Akad. Rätin Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 1

1. Es sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass durch die beiden folgenden Definitionen jeweils eine Topologie auf X definiert wird:

   (a) $\mathcal{T}_1 := \{Y \subset X | X \setminus Y \text{endlich}\} \cup \{\emptyset\}$;

   (b) $\mathcal{T}_2 := \{Y \subset X | X \setminus Y \text{abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$.

   Zeigen Sie $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ und geben Sie ein Beispiel einer Menge an, auf der $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

   (25 Punkte)

2. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, wenn für jede offene Menge $V \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subset X$ offen ist.

   Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen $X = (X, d_X)$ und $Y = (Y, d_Y)$ heißt $\varepsilon - \delta -$*stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x_0 \in X$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass für alle $x \in X$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$ folgt, dass $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

   Zeigen Sie, dass für metrische Räume folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) f ist $\varepsilon - \delta -$ stetig

   (b) für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Punkt $y \in Y$ ist $f^{-1}(U_\varepsilon(y)) \subset X$ offen

   (c) f ist stetig

   (25 Punkte)

3. Es sei $F \subset \mathbb{R}^2$ eine sternförmige Menge mit Sternpunkt $p \in F$. Für Punkte $x, y \in F$ definieren wir dann

$$d(x,y) = \begin{cases} ||x-y||, & \text{falls } p \text{ auf einer Geraden durch } x \text{ und } y \text{ liegt} \\ ||x-p|| + ||p-y||, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf F ist und beschreiben Sie die $\varepsilon-$Umgebungen $U_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon > 0$ und $x \in F$ bezüglich d. (Skizze)

   (25 Punkte)

4. Es sei $(X;d)$ ein metrischer Raum. Wir definieren die Abbildung $\overline{d}\colon X\times X \to \mathbb{R}$ durch $\overline{d}(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{d}$ eine Metrik auf X ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\overline{d}$ beschränkt ist (d. h. es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $d(x,y) \leq c$ für alle $x,y \in X$. Wie lässt sich $d(x,y)$ aus $\overline{d}(x,y)$ berechnen?

(c) Zeigen Sie, dass beide Metriken die gleiche Topologie erzeugen.

Folglich wird die Topologie eines jeden metrischen Raumes bereits von einer beschränkten Metrik erzeugt.

(25 Punkte)