7.19 Bsp (lineare SDE): zeige: die eind. starke Lsg der SDE

$$(*) \qquad dX_t = (\rho X_t + c)\,dt + (\sigma X_t + d)\,dW_t$$

$(\rho, c \in \mathbb{R}, \sigma, d \geq 0, \sigma + d > 0)$ zum Startw. $\xi \in L^2(P)$ ist

$$\begin{cases} X := \phi \cdot Y \\ \phi_t := e^{\sigma W_t + (\rho - \frac{\sigma^2}{2})t}, \quad t \geq 0 \quad (\to 7.2) \\ Y_t := \xi + (c - \sigma d)\int_0^t \phi_s^{-1}\,ds + d\int_0^t \phi_s^{-1}\,dW_s . \end{cases}$$

Bew: Bereite von W, ξ, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F} = \mathbb{F}^{\xi, W}, P)$ wie in 7.9, insb.: W und ξ sind P-unabhg., $\xi \in L^2(P)$.

Lineare Koeffizienten

$$x \to b(x) := \rho x + c, \quad x \to \sigma(x) := \sigma x + d$$

erfüllen (L) und (W), also ex. eind. starke Lösung.

Mit 7.2: $\phi \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ wie oben definiert ist stetig und strikt positiv auf $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, $\phi_0 \equiv 1$, also ist

$$\phi_t^{-1} = e^{-\sigma W_t - (\rho - \frac{\sigma^2}{2})t}, \quad t \geq 0$$

vorhersehbar und lokal beschränkt. Damit $Y \in \mathcal{S}$.

Definiere nun

$$F(z_1, z_2) := z_1 \cdot z_2, \quad Z := (\phi, Y), \quad F(Z) = X.$$

Dann $X_0 = F(\phi_0, Y_0) = F(1, \xi) = \xi$, und nach 7.2:

ϕ löst

$$d\phi_s = c\phi_s\,ds + 6\,\phi_s\,dW_s\,,\quad s\geq 0.$$

Dann Itô für $X = F(Z)$:

$$X_t - \xi = F(\phi_t, Y_t) - F(\phi_0, Y_0)$$

$$= \int^t D_1F(Z_s)\,d\phi_s + \int^t D_2F(Z_s)\,dY_s$$

$$+ \int^t \underbrace{\tfrac{1}{2}(D_{12}F + D_{21}F)}_{\equiv 1}(Z_s)\;d\langle m^\phi, m^Y\rangle$$

wobei m^ϕ, m^Y den stet. Martingalteil von ϕ bzw Y bezeichnet

$$= \int^t Y_s\,d\phi_s + \int^t \phi_s\,dY_s + \langle m^\phi, m^Y\rangle_t\,.$$

Mit $d\phi_s = \dots$ wie oben und $X = \phi\cdot Y$:

$$(*)\quad \int Y_s\,d\phi_s = \int c\,\underline{\underline{X_s}}\,ds + \int 6\,\underline{\underline{X_s}}\,dW_s\,.$$

Mit $dY_s = (c-6d)\,\phi^{-1}ds + d\,\phi^{-1}dW_s$ u. Def von Y:

$$\int \phi_s\,dY_s = (c-6d)\int \phi_s\phi_s^{-1}\,ds + d\int \phi_s\phi_s^{-1}\,dW_s$$

$$= (c-6d)\cdot \mathrm{id} + d\cdot W$$

Berechne noch

$$\langle m^\phi, m^Y\rangle_t \overset{5.15}{=} 6\cdot d\cdot \int^t \phi_s\,\phi_s^{-1}\,d\underbrace{\langle W\rangle_s}_{=ds}$$

$$= 6\cdot d\cdot t$$

und zusammen folgt

$$X_t - \xi = \int_0^t Y_s \, d\phi_s + \int_0^t \phi_s \, dY_s + \langle m^\phi, m^Y \rangle_t$$

