Hier nur die wichtigsten Sätze für <u>starke Lsg</u>, darüber hinaus siehe Ikeda-Watanabe (1989, Ch. IV), Karatzas-Shreve (1991), auch Bass (1991).

B. Starke Lösungen

Eine wichtige Filtration für den Begriff der 'starken Lösung':

<u>7.9 HS:</u> Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein WS-Raum, darauf

- $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine BB, $W_0 \equiv 0$
- $\xi \in L^2(P)$ reellwert. ZV

beide <u>unabhängig</u> unter P. Setze

$$\mathcal{G}_t := \sigma(\xi) \vee \sigma(W_s : 0 \leq s \leq t), \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{F}_t := \sigma\Big(\bigcap_{r > t} \mathcal{G}_r, \mathcal{N}^P\Big), \quad t \geq 0$$

mit $\mathcal{N}^P :=$ Klasse aller TM von P-Nullmengen in Ω.

Dann erfüllt die Filtration

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$$

die üblichen Hypothesen, und W ist eine $\mathbb{F}$-BB im Sinne von 7.1. <u>Bezeichne diese Filtr. mit $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{W,\xi}$.</u>

<u>Bew:</u> 1) klar $\mathcal{N}^P \subset \mathcal{F}_0$, <u>zz:</u> $\mathbb{F}$ ist rechtsstetig.

Ist

$$F \in \bigcap_n \mathcal{F}_{t+1/n},$$

so existiert für jedes n ein $G_n \in \mathcal{G}_{t+\frac{2}{n}}$ und ein $N_n \in \mathcal{N}^P$ mit

$$F = G_n \,\Delta\, N_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Symm. Differenz bedeutet

$$G_n \Delta N_n = (G_n \setminus N_n) \cup (N_n \setminus G_n)$$

n. Def. von $\mathcal{N}^P$ gibt es also

$$N_{1,n}, N_{2,n} \in \mathcal{N}^P : \; N_{1,n} \subset G_n \; , \; N_{2,n} \subset G_n^c$$

so daß

$$F = G_n \Delta N_n = (G_n \setminus N_{1,n}) \,\dot\cup\, N_{2,n} \quad , n \in \mathbb{N}$$

Betrachte

$$G := \liminf_n G_n \in \bigcap_{r>t} \mathcal{G}_r .$$

Dann gilt

$$F \setminus G \subset \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} N_{2,n} \in \sigma(\mathcal{N}^P)$$

und zugleich

$$G \setminus F \subset \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} N_{1,n} \in \sigma(\mathcal{N}^P)$$

Also hat F eine Darstellung

$$F = G \,\Delta\, \tilde{N} , \quad \tilde{N} \in \sigma(\mathcal{N}^P)$$

also

$$F \in \sigma\Big(\bigcap_{r>t} \mathcal{G}_r , \mathcal{N}^P\Big) = \mathcal{F}_t \,.$$

Damit ist $\mathbb{F}$ rechtsstetig.

2) Zeige: W ist $\mathbb{F}$ – BB i.S. von 7.1.

Wegen Stetigkeit aller Pfade von W gilt für jedes $\xi \in \mathbb{R}$, jedes Paar $s<t$, jedes $F \in \mathcal{F}_s$, mit dominierter Konvergenz

$$E_P\left(1_F\, e^{i\gamma(W_t - W_s)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left(1_F\, e^{i\gamma(W_t - W_{s+\frac{1}{n}})}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left(1_F\, E\left(e^{i\gamma(W_t - W_{s+\frac{1}{n}})} \,\middle|\, \mathcal{G}_{s+\frac{1}{n}}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left(1_F\, e^{-\frac{1}{2}(t-(s+\frac{1}{n}))\gamma^2}\right) \quad \leftarrow \text{unabh. normalvert. Zuwächse}$$

$$= E\left(1_F\, e^{-\frac{1}{2}(t-s)\gamma^2}\right)$$

und damit ist W auch eine $\mathbb{F}$-BB nach Def. in 7.1. □

__7.10 Def:__ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$, W, ξ wie in 7.9: $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{W,\xi}$.

