Reinhard Höpfner, Institut für Mathematik, Universität Mainz, Sommersemester 2020

VORLESUNG STOCHASTIK III (STOCHASTISCHE ANALYSIS)

Ausführliche Erklärungen und Lösungen
zur Übungsaufgabe 5.1 **July 18, 2020**

Aufgabe 5.1 : Auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ seien unabhängige Prozesse

B Standard-Brownsche Bewegung , N , $N^{(i)}$, $i \in I\!N$, Standard-Poisson mit Parameter λ

gegeben, mit dasselben $0 < \lambda < \infty$. T_n bezeichne die Zeit des n-ten Sprunges von N, $T_n^{(i)}$ die Zeit des n-ten Sprunges von $N^{(i)}$. Sei $I\!F$ eine Filtration in $\mathcal{A}$, so dass B und alle N, $N^{(i)}$ $I\!F$-adaptiert sind, unabhängige Zuwächse bezüglich $I\!F$ besitzen, und so dass die üblichen Hypothesen erfüllt sind. Sei $\{(\sigma_k^{(n)})_k : n \in I\!N\}$ ein Netz von $I\!F$-Stopzeiten für B, d.h. für jedes $n \in I\!N$ gilt

$$\sigma_0^{(n)} = 0 \quad , \quad \sigma_k^{(n)} = \inf\left\{ t > \sigma_{k-1}^{(n)} \; : \; \left| B_t - B_{\sigma_{k-1}^{(n)}} \right| > \frac{1}{n} \text{ oder } t - \sigma_{k-1}^{(n)} > \frac{1}{n} \right\} \; , \; k \in I\!N \; .$$

Betrachte

$$Y := (\, B_t + (N_t - \lambda t)\,)_{t \geq 0} \; ,$$

$$M^{(n)} := \left(1_{[[T_n, \infty[[}(t) - \int_0^t \lambda\, 1_{]]T_{n-1}, T_n]]}(s)\, ds \right)_{t \geq 0} \; ,$$

$$X^{(m)} := \left(B_t + \sum_{i=1}^m 2^{-i} \left(1_{[[T_1^{(i)}, \infty[[}(t) - \lambda(t \wedge T_1^{(i)}) \right) \right)_{t \geq 0} \; ,$$

$$X^{(\infty)} := \left(B_t + \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} \left(1_{[[T_1^{(i)}, \infty[[}(t) - \lambda(t \wedge T_1^{(i)}) \right) \right)_{t \geq 0} \; ;$$

sei X eine cadlag-Modifikation von $X^{(\infty)}$.

a) Für jedes $n \in I\!N$ gilt: $M^{(n)} \in \mathcal{M}^2$; $L^2(M^{(n)})$ ist die Klasse aller vorhersehbaren Prozesse $H = (H_t)_{t \geq 0}$ mit der Eigenschaft $E\left(\int_{T_{n-1}}^{T_n} H_s^2\, ds \right) < \infty$.

b) Die Prozesse Y, $X^{(m)}$ und X sind in $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}(P, I\!F)$.

c) $L^2_{\text{loc}}(X)$ ist die Klasse aller vorhersehbaren Prozesse H so dass $\int_0^\bullet H_s^2\, ds \in \mathcal{A}_{\text{loc}}$.

d) Zeige: für jedes $m < \infty$ und jedes $0 < t < \infty$ gilt

$$\left\langle X^{(m)} \right\rangle_t = t + \sum_{i=1}^m 2^{-2i}\, \lambda\, (t \wedge T_1^{(i)})$$

e) Zeige: für jedes $m<\infty$ und jedes $0<t<\infty$ gilt P-stochastische Konvergenz für $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(X^{(m)}_{t\wedge\sigma^{(n)}_k}-X^{(m)}_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k-1}}\right)^2 \quad\longrightarrow\quad t\;+\sum_{0<s\le t}|(\Delta X^{(m)})_s|^2 \quad=\quad t\;+\;\sum_{i=1}^{m}2^{-2i}\,1_{\{T^{(i)}_1\le t\}}\;.$$

f) Wie kann man mithilfe eines sehr elementaren Argumentes aus der Aussage a) einen Beweis für

