Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Einige Übungsaufgaben zu den Kapiteln VI – VII **July 2, 2020**

Aufgabe 6.1 : (stetige lokale Martingale, zu Definition 7.3) Für jedes $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ ist der Prozess

$$X = (X_t)_{t \geq 0} \quad , \quad X_t \;:=\; e^{\,M_t \,-\, \frac{1}{2}\langle M \rangle_t}$$

eine Lösung der SDE

$$dX_s \;=\; X_s \, dM_s \quad , \quad s \geq 1 \quad , \quad X_0 \equiv 1$$

im Sinne einer Semimartingaldarstellung

$$X_t \;=\; 1 \;+\; \int_0^t X_s \, dM_s \quad , \quad t \geq 0 \, ,$$

und es gilt $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}^{2,c}$.

Hinweis : in Analogie zum Beweis von 7.2 wende man die Ito-Formel an.

Aufgabe 6.2 : Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen der Aufgabe 5.1 betrachte man den mit $c > 0$ skalierten kompensierten Poissonprozess

$$M \;=\; c\,(N - \lambda\,\mathrm{id})$$

(insbesondere: M gehört nicht zur Klasse $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}$ nach Kapitel 7), und zeige:

a) der Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$X_t \;=\; e^{\,M_t} \prod_{0 < s \leq t} \left[(1 + \Delta M_s)\, e^{-\Delta M_s} \right] \;=\; (1+c)^{N_t}\, e^{\,-c\,\lambda\, t} \quad , \quad t \geq 0$$

löst die SDE

$$(*) \qquad dX_s \;=\; X_{s-}\, dM_s \quad , \quad s \geq 1 \quad , \quad X_0 \equiv 1$$

im Sinne einer Semimartingaldarstellung

$$X_t \;=\; 1 \;+\; \int_0^t X_{s-}\, dM_s \quad , \quad t \geq 0 \, ,$$

und es gilt $X \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$.

b) sind $X,\ X'$ Lösungen der SDE $(*)$ bezüglich des oben definierten M mit $X_0 \equiv 1 \equiv X_0'$, so gilt $X = X'$ bis auf Ununterscheidbarkeit unter P.

<u>Kommentar :</u> Man nennt X das stochastische Exponential des (rein unstetigen) lokalen Martingals M, Schreibweise $\mathcal{E}(M) := X$; mit 'rein unstetig' bezeichnet man abzählbare Summen von Martingalen des Typs 'kompensierter Ein-Sprung-Sprungprozess', welche in $\mathcal{M}^2$ konvergieren.

<u>Hinweis :</u> a) Pfadweise in ω betrachte man cadlag Funktionen

$$f(s,\omega) \ := \ (1+c)^{N_s(\omega)} \quad , \quad g(s) \ := \ e^{\,-\lambda\, c\, s} \quad , \quad s \geq 0$$

und benutze die Formel für partielle Integration in Stieltjes-Integralen aus Brémaud (1981), App. A4

$$f(t)g(t) - f(0)g(0) \ = \ \int_0^t f(s^-)\, dg(s) \ + \ \int_0^t g(s)\, df(s) \ ,$$

siehe pdf scan vom Freitag 19.06.20.

b) Man argumentiere in Analogie zu Beweisschritt 3) des Eindeutigkeitsbeweises 7.16.