ständig

Gezeigt ist: Itô-Formel für $F \in \mathcal{C}^2$ gilt auf jedem $[\![0, T_n]\!]$, aber $T_n \uparrow \infty$ pktw. auf Ω. $\square$

6.10 Bem: Betr. $d=1$, $X = X_0 + M + A \in \mathcal{S}$, $F \in C^2$:

$$\frac{1}{2}\int F''(X_s)\,d\langle M\rangle_s$$

auf der rechten Seite der Itô-Formel hat keine Entsprechung in der klassischen Analysis. Es kommt wegen Satz 6.5 aus der Existenz der quadratischen Variation für stetige lokale Martingale:

$$M \in \mathcal{M}_{loc} \overset{5.8}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{Pfade von } M \text{ sind \underline{nicht} BV} \\ \text{falls nicht } M \text{ trivial} \equiv 0 \text{ ist} \end{array} \right.$$

Für $X \in \mathcal{S}$ mit stet. Martingalteil $M \equiv 0$ reduziert sich Itô auf

$$F(X_t) - F(X_0) = \int^t F'(X_s)\,dA_s = \int^t F'(X_s)\,dX_s .$$

6.11 Produktformel: a) betr. stetige Semimart. $(d=1)$

$$X = X_0 + M + A, \quad Y = Y_0 + N + V, \quad M, N \in \mathcal{M}_{loc}, \ A, V \in \mathcal{V}^c_{loc}.$$

Itô-Formel mit $F(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$; wegen $D_{12}F \equiv 1 \equiv D_{21}F$:

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int^t X_s\,dY_s + \int^t Y_s\,dX_s + \langle M,N\rangle_t$$

b) Spezialfall

$$X = X_0 + M + A, \quad Y = Y_0 + V \quad (\text{d.h. } N \equiv 0)$$

Itô-Formel mit $F(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2$ liefert dann

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \underbrace{\int^t X_s\,dV_s}_{\text{wie BV}} + \int^t Y_s\,dX_s + 0$$

wegen $\langle M,0\rangle = 0$.