Mit $b(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ wie in 7.4 betrachte SDE (7.5):

$$dX_t = b(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dW_t, \quad t \geq 0.$$

Eine __starke Lösung__ zur Startbed. ξ ist jeder $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{W,\xi}$-adaptierte Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit stetigen Pfaden, mit

$$\int_0^\cdot |b(s,X_s)|\,ds, \quad \int_0^\cdot \sigma^2(s,X_s)\,ds \quad \in \mathcal{A}_{loc},$$

so dass gilt:

$$X = \xi + \int_0^\cdot b(s,X_s)\,ds + \int_0^\cdot \sigma(s,X_s)\,dW_s$$

bis auf Ununterscheidbarkeit unter P.

7.11 Def: Seien $b(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ wie in 7.4. Die SDE (7.5) besitzt die <u>starke Eindeutigkeitseigenschaft</u> falls gilt:
für jede Wahl von W, ξ, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = \mathbb{F}^{W,\xi}, P)$ (→7.9) und $\mathbb{F}^{W,\xi}$-adapt. Lösungen (→7.10) X, X' der SDE zur Startbed. ξ gilt

$$X = X' \quad \text{bis auf } P\text{-Ununterscheidbarkeit.}$$

1.7.20

7.12 Def: Für $b(\cdot,\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$ wie in 7.4 betrachte Bedingungen:

<u>(ℓ) lokale Lipschitz-Bed.:</u> für jedes $n \in \mathbb{N}$ ex. $K_n < \infty$ s.d.

$$\begin{cases} |b(t,x)-b(t,x')| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,x')| \leq K_n |x-x'| \\ \text{für alle } t \geq 0, \text{ alle } |x| \leq n, |x'| \leq n \end{cases}$$

<u>(L) globale Lipschitz-Bed.:</u> ex. $K < \infty$ so dass

$$\begin{cases} |b(t,x)-b(t,x')| + |\sigma(t,x)-\sigma(t,x')| \leq K |x-x'| \\ \text{für alle } t \geq 0, \text{ alle } x, x' \in \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>(W) lineare Wachstumsbed.:</u> ex. $K < \infty$ so dass

$$\begin{cases} |b(t,x)|^2 + \sigma^2(t,x) \leq K^2 (1 + x^2) \\ \text{für alle } t \geq 0, \text{ alle } x, x' \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

7.13 Hauptsatz (Itô): Erfüllen $b(\cdot,\cdot), \sigma(\cdot,\cdot)$ die lokale Lipschitz-Bed. (ℓ), so besitzt die SDE (7.5) die starke Eindeutigkeitseigenschaft.

7.14 Hauptsatz (Itô): $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, darauf: W SBB; ξ ZV unabhängig von W mit $\xi \in L^2(P)$.
Erfüllen $b(\cdot,\cdot), \sigma(\cdot,\cdot)$ die globale Lipschitz-Bed. (L) und die lineare Wachstumsbed. (W), so besitzt die SDE (7.5) eine starke Lösung zur Anfangsbed. ξ.

Für jedes $T<\infty$ gibt es dann eine Konst $C=C(T,K)<\infty$ so daß gilt: (aus (L)+(W))

$$E(|X_t|^2) \leq C(1+E(\xi^2))\, e^{Ct}$$
für alle $0 \leq t \leq T$.

(→ Karatzas-Shreve Kap. 5.2.B)

C. Beweise und Beispiele

7.15 Gronwall-Lemma: sei $g:[0,T]\to\mathbb{R}^+$ stetig, $\beta\geq 0$, sei $h:[0,T]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Aus

$$g(t) \leq h(t) + \beta\int_0^t g(s)\,ds \quad , \quad 0\leq t\leq T$$

folgt dann

$$g(t) \leq h(t) + \beta\int_0^t h(s)\, e^{\beta(t-s)}\,ds \quad , \quad 0\leq t\leq T.$$

Ref: Hille, Lectures on ODE, (1969), p. 19, Karatzas-Shreve (1991), p. 287–288.