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(X_{t\wedge\sigma^{(n)}_k}-X_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k-1}}\right)^2 \quad\longrightarrow\quad t\;+\sum_{0<s\le t}|(\Delta X)_s|^2 \quad\overset{\text{a.s.}}{=}\quad t\;+\;\sum_{i=1}^{\infty}2^{-2i}\,1_{\{T^{(i)}_1\le t\}}\;.$$

herleiten?

Lösungen zu 5.1 : Seien unabhängige Prozesse B (Standard-Brownsche Bewegung) sowie N, $N^{(i)}$, $i\in\mathbb{N}$ (Standard-Poisson mit Parameter $\lambda>0$) auf $(\Omega,\mathcal{A},P)$ gegeben. Definiere dazu eine Filtration

$$\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}\quad,\quad \mathcal{F}_t\;=\;\sigma\left(\bigcap_{r>t}\sigma\left(\mathcal{G}^B_r,\,\mathcal{G}^N_r,\,\mathcal{G}^{N^{(i)}}_r,\,i\in\mathbb{N}\right),\,\mathcal{N}^P\right)\quad,\quad t\ge0$$

mit $\mathcal{G}^B_r:=\sigma(B_s:0\le s\le r)$, $\mathcal{G}^N_r:=\sigma(N_s:0\le s\le r)$ etc, mit $\mathcal{N}^P$ Klasse aller Teilmengen von P-Nullmengen in $\mathcal{A}$, in Analogie zu 7.9. Dann genügt $\mathbb{F}$ den 'üblichen Bedingungen', und die genannten Prozesse sind $\mathbb{F}$-adaptiert und haben $\mathbb{F}$-unabhängige Zuwächse.

1) Wir betrachten zuerst den kompensierten Poissonprozess $M:=N-\lambda\,\mathrm{id}$, schreiben $(T_n)_n$ für die Zeiten der sukzessiven Sprünge von M, und bilden den Prozess

$$M^{(n)}\;:=\;\left(1_{[[T_n,\infty[[}(t)-\int_0^t\lambda\,1_{]]T_{n-1},T_n]]}(s)\,ds\right)_{t\ge0}$$

wie in Aufgabenteil a) definiert. Zuerst sind alle $(T_n)_n$ $\mathbb{F}$-Stopzeiten, nach Konstruktion der Filtration. Die Unabhängigkeit der Zuwächse im Poissonprozess impliziert das folgende:

$$\widetilde{M}\;:=\;\left(M-M_{T_{n-1}}\right)1_{]]T_{n-1},\infty[[}$$

ist *nach der Zeit* T_{n-1} ein Poissonprozess mit Parameter λ, der von $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$ unabhängig ist (Online-Skript Stochastik I+II, Kapitel 13.D, starke Markoveigenschaft, 13.37–13.39). Folglich muss gelten

$$\langle\,\widetilde{M}\,\rangle_t\;=\;\int_0^t\lambda\,1_{]]T_{n-1}\,,\infty[[}(s)\,ds\quad,\quad t\ge0\;.$$

Einfrieren dieses lokalen Martingals $\widetilde{M}\in\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ zur Zeit *seines* ersten Sprunges (dieser geschieht zur Zeit T_n) liefert wieder ein lokales Martingal in $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$. Dieses stimmt aber überein mit dem oben definierten Prozess $M^{(n)}$. Also gilt $M^{(n)}\in\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ und

$$d\,\langle\,M^{(n)}\,\rangle_s\;=\;\lambda\,1_{]]T_{n-1}\,,T_n]]}(s)\,ds\quad,\quad s\ge0\;.$$

