Reinhard Höpfner, VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

July 6, 2020

Kap. VII Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

A. Vorbereitungen :

$\mathbb{F}$-Brownsche Bewegung 7.1

Beispiel: exponentielle SDE 7.2

stochastisches Exponential der Brownschen Bewegung 7.3

Problemstellung SDE 7.4 – 7.6'

Bemerkung zu starken und schwachen Lösungen 7.7

Beispiel: eine schwache Lösung 7.8

B. Starke Lösungen :

die Filtration $\mathbb{F}^{W,\xi}$ 7.9

Definition: starke Lösung 7.10

Definition: starke Eindeutigkeit 7.11

lokale und globale Lipschitzbedingung, lineare Wachstumsbedingung 7.12

Eindeutigkeitsatz von Ito 7.13

Existenzsatzsatz von Ito 7.14

C. Beweise und Beispiele:

Gronwall-Lemma 7.15

Beweis: Eindeutigkeit einer starken Lösung unter der lokalen Lipschitzbedingung 7.16

Ein Beispiel für Explosion von Lösungen 7.17

Beweis: Existenz einer starken Lösung unter Lipschitz- und linearer Wachstumsbedingung 7.18

Beispiel: allgemeine lineare SDE 7.19

Beispiel: geometrische Brownsche Bewegung 7.20

Beispiel: Ornstein-Uhlenbeck Prozess 7.21

KAP VII Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

A) Vorbereitungen

7.1 Def: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$. $W = (W_t)_{t \geq 0}$ heißt $\mathbb{F}$-BB falls gilt

i) W ist SBB (im Sinne von 2.14 Stoch. II)

ii) W ist $\mathbb{F}$-adaptiert und hat $\mathbb{F}$-unabh. Zuwächse:

$$E_P\left(e^{i \xi^T (W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s \right) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)\xi^T \xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

7.2 Bsp: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, übl. Hyp. Sei W $\mathbb{F}$-BB, $W_0 \equiv 0$. Dann ist der Prozess

$$X_t := X_0 \exp\left\{ \sigma W_t + \left(m - \frac{\sigma^2}{2}\right) t \right\}, \quad t \geq 0$$

($\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $X_0 \in L^2(\mathcal{F}_0, P)$, $d = 1$) ein stetiges $(P, \mathbb{F})$-Semimartingal mit Darstellung

$$X_t = X_0 + \int_0^t m X_s \, ds + \int_0^t \sigma X_s \, dW_s, \quad t \geq 0$$

d.h. 'X löst die stochastische Differentialgleichung

$$dX_s = m X_s \, ds + \sigma X_s \, dW_s, \quad s \geq 0$$

zur Startbedingung X_0' (in einem zu präzisierenden Sinn).

Beweis: Betrachte 1-dim Semimartingale, $i=1,2,3$

$$Z^{(i)}_t = Z^{(i)}_0 + M^{(i)}_t + A^{(i)}_t \quad , \quad M^{(i)} \in \mathcal{M}_{loc}, A^{(i)} \in \tilde{\mathcal{V}}_{loc}$$

definiert durch

$$Z^{(0)} = X_0 + 0 + 0 \, , \quad Z^{(1)} = 0 + W + 0 \, , \quad Z^{(2)} = 0 + 0 + id \, ,$$

dazu C^2-Fkt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ def. durch

$$F(z_0, z_1, z_2) := z_0 \, e^{\sigma z_1} \, e^{(m - \frac{\sigma^2}{2}) z_2} \quad , \quad (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$$

Dann ist der Prozess X von Form

$$X = F(Z) \, , \quad Z := (Z^{(1)}, Z^{(2)}, Z^{(3)}) \in \mathcal{S} \, .$$

Also Itô-Formel 6.9: $X = F(Z)$ ist Semimart. mit Darst.

$$F(Z_t) - F(Z_0) = \sum_{i=0}^{2} \int_0^t D_i F(Z_s) \, (dM^{(i)}_s + dA^{(i)}_s)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{2} \int_0^t D_{ij} F(Z_s) \, d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_s$$
$$= \int_0^t D_1 F(Z_s) \, dM^{(1)}_s + \int_0^t D_2 F(Z_s) \, dA^{(2)}_s$$
$$+ \frac{1}{2} \int_0^t D_{11} F(Z_s) \, d\langle M^{(1)}, M^{(1)} \rangle_s \quad + 0 \quad .$$

Aber $D_1 F = \sigma \cdot F$, $D_{11} F = \sigma^2 \cdot F$, $D_2 F = (m - \frac{\sigma^2}{2}) F$, also

$$\underbrace{F(Z_t) - F(Z_0)}_{= X_t - X_0} = \int_0^t \sigma X_s \, dW_s$$
$$+ \int_0^t (m - \frac{\sigma^2}{2}) X_s \, ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 X_s \, ds$$
$$= \int_0^t \sigma X_s \, dW_s + \int_0^t m X_s \, ds \quad .$$

Dies ist die Beh. $\square$

29.6.20

Irrou-Shinyaw S. 59

7.3 Def: Sei $M \in \mathcal{M}_{loc}$. Der Prozeß $X = (X_t)_{t \geq 0}$

$$X_t := e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t}, \quad t \geq 0$$

heißt stochastisches Exponential von M, schreibe: $\mathcal{E}(M)$, und löst

$$dX_t = X_t \, dM_t, \quad t \geq 0, \quad \text{zusätzlich } X_0 \equiv 1$$

insbes. gilt $X \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ (Bew: ÜA; beachte Itô-Formel).

