Die Existenz einer starken Lösung unter (L)+(W) wurde von Itô um 1940 mit Picard-Lindelöf-Iteration bewiesen (Ikeda-Watanabe S. 181, Karatzas-Shreve Kap. 5.2)

7.18 Beweis Existenzsatz 7.14: Vor: (L)+(W).

1) Beweisplan: Fixiere $W, \xi, (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}=\mathbb{F}^{W,\xi}, P)$ wie in 7.9. Insbesondere ξ unabh. von W, $\xi \in L^2(P)$.

Sukzessiv in $k \in \mathbb{N}_0$ konstruiere $(\mathbb{F}, P)$-Semimartingale

$$(*) \begin{cases} {}^0X := \xi & \text{konstanter Prozess} \\ {}^{k+1}X := \xi + \int b(s, {}^kX_s)\,ds + \int \sigma(s, {}^kX_s)\,dW_s \end{cases}$$

und zeige: es gibt einen stetigen $\mathbb{F}$-adapt. Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ so dass gilt:

$$(\diamond) \quad {}^{k+1}X_\bullet(\omega) \longrightarrow X_\bullet(\omega) \quad \text{gleichmäßig über } [0,T]$$

P-f.s. für $k \to \infty$, für jedes $T < \infty$, und:

$$(\diamond\diamond) \quad X = \xi + \int b(s, X_s)\,ds + \int \sigma(s, X_s)\,dW_s$$

b.a.U. unter P. Damit hat man eine starke Lsg der SDE (7.5) konstruiert, wegen (L) ⇒ (e) und Eindeutigkeitssatz 7.13 notwendig die einzige.

2) Schreibe

$$^{k+1}M := \int^{\cdot} \sigma(s, {}^kX_s)\, dW_s \quad \text{lok. Martingalteil von } {}^{k+1}X$$

$$^{k+1}A := \int^{\cdot} b(s, {}^kX_s)\, ds \quad \text{stet. BV-Teil von } {}^{k+1}X$$

betrachte den Abstand sukzessiver Iterationen:

$$^{k+1}\Delta := {}^{k+1}X - {}^kX, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Mit Lokalisation und den in M^2 geltenden Abschätzungen (→ 4.2)

$$E\Big(\sup_{0\le s\le t} ({}^{k+1}M - {}^kM)_s^2\Big) \le 4E\Big(({}^{k+1}M - {}^kM)_t^2\Big)$$

$$= 4 \cdot E\big(\langle {}^{k+1}M - {}^kM\rangle_t\big) \le \infty$$

wobei

$$\langle {}^{k+1}M - {}^kM\rangle_t = \int^t \big(\sigma(s, {}^kX_s) - \sigma(s, {}^{k-1}X_s)\big)^2\, ds$$

$$\overset{(L)}{\le} K^2 \cdot \int^t |{}^kX - {}^{k-1}X|_s^2\, ds$$

also

$$E\Big(\sup_{0\le s\le t} ({}^{k+1}M - {}^kM)_s^2\Big) \le 4K^2 E\Big(\int^t |{}^k\Delta_s|^2\, ds\Big).$$

Wie in Bew.schritt 4) von 7.16 gilt

$$\sup_{0\le s\le t} ({}^{k+1}A - {}^kA)_s^2 \le \Big(\int^t 1 \cdot |b(s, {}^kX_s) - b(s, {}^{k-1}X_s)|\, ds\Big)^2$$

$$\overset{CS}{\le} t \cdot \int^t |b(s, {}^kX_s) - b(s, {}^{k-1}X_s)|^2\, ds$$

$$\overset{(L)}{\le} K^2 \cdot t \cdot \int^t |{}^kX - {}^{k-1}X|_s^2\, ds$$

Zusammen:

$$E\Big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{n+1}\Delta|_s^2\Big)$$

$$\le 2\cdot\Big(E\big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{n+1}M - {}^{k}M|_s^2\big) + E\big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{n+1}A - {}^{k}A|_s^2\big)\Big)$$