$M^{(n)}$ ist ein Ein-Sprung-Sprungprozess, die Wartezeit $T_n - T_{n-1}$ auf diesen Sprung ist exponentialverteilt, die Sprunghöhe $\equiv 1$. Also ist $M^{(n)} \in \mathcal{M}^2$ hier sogar ein echtes quadratintegrables Martingal. Das Doleansmass zu $(M^{(n)})^2$ auf der vorhersehbaren σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ auf $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ ist

$$\lambda_{(M^{(n)})^2}(A) \;=\; E_P\left(\int_0^\infty (1_A)_s \, d\langle M^{(n)} \rangle_s \right) \;=\; E_P\left(\int_0^\infty (1_A)_s \, \lambda \, 1_{]]T_{n-1}\,,\,T_n]]}(s)\, ds \right) \quad , \quad A \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$$

(3.23, 4.6'). Für vorhersehbare Prozesse $H = (H_s)_{s \geq 0}$ gilt daher

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \Omega} H_s^2 \; d\lambda_{(M^{(n)})^2} \;=\; \lambda \, E_P\left(\int_0^\infty H_s^2 \, 1_{]]T_{n-1}\,,\,T_n]]}(s)\, ds \right) \;=\; \lambda \, E_P\left(\int_{T_{n-1}}^{T_n} H_s^2 \, ds \right) \quad \leq \quad \infty \,.$$

Folglich ist $L^2(M^{(n)})$ der Raum aller vorhersehbaren Prozesse $H = (H_t)_{t \geq 0}$ mit der Eigenschaft $E_P\left(\int_{T_{n-1}}^{T_n} H_s^2 \, ds \right) < \infty$. Damit ist a) bewiesen.

2) Vorüberlegung zu den Aussagen b)–d): wegen Unabhängigkeit von B und $M = N - \lambda\,\mathrm{id}$ gilt

$$\langle B + M \rangle \;=\; \langle B \rangle + \langle M \rangle \;=\; (1+\lambda)\,\mathrm{id}\,.$$

<u>Bew:</u> Für $s < t$ gehe aus von

$$\begin{aligned} B_t M_t - B_s M_s \;&=\; [B_s + (B_t - B_s)][M_s + (M_t - M_s)] \;-\; B_s M_s \\ &=\; M_s(B_t - B_s) + B_s(M_t - M_s) + (B_t - B_s)(M_t - M_s)\,. \end{aligned}$$

Nach Definition der Filtration $\mathbb{F}$ haben sowohl B als auch M (bzw. N) $\mathbb{F}$-unabhängige Zuwächse; B und M unabhängig voneinander; alle B_r, $M_{r'}$ sind L^2-Variable, so dass Produkte hiervon stets in $L^1(P)$ sind. Also gilt für $s < t$ und $F \in \mathcal{F}_s$

$$E\left(1_F \, M_s\,(B_t - B_s)\right) \;=\; E\left(1_F \, B_s\,(M_t - M_s)\right) \;=\; E\left(1_F \,(B_t - B_s)(M_t - M_s)\right) \;=\; 0$$

und damit

$$E\left(1_F\,(B_t M_t - B_s M_s)\right) \;=\; 0\,.$$

Damit ist das Produkt BM ein $(P, \mathbb{F})$-Martingal, folglich hat $(B+M)^2$ denselben $\mathbb{F}$-Kompensator wie $B^2 + M^2$. Aus $\langle B \rangle = \mathrm{id}$ und $\langle M \rangle = \lambda\,\mathrm{id}$ folgt die Behauptung.