7.3' Hs: Speziell für $M = \sigma \cdot B$: $X = \mathcal{E}(\sigma B)$ ist Martingal.

Bew: beachte Laplace-Transformation: $B_t \sim N(0,t)$ hat LT

$$\lambda \to E(e^{\lambda B_t}) = e^{+\frac{1}{2}\lambda^2 t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(Stoch. I+II: 4.23). Damit $E(X_t) = E(e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}) = 1 \;\forall t$ ∎

7.4 Problemstellung: Sei gegeben

- 1-dim SBB $W = (W_t)_{t \geq 0}$
- meßb Fkt $b(\cdot,\cdot), \sigma(\cdot,\cdot) : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

nenne $b(t,x)$ Drift, $\sigma(t,x)$ Volatilität, $a(t,x) := \sigma^2(t,x)$ Diffusionskoeffizient zur Zeit t. Gesucht ist ein reellw. stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \geq 0}$, der in einem zu präzisierenden Sinn eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (SDE)

(7.5) $$dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t \quad , t\geq 0$$

zu bel. Startwert X_0 (ZV) liefert; dabei ist (7.5) Kurzschreibweise für die Integraldarstellung

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dW_s \quad , t\geq 0.$$

__7.6 Bem:__ a) Sind X, W def. auf $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{F},P)$, u.A.,

$$\begin{cases} X \text{ stetig und } \mathbb{F}\text{-adaptiert} \\ W \ \mathbb{F}\text{-BB} \quad (\to 7.1) \end{cases}$$

so sind

$$(b(t,X_t))_{t\geq 0},\ (\sigma(t,X_t))_{t\geq 0} \ \mathbb{F}\text{-vorhersehbare Prozesse.}$$

__Bew:__ Mit X ist auch $(t,X_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{F}$-adaptiert und stetig, also $\mathbb{F}$-vorhersehbar; und $b(\cdot,\cdot), \sigma(\cdot,\cdot)$ sind meßbar n. Vor.

b) Ist $H=(H_t)_{t\geq 0}$ $\mathbb{F}$-vhs, so äquivalent:

$$H \in \mathcal{L}^2_{loc}(W) \iff \int_0^{\cdot} H_s^2\,ds \in \mathcal{A}_{loc}$$

$$\iff P\text{-f.s.}: \int_0^t H_s^2\,ds < \infty \quad \forall t<\infty.$$

__Bew:__ 4.22 – 4.23. □

7.7 Bem: Für die SDE (7.5) unterscheidet man zwischen

- <u>starken Lösungen</u>, d.h.: <u>'konstruiere X aus W'</u>
- <u>schwachen Lösungen</u>, dort i.d.R.: 'konstr. W aus X'

<u>7.8 Bsp (schw. Lsg.):</u> Def. $\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x\leq 0 \end{cases}$, $x\in\mathbb{R}$, und löse die SDE

$$(*) \qquad dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)\, dW_t, \quad t\geq 0.$$

<u>Ansatz:</u> bereite vor auf $(\hat{\Omega}, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mathbb{F}}, \hat{P})$ eine $\hat{\mathbb{F}}$-BB X, definiere

$$B_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s, \quad t\geq 0.$$

Da $X\in\mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ und $H := (\operatorname{sgn}(X_s))_{s\geq 0}$ vorhersehbar und beschränkt, gilt

$$B\in\mathcal{M}^{2,c}_{loc}, \quad \langle B\rangle = id$$

denn: $\langle B\rangle_t = \int_0^t \underbrace{\operatorname{sgn}^2(X_s)}_{\equiv 1}\, \underbrace{d\langle X\rangle_s}_{=ds} = t$, vgl. 5.15. Ein Charakterisierungssatz von P. Lévy (→ Karatzas-Shreve 1991, Thm. 3.16, S. 157) zeigt nun, daß $B\in\mathcal{M}_{loc}$ mit $\langle B\rangle = id$ notwendig eine $\hat{\mathbb{F}}$-BB sein muß. Mit <u>dieser</u> BB $\underline{\underline{B}}$ gilt

$$X_t = \int_0^t \underbrace{\operatorname{sgn}^2(X_s)}_{\equiv 1}\, dX_s \overset{5.15}{=} \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, d\underline{\underline{B}}_s$$

und man hat eine Lösung der SDE $(*)$ konstruiert. □