$$= \Big[\int_0^t \rho X_s \, ds + \int_0^t \sigma X_s \, dW_s \Big]$$

$$+ \Big[(c - \underline{\underline{\sigma d}})\, t + d \cdot W_t \Big]$$

$$+ \underline{\underline{\sigma \cdot d}} \cdot t$$

$$= \int_0^t (\rho X_s + c)\, ds + \int_0^t (\sigma X_s + d)\, dW_s .$$

Damit ist X eine Lösung der SDE (*). □

7.20 Bsp. (Geometrische Brownsche Bew.) Spezialfall von 7.19 mit $c = d = 0$: die eindeutige starke Lösung von

$$dX_t = \rho \cdot X_t \, dt + \sigma X_t \, dW_t$$

zum Startwert $\xi \in L^2(P)$ ist der Prozeß $X = (X_t)_{t \geq 0}$:

$$X_t := \xi \cdot e^{\sigma W_t + (\rho - \frac{\sigma^2}{2}) t} = \xi e^{\rho t} \mathcal{E}(\sigma W)_t$$

(in 7.19: $c = d = 0$, also $Y \equiv \xi$), $\mathcal{E}(\sigma W)$ wie in 7.3'.

Kontext Finanzmathematik (→ Karatzas-Shreve S. 378): X beschreibt Preis einer Aktie in einem Umfeld, in dem sich der Preis $\pi = (\pi_t)_{t \geq 0}$ der festverzinslichen Papiere gemäß

$$d\pi_t = \rho \pi_t \, dt \quad , t \geq 0$$

entwickelt: hier ρ ein zeitl. konstanter Zinssatz.

7.21 Bsp (Ornstein–Uhlenbeck–Prozeß): Spezialfall von 7.19 mit $\sigma \equiv 0$, $\gamma := \alpha > 0$, $\tilde{\varrho} := -\varrho \in \mathbb{R}$: die eindeutige starke Lösung von

$$dX_s = (c - \tilde{\varrho} X_s)\,ds + \gamma\, dW_s$$

zum Anfangswert $\xi \in L^2(P)$ ist

$$X = \phi \cdot Y$$

mit

$$\begin{cases} \phi_t := e^{-\tilde{\varrho} t} \text{ deterministisch}, \quad t \geq 0, \\ Y_t := \xi + c\int_0^t \phi_s^{-1}\,ds + \gamma \int_0^t \phi_s^{-1}\,dW_s \end{cases}$$

d.h.

$$X_t = e^{-\tilde{\varrho} t}\left(\xi + c\int_0^t e^{+\tilde{\varrho} s}\,ds + \gamma\int_0^t e^{+\tilde{\varrho} s}\,dW_s\right)$$

$$= \xi \underbrace{e^{-\tilde{\varrho} t}}_{\substack{\text{Abklingen}\\ \text{über }]0,t]}} + \int_0^t \underbrace{e^{-\tilde{\varrho}(t-s)}}_{\substack{\text{Abklingen}\\ \text{über }]s,t]}} \underbrace{c\,ds}_{\substack{\text{det. Input}\\ \text{z. Zt } s}} + \int_0^t \underbrace{e^{-\tilde{\varrho}(t-s)}}_{\substack{\text{Abklingen}\\ \text{über }]s,t]}} \underbrace{\gamma\, dW_s}_{\substack{\text{random input}\\ \text{z. Zt } s}}$$

genau wie in 4.20' angestrebt. □

Insbes. für $c = 0$:

$$X_t = e^{-\tilde{\varrho} t} \cdot \int_0^t e^{+\tilde{\varrho} s} \gamma\, dW_s = \gamma \int_0^t e^{-\tilde{\varrho}(t-s)}\, dW_s .$$

Anwendung: $S(\cdot)$ det. stetige T-per. Fkt, $\int_0^T S(t)\,dt = 0$

$$dY_s = \left(S(s) - \tau Y_s \right) ds + \sigma\, dW_s$$

mit Lösung

$$\begin{cases} Y = R + X \\ dX_t = -\tau X_s\, ds + \sigma\, dW_s, \quad X_0 \equiv x_0 \\ R(t) := r e^{-\tau t} + \int_0^t e^{-\tau(t-s)} S(s)\, ds, \quad R(0) = r \end{cases}$$

Anwendung: Modellierungen in Biologie, Physik, Signalübertragung