3) Schreibe nun $\widehat{M}^{(i)} := N^{(i)} - \lambda\,\mathrm{id}$, $i \in \mathbb{N}$, schreibe $T_n^{(i)}$ für die Zeit des n-ten Sprunges von $\widehat{M}^{(i)}$ (bzw. $N^{(i)}$). Für $i \in \mathbb{N}$ ist nach 3.14 auch $\widehat{M}^{(i)}$ eingefroren zur Zeit $T_1^{(i)}$ seines ersten Sprunges

$$(\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}$$

ein $(P, I\!\!F)$-Martingal. Genauso wie in Schritt 2) argumentierend sieht man, dass

$$B\,\widehat{M}^{(i)} \quad , \quad \widehat{M}^{(i)}\widehat{M}^{(j)} \quad \text{für } j \neq i$$

sowie

$$(*) \qquad B\,(\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}} \quad , \quad (\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}(\widehat{M}^{(j)})^{T_1^{(j)}} \quad \text{für } j \neq i$$

$(P, I\!\!F)$-Martingale sind.

4) Wir beweisen Aussage d) über $X^{(m)}$ sowie die Aussage b) für $Y = B + M$ und $X^{(m)}$, $m \in I\!\!N$. Endliche Summen lokaler Martingale in $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$ sind wieder in $\mathcal{M}^2_{\text{loc}}$. Der Kompensator von Y^2 wurde bereits in Schritt 2) berechnet: $\langle Y\rangle = (1+\lambda)\,\text{id}$. Beim Quadrieren der Summe von Martingalen

$$X^{(m)} \;=\; B \,+\, \sum_{i=1}^{m} 2^{-i}\,(\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}$$

sind alle gemischten Terme nach $(*)$ in Schritt 3) Martingale bezüglich $(P, I\!\!F)$, also gilt

$$\langle\, X^{(m)}\,\rangle \;=\; \langle\, B\,\rangle \,+\, \sum_{i=1}^{m} 2^{-2i}\, \left\langle\, (\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}\,\right\rangle$$

und damit die Aussage d):

$$\langle\, X^{(m)}\,\rangle \;=\; \text{id} \,+\, \sum_{i=1}^{m} 2^{-2i}\,\lambda\,(\,\text{id} \wedge T_1^{(i)}\,)\ .$$

5) Wir beweisen b) für den Prozess X zusammen mit c). Nach Wahl der Stopzeiten $T_1^{(i)}$ und der Skalierungsfaktoren 2^{-i} sind mit Satz 4.2 alle

$$Y^{(m)} \;:=\; \sum_{i=1}^{m} 2^{-i}\,(\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}} \;=\; \sum_{i=1}^{m} 2^{-i}\left(1_{[[T_1^{(i)},\infty[[} - \lambda\,(\,\text{id} \wedge T_1^{(i)}\,)\right)$$

echte quadratintegrable Martingale in $\mathcal{M}^2$, und

$$(Y^{(m)})_m \;\text{ bildet eine Cauchyfolge in } \mathcal{M}^2\ .$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{M}^2$ existiert

$$\widehat{Y} \;\text{ definiert als Limes der Cauchyfolge } (Y^{(m)})_m \text{ in } \mathcal{M}^2\ .$$

Nach Satz 4.3' gilt in $L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ und damit P-stochastisch

$$\sup_{t\in[0,\infty]} \left(Y_t^{(m)} - \widehat{Y}_t\right) \quad \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

nach Satz 4.4 gibt es eine Teilfolge $(m_\ell)_\ell$ so dass

$$Y^{(m_\ell)}(\bullet,\omega) \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{Y}(\bullet,\omega) \quad \text{gleichmässig auf } [0,\infty]$$

für P-fast alle $\omega \in \Omega$. Dies identifiziert den Limesprozess $\widehat{Y} \in \mathcal{M}^2$ als cadlag-Version von

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\, (\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}$$

bis auf P-Ununterscheidbarkeit, und seine spitze Klammer $\langle \widehat{Y} \rangle$ als

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i}\, \lambda\, (\, \mathrm{id} \wedge T_1^{(i)}\,)$$

wegen Unabhängigkeit der $(\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}$, $i \in I\!N$. Insbesondere gilt dann

$$X \;:=\; B \;+\; \widehat{Y} \quad \in\; \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}\;.$$