7.16 Beweis Eindeutigkeitssatz 7.13: VR: (L).

1) Beweisplan: Fixiere $\omega, \xi, (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}=\mathbb{F}^{\omega,\xi}, P)$ wie in 7.9, betrachte darauf zwei starke Lösungen X, X' zu Startbed. ξ:

$$X_0 = \xi = X_0' \in L^2(P)$$

insbes. X, X' $\mathbb{F}=\mathbb{F}^{\omega,\xi}$ adaptiert; für $\beta\in\mathbb{N}$ betr. $\mathbb{F}$-St

Medn-1.Dat. S. 179

$$\tau_\beta := \inf\{t>0 : |X_t|>\beta \text{ oder } |X'_t|>\beta\} \wedge \beta .$$

Da X, X' stetig, gilt $\tau_\beta \uparrow \infty$. Dann genügt Nachweis von

$$X = X' \quad \text{b.a.U. auf } [\![0,\tau_\beta]\!] \quad , \beta\in\mathbb{N}.$$

Betrachte dazu $\Delta=(\Delta_t)_{t\geq 0}$:

$$\Delta_t := (X-X')_t^{\tau_\beta} \quad , \quad \beta\in\mathbb{N} \text{ bel. fest},$$

und zeige:

$$\Delta_t = 0 \quad \text{in } L^2(P)$$

für jedes $t \geq 0$. Wegen Stetigkeit dann $\Delta = 0$ b.a.U., fertig.

2) X, X' lösen SDE (7.5) mit derselben W und ξ:

$$\Delta_t = \int_0^{t\wedge\tau_\beta} \big(b(s,X_s)-b(s,X'_s)\big)\,ds + \int_0^{t\wedge\tau_\beta} \big(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s)\big)\,dW_s .$$

$$=: \qquad I_1(t) \qquad + \qquad I_2(t) .$$

3) Auf $[\![0,\tau_\beta]\!]$ gilt wegen (l)

$$|\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s)|^2 \leq K_\beta^2\,|X_s-X'_s|^2 \leq K_\beta^2 \cdot |2\beta|^2$$

und damit $I_2 \in \mathcal{M}^{2,c}$ wegen $\tau_\beta \leq \beta$; zugleich

$$E\big(|I_2(t)|^2\big) = E\big(\langle I_2\rangle_t\big) = E\Big(\int_0^{t\wedge\tau_\beta} \underbrace{[\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s)]^2}_{(l)}\,ds\Big)$$

$$\leq K_\beta^2 \cdot E\Big(\int_0^{t\wedge\tau_\beta} [X_s-X'_s]^2\,ds\Big)$$

$$\leq K_\beta^2 \cdot \int_0^t E(\Delta_s^2)\,ds .$$

4) Mit Cauchy-Schwarz und (l) und Def. von τ_β

$$|I_1(t)|^2 = \Big|\int_0^{t\wedge\tau_\beta} 1\cdot\big(b(s,X_s)-b(s,X'_s)\big)\,ds\Big|^2$$

$$\leq \beta \cdot \int_0^{t\wedge\tau_\beta} \underbrace{|b(s,X_s)-b(s,X'_s)|^2}_{(l)}\,ds$$

also

$$E\big(|I_1(t)|^2\big) \leq \beta \cdot K_\beta^2 \cdot \int_0^t E(\Delta_s^2)\,ds .$$

5) Aus 3)+4) wegen $\Delta_t = I_1(t) + I_2(t)$ und Def. von T_1

$$E(\Delta_t^2) \le 2\{E(|I_1(t)|^2) + E(|I_2(t)|^2)\}$$

$$\le 2K_\beta^2(1+\beta) \cdot \int_0^t E(\Delta_s^2)\,ds$$

Gronwall mit $f(t) := E(\Delta_t^2)$ und $h \equiv 0$ zeigt daher

$$E(\Delta_t^2) = 0 \quad \forall t \ge 0.$$

Nach Schritt 1) ist damit der Beweis abgeschlossen. □

7.17 Bsp: Schon klassisch deterministisch reicht Vor. (L) nicht für Existenz einer Lösung auf ganz $[0,\infty)$: die ODE

$$f' = b \circ f \quad \text{mit } b(x) := x^2,\ x \in \mathbb{R}$$

erfüllt (L), aber

$$f(t) = 1 + \int_0^t [f(s)]^2\,ds, \quad 0 \le s < ?$$

wird gelöst durch

$$f(t) = \frac{1}{1-t}, \quad 0 \le t < 1$$

und dies 'explodiert' zur Zeit $t = 1$. □