$$\le \underbrace{2\cdot K^2(4+t)}_{=:\,C(K,t)} \cdot \int_0^t E\big(\sup_{0\le r\le s} |{}^{k}X - {}^{k-1}X|_r^2\big)\,ds$$

$$= C(K,t)\cdot \int_0^t E\big(\sup_{0\le r\le s} |{}^{k}\Delta|_s^2\big)\,ds$$

$$\le \infty.$$

Sukzessiv in derselben Weise weiter bis $k=1$:

$$E\big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{k+1}\Delta|_s^2\big) =$$

$$\le C^k(K,t)\cdot \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{k-1}} ds_k \; E\big(\sup_{0\le r\le s_k} |{}^{1}\Delta|_r^2\big).$$

$$(+) \quad \le C^k(K,t)\,\frac{t^k}{k!}\, E\big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{1}\Delta|_s^2\big)$$

und erst hier sieht man, daß dies alles endlich ist:
wegen ${}^{0}X \equiv \xi$ und Definition von ${}^{1}X$:

$${}^{1}\Delta_t = \int^t b(s,\xi)\,ds + \int^t \sigma(s,\xi)\,dW_s$$

also

$$E\big(|{}^{1}\Delta|_t^2\big) \le 2E\Big\{t\cdot \int^t \underbrace{|b(s,\xi)|^2}_{\le K^2(1+|\xi|^2)}\,ds + \int^t \underbrace{\sigma^2(s,\xi)}_{\le K^2(1+|\xi|^2)}\,ds\Big\}$$

und mit (W)

$$E\big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{1}\Delta|_t^2\big) \le 2K^2(1+t)\big(1+\underbrace{E(\xi^2)}_{<\infty}\big) < \infty$$

und Voraussetzung über ξ.

Jetzt weiß man, daß Teil (+) für alle $k\in\mathbb{N}$ endlich ist: mit $\max(C(K,t), 2K^2(1+t)) \le 16\,K^2 t$ für hinr. großes t folgt

$$(*) \qquad E\Big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{k+1}\Delta|_s^2\Big) \le \frac{(16\,K^2 t^2)^{k+1}}{k!}\,(1+E(\xi^2)) < \infty,$$

summierbar in $k\in\mathbb{N}$. Damit ist auch

$$(**) \qquad P\Big(\sup_{0\le s\le t} |{}^{k+1}\Delta|_s^2 > 2^{-k}\Big) \le \frac{2^k (16\,K^2 t^2)^{k+1}}{k!}\,(1+E(\xi^2))$$

summierbar in $k\in\mathbb{N}$, und es gilt

$$(***) \qquad E\Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sup_{0\le s\le t} |{}^{k}\Delta|_s^2\Big) \le \tilde{C}_1 (1+E(\xi^2))\, e^{\tilde{C}_2 t}$$

mit Konst $\tilde{C}_i = \tilde{C}_i(K,t)$, für jedes $t<\infty$.

3) BC und (**) zeigen: für jedes $T\in\mathbb{N}$ ex. P-Nullmenge $N_T \in \mathcal{F}_T$ so daß auf $\Omega \setminus N_T$

$$\sup_{0\le s\le T} |{}^{k+1}\Delta|_s > 2^{-k} \quad \text{für höchstens endlich viele } k\in\mathbb{N}.$$

Mit $N := \bigcup_{T\in\mathbb{N}} N_T$ (P-Null. in $\mathcal{F}_\infty$, damit in $\mathcal{F}_0$ wegen üb.) ist daher

$$X(t,\omega) := \begin{cases} 0 & \omega\in N \\ \xi(\omega) + \sum_{k\ge 0} {}^{k+1}\Delta(t,\omega) & \omega\notin N \end{cases}$$

wohldefiniert, Pfade von X entstehen als gleichm. Limes über Kompakta.

$$(\diamond) \qquad X(\cdot,\omega) \xleftarrow{k\to\infty} {}^{k}X(\cdot,\omega) \quad \text{glm. auf } [0,T] \quad (\omega\notin N)$$

stetig; auch ist X $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{W,\xi}$ – adaptiert da wegen sukzessive usw. $\ldots\ {}^{k+1}X \curvearrowleft {}^{k}X \curvearrowleft \ldots$ alle ${}^{k}X$ $\mathcal{F}^{x_0,\xi}$-adaptiert sind, $k \in \mathbb{N}$.