Damit ist b) auch für den Prozess X bewiesen. Wegen Unabhängigkeit von B und $\widehat{Y}$ ist

$$\langle\, X\, \rangle \;=\; \mathrm{id} \;+\; \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i}\, \lambda\, (\, \mathrm{id} \wedge T_1^{(i)}\,)$$

die spitze Klammer von X. Mit $C := 1 + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i} < \infty$ impliziert dies Abschätzungen

$$ds \;\le\; \langle\, X\, \rangle(ds,\omega) \;\le\; C\, ds \quad , \quad s \ge 0$$

für die Masse $\langle\, X\, \rangle(ds,\omega)$ auf $(I\!R^+, \mathcal{B}(I\!R^+))$, $\omega \in \Omega$. Damit stimmt $L^2_{\mathrm{loc}}(X)$ als Raum aller $I\!F$-vorhersehbaren Prozesse $H = (H_t)_{t\ge 0}$ mit der Eigenschaft

$$\int H_s^2\; d\langle\, X\, \rangle_s \quad \text{ist lokal integrabel}$$

überein mit der Klasse aller $I\!F$-vorhersehbaren Prozesse H, welche der Bedingung

$$\int H_s^2\; ds \quad \text{ist lokal integrabel}$$

genügen. Damit ist die Aussage c) bewiesen. Nun sind alle Aussagen a)–d) vollständig bewiesen.

6) Wir starten in den Nachweis der Aussagen e)+f) zur quadratischen Variation von X bzw. von $X^{(m)}$, und definieren ein Netz $\{(\sigma_k^{(n)})_{k\in I\!N} : n \in I\!N\}$ für die Brownsche Bewegung:

$$\sigma_{k+1}^{(n)} \;:=\; \inf\left\{ t > \sigma_k^{(n)} : |B_t - B_{\sigma_k^{(n)}}| > \frac{1}{n} \right\} \wedge \left(\sigma_k^{(n)} + \frac{1}{n} \right) \;, \quad k \ge 0\;, \quad \sigma_0^{(n)} \equiv 0\;.$$

Entlang dieses Netzes betrachten wir quadratische Zuwächse des Martingals

$$M \;=\; N \;-\; \lambda\, \mathrm{id}$$

mit sukzessiven Sprungzeiten $(T_\ell)_\ell$ und beweisen Konvergenz für $n\to\infty$ auf jedem ω-Pfad

$$(\diamond) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(M_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k+1}}-M_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k}}\right)^2 \quad\longrightarrow\quad \sum_{0<s\le t}(\Delta M)^2_s \;=\; N_t$$

bei festem $0<t<\infty$. Beachte in $(\diamond)$ den strukturellen Unterschied zu dem Verhalten quadratischer Variationen *stetiger* Semimartingale nach den Sätzen 6.5 und 6.6 !

Zum Beweis von $(\diamond)$ schreibe kurz

$$\Delta^{(n)}_{k,t} := \left(M_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k}}-M_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k-1}}\right) \quad , \quad k\in I\!N$$

und definiere Ereignisse

$$I^{(n)}_{k,t} \;:=\; \left\{\, \sigma^{(n)}_{k-1}<T_\ell\le\sigma^{(n)}_{k}\le t \;\text{ für ein } \ell\in I\!N \,\right\} \quad , \quad \omega\in\Omega\,.$$

Für jedes $\omega\in\Omega$ hat der Pfad $N_\bullet(\omega)$ endlich viele Sprünge auf kompakten Zeitintervallen, mit strikt positiven Wartezeiten zwischen sukzessiven Sprüngen. Für hinreichend grosse $n\in I\!N$ enthalten wegen $\sigma^{(n)}_k-\sigma^{(n)}_{k-1}\le\frac{1}{n}$ die stochastischen Intervalle $]]t\wedge\sigma^{(n)}_{k-1}\,,\,t\wedge\sigma^{(n)}_{k}]]$, $k\in I\!N_0$, *höchstens noch einen* Sprung von M. Das impliziert für hinreichend grosse n

