Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Übungsblatt 10

1. **Untergruppen freier Gruppen sind frei**

   Zeigen Sie:

   a) Die Fundamentalgruppe eines endlichen zusammenhängenden Graphen Γ ist frei vom Rang $1-\chi(\Gamma)$.

   b) Eine Untergruppe U vom Index k einer freien Gruppe F_n ist frei vom Rang $kn-k+1$.

(20 Punkte)

2. **Homologie eines Kettenkomplexes**

   Wir betrachten die Folge von Abbildungen

$$\underline{\mathbf{C}}\textbf{:} \quad 0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_1} C_1 \xrightarrow{\partial_0} C_0 \longrightarrow 0$$

   mit $C_2 = C_0 = \mathbb{Z}^2, C_1 = \mathbb{Z}^3$ und den Abbildungen ∂_i gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix $D_i,\ i = 1,2$, wobei $D_1 = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 18 & 12 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$ und $D_0 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

   a) Zeigen Sie, dass $(\underline{\mathbf{C}}, \partial)$ ein Kettenkomplex ist.

   b) Berechnen Sie die Homologiegruppen $H_i(\underline{\mathbf{C}})$ des Kettenkomplexes $(\underline{\mathbf{C}}, \partial)$.

(20 Punkte)

3. **Tensorprodukt von Kettenkomplexen**

   Es seien (M, ∂^M) und (N, ∂^N) Kettenkomplexe. Wir setzen

$$P_n := \bigoplus_{k+\ell=n} M_k \otimes N_\ell$$

   und definieren eine Abbildung $\partial_n \colon P_n \to P_{n-1}$ durch

$$\partial_n(a \otimes b) := \partial_k^M(a) \otimes b + (-1)^k a \otimes \partial_\ell^N(b)$$

   für $a \in M_k$ und $b \in N_\ell$.

   a) Rechnen Sie nach, dass (P, ∂) ein Kettenkomplex ist. Diesen nennt man das *Tensorprodukt* der Kettenkomplexe M und N und schreibt $P = M \bigotimes N, \partial = \partial^M \otimes \partial^N$.

   b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : M \bigotimes N \to N \bigotimes M$ gegeben durch $T(a \otimes b) = (-1)^{kl} b \otimes a$ für $a \in M_k$ und $b \in N_\ell$ ein Isomorphismus von Kettenkomplexen ist.

(30 Punkte)

4. **Basis einer Topologie der universellen Überlagerung**

   In Abschnitt 6.8 hatten wir zu einem punktierten topologischen Raum (X, x) mit guten Zusammenhangseigenschaften einen Raum

   $$Y := \{[\gamma] | \, \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit Anfangspunkt } x\},$$

   definiert und bezüglich einer guten Basis $\mathcal{B}$ der Topologie von X zu $\gamma(1) \in U \in \mathcal{B}$ Mengen

   $$\mathcal{U}_{[\gamma]} := \{[\gamma \bullet \delta] \mid \delta \text{ Weg in } U \text{ mit } \delta(0) = \gamma(1)\} \subset Y.$$

   definiert, von denen wir behaupten, dass sie die Basis einer Topologie auf Y bilden.

   Zeigen Sie hierzu:

   i) $[\delta] \in \mathcal{U}_{[\gamma]} \Rightarrow \mathcal{U}_{[\delta]} = \mathcal{U}_{[\gamma]}$

   ii) Die Überlagerungsabbildung $p\colon Y \to X$ definiert durch $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ bildet $\mathcal{U}_{[\gamma]}$ bijektiv auf U ab.

   iii) $U, V \in \mathcal{B}, U \subset V, \gamma(1) \in U \Rightarrow U_{[\gamma]} \subset V_{[\gamma]}$

   iv) Die $\mathcal{U}_{[\gamma]}$ für $U \in \mathcal{B}$ und $\gamma(1) \in U$ bilden eine Basis für eine Topologie auf Y.

(30 Punkte)