4) Beweise nun:

i) $\sup_{0\le s\le t} |{}^{k}X - X|_s \xrightarrow{k\to\infty} 0$ P-f.s. und in $L^2(P)$

ii) $E\left(\sup_{0\le s\le t} X_s^2\right) \le C_1 (1 + E(\xi^2)) e^{C_2 t}$, $0\le t\le T$

mit geeign. Konst. $C_i = C_i(K,T)$, $i=1,2$, $T\in\mathbb{N}$ bel.

Bew.: sukzessive

$${}^{k}X = {}^{k-1}X + {}^{k}\Delta \quad , \quad k\in\mathbb{N},$$

damit

$$\sup_{0\le s\le t} |{}^{k}X - {}^{0}X|_s^2 \le 2\left\{\sup_{0\le s\le t} |{}^{1}\Delta|_s^2 + \underbrace{\sup_{0\le s\le t} |{}^{k}X - {}^{1}X|_s^2}\right\}$$

$$\le 2 \sup_{0\le s\le t} |{}^{1}\Delta|_s^2 + 4\left\{\sup_{0\le s\le t} |{}^{2}\Delta|_s^2 + \underbrace{\sup_{0\le s\le t} |{}^{k}X - {}^{2}X|_s^2}\right\}$$

$$\le \ldots$$

$$(\times) \quad \le \sum_{j=1}^{\infty} 2^j \sup_{0\le s\le t} |{}^{j}\Delta|_s^2$$

$(\ast\ast\ast)$ liefert eine integrierbare Majorante in $L^2(\mathcal{F}_t, P)$ für alle

$$\sup_{0\le s\le t} |{}^{k}X - {}^{0}X|_s \ , \ k\in\mathbb{N}, \ \in L^2(\mathcal{F}_t, P)$$

wegen ${}^{0}X \equiv \xi$ konstant, $\xi \in L^2(P)$, hat man dann auch eine integrierbare Majorante für alle

$$(\times\times) \quad \sup_{0\le s\le t} |{}^{k}X|_s \ , \ k\in\mathbb{N}, \ \in L^2(\mathcal{F}_t, P).$$

Damit: i) $\curvearrowleft$ $(\triangle)$ und dominierter Konvergenz dank $(\times\times)$;

ii) $\curvearrowleft$ i), Ungleichungskette $(\times)$, Absch. $(\ast\ast\ast)$.

5) Zeige nun: X löst SDE (17.5). Vergleiche dazu

$$ {}^{k+1}X_t = \xi + \int_0^t b(s, {}^kX_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, {}^kX_s)\,dW_s, \quad 0 \le t \le T $$

mit

$$ X_t, \quad 0 \le t \le T $$

und mit

$$ \xi + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dW_s, \quad 0 \le t \le T. $$

Vergleich der l.h.s ist mit 4) i):

$$ \sup_{0 \le t \le T} |{}^kX - X| \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad \text{in } L^2(P) $$

schon erledigt, Vergleich der r.h.s wird mit (L) und mit Abschätzungen wie in Beweisschritt 2) ebenfalls auf 4) i) zurückgeführt, damit stimmen b.e.u die Prozesse

$$ X \quad \text{und} \quad \xi + \int_0^{\cdot} b(s, X_s)\,ds + \int_0^{\cdot} \sigma(s, X_s)\,dW_s $$

auf $[0,T]$ überein. Aber $T \in \mathbb{N}$ war in 4) i) beliebig. Also hat X die Schlichtungsdarstellung

$$ X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dW_s, \quad t \ge 0. $$

Dies schließt den Beweis ab. $\square$

6.7.20