$$\Delta^{(n)}_{k,t} \;=\; \left\{\begin{array}{ll} 1\,-\,\lambda\left(t\wedge\sigma^{(n)}_k\,-\,t\wedge\sigma^{(n)}_{k-1}\right) & \text{auf } I^{(n)}_{k,t} \\ -\,\lambda\left(t\wedge\sigma^{(n)}_k\,-\,t\wedge\sigma^{(n)}_{k-1}\right) & \text{auf } \Omega\setminus I^{(n)}_{k,t} \end{array}\right\} \quad , \quad k\in I\!N$$

In der Zerlegung

$$(\times) \qquad \sum_k\left(\Delta^{(n)}_{k,t}\right)^2 \;=\; \sum_k 1_{\Omega\setminus I^{(n)}_{k,t}}\Delta^{(n)}_{k,t}\Delta^{(n)}_{k,t} \;+\; \sum_k 1_{I^{(n)}_{k,t}}\left(\Delta^{(n)}_{k,t}\right)^2$$

kann die erste Summe auf der r.h.s. wegen $\sigma^{(n)}_k-\sigma^{(n)}_{k-1}\le\frac{1}{n}$ durch

$$\le\quad \lambda\,\frac{1}{n}\sum_k 1_{\Omega\setminus I^{(n)}_{k,t}}\left|\Delta^{(n)}_{k,t}\right| \quad\le\quad \lambda\,\frac{1}{n}\,|||M|||_t$$

abgeschätzt werden. Weil M BV-Pfade hat, ist die Totalvariation $|||M|||_t$ über $[0,t]$ endlich. Daher verschwindet $\frac{1}{n}\,|||M|||_t$ für $n\to\infty$ auf jedem ω-Pfad. Auf jedem ω-Pfad gilt nach Definition von $I^{(n)}_{k,t}$ aber auch die Konvergenz

$$\sum_k 1_{I^{(n)}_{k,t}}\left(\Delta^{(n)}_{k,t}\right)^2 \quad\longrightarrow\quad \sum_k 1_{I^{(n)}_{k,t}}\cdot 1 \;=\; N_t \;=\; \sum_{0<s\le t}(\Delta M)^2_s$$

für $n\to\infty$. Die Zerlegung $(\times)$ impliziert daher auf jedem ω-Pfad die Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(M_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k}}-M_{t\wedge\sigma^{(n)}_{k-1}}\right)^2 \quad\longrightarrow\quad N_t \;=\; \sum_{0<s\le t}(\Delta M)^2_s$$

für $n \to \infty$ wie in $(\diamond)$ behauptet.

7) In einem Zwischenschritt betrachten wir als nächstes die Summe

$$Z := B + M \quad \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$$

aus Brownscher Bewegung B und kompensiertem Poissonprozess $M = N - \lambda\,\mathrm{id}$ und zeigen:

$$(\diamond\diamond) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(Z_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - Z_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad \langle B \rangle_t + \sum_{0<s\le t} (\Delta M)_s^2 \; = \; t + N_t$$

P-stochastisch für $n \to \infty$. Dies sieht man so. Wegen $|B_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}}| \le \frac{1}{n}$ (nach Definition des Netzes für B) verschwindet die quadratische Kovariation zwischen der Brownschen Bewegung B und dem kompensierten Poissonprozess $M = N - \lambda\,\mathrm{id}$ auf jedem ω-Pfad für $n \to \infty$:

$$(\circ) \qquad \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - M_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right) \left(B_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right) \right| \quad \le \quad \frac{1}{n}\, |||M|||_t \quad \longrightarrow \quad 0\,.$$

Also bleibt zu betrachten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(B_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(M_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - M_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2$$

für $n \to \infty$: für den ersten Summanden gilt P-stochastische Konvergenz für $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(B_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - B_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad \langle B \rangle_t = t$$

nach den Sätzen 6.5 und 6.6, für den zweiten Summanden benutzt man Schritt 6).

8) In einem weiteren Zwischenschritt betrachten wir

$$\widehat{M}^{(i)} = N^{(i)} - \lambda\,\mathrm{id} \quad , \quad \widehat{M}^{(j)} = N^{(j)} - \lambda\,\mathrm{id} \quad , \quad i \neq j$$

in $\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}$ und zeigen: für

$$Z := \widehat{M}^{(i)} + \widehat{M}^{(j)} \quad , \quad i \neq j$$

gilt P-fast sichere Konvergenz für $n \to \infty$

$$(\diamond\diamond\diamond) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(Z_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - Z_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad \sum_{0<s\le t} (\Delta\widehat{M}^{(i)})_s^2 + \sum_{0<s\le t} (\Delta\widehat{M}^{(j)})_s^2 \quad = \quad N_t^{(i)} + N_t^{(j)}\,.$$

Der Beweis –mit ähnlichen Argumenten wie in den Schritten 6) und 7)– beruht darauf, dass $\widehat{M}^{(i)}$ und $\widehat{M}^{(j)}$ für $i \neq j$ P-fast sicher keine gemeinsamen Sprünge aufweisen. Daher verschwinden die quadratischen Kovariationen zwischen $\widehat{M}^{(i)}$ und $\widehat{M}^{(j)}$ für $i \neq j$

$$(\circ\circ) \qquad \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(\widehat{M}^{(i)}_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - \widehat{M}^{(i)}_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right) \left(\widehat{M}^{(j)}_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - \widehat{M}^{(j)}_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right) \right| \quad \longrightarrow \quad 0 \quad \text{falls } i \neq j$$

P-fast sicher für $n \to \infty$.

9) Der Beweis der Aussage e) für die endlichen Summenprozesse $X^{(m)}$ folgt (nach Skalieren und Einfrieren der $\widehat{M}^{(i)}$ zu den Zeiten $T_1^{(i)}$ des jeweils ersten Sprunges) wie in $(\diamond\diamond)$ und $(\diamond\diamond\diamond)$.

10) Der Beweis der Aussage f) für den Prozess X ergibt sich aus einem Cauchyfolgenargument in $\mathcal{M}^2$: analog zu $(\diamond\diamond\diamond)$ in Schritt 8) erhält man für jedes festgehaltene Paar $m_1 < m_2$ für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
&\sum_k \left(X^{(m_2)}_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - X^{(m_2)}_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad - \quad \sum_k \left(X^{(m_1)}_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - X^{(m_1)}_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \\
= &\sum_{i=m_1+1}^{m_2} 2^{-2i} \left((\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - (\widehat{M}^{(i)})^{T_1^{(i)}}_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad + \quad o_P(1) \\
= &\sum_{i=m_1+1}^{m_2} 2^{-2i}\, 1_{\{T_1^{(i)} \le t\}} \quad + \quad o_P(1)
\end{aligned}$$

wobei $o_P(1)$ Terme zusammenfasst, die für $n \to \infty$ (mindestens) P-stochastisch verschwinden. Dies zeigt, dass die unendliche Summe in f) beliebig gut approximiert wird durch die endlichen Summen

$$\sum_k \left(X^{(m)}_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - X^{(m)}_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad , \quad m \to \infty$$

welche in e) betrachtet wurden. Folglich gilt

$$\sum_k \left(X_{t\wedge\sigma_k^{(n)}} - X_{t\wedge\sigma_{k-1}^{(n)}} \right)^2 \quad \longrightarrow \quad t \,+ \sum_{0<s\le t} |(\Delta X)_s|^2 \quad \overset{\text{a.s.}}{=} \quad t \,+ \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i}\, 1_{\{T_1^{(i)} \le t\}}$$

P-stochastisch für $n \to \infty$, wie in f) behauptet. $\square$