Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 11

1. **n-te Homologie**

   Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f : S^n \to S^n$ automatisch surjektiv ist, falls die induzierte Abbildung $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ von Null verschieden ist.

   (15 Punkte)

2. **Funktorialität**

   Zeigen Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz in Dimension n ($n \in \mathbb{N}$).

   (Sie dürfen dabei benutzen, dass die n-te Homologiegruppe einer n-dimensionalen, triangulierbaren, orientierbaren Mannigfaltigkeit $\mathbb{Z}$ ist. Der Erzeuger ist der Fundamentalzyklus aus dem Beispiel in 7.8).

   (20 Punkte)

3. **Wegekomponenten**

   Es sei X ein topologischer Raum mit Wegekomponenten $X_a, a \in A$.

   Zeigen Sie:

   a) Die Inklusionsabbildungen $i_a \colon X_a \to X$ induzieren einen Isomorphismus der Homologiegruppen
   $$\bigoplus_{a \in A} H_k(X_a) \cong H_k(X)$$

   b) $H_0(X)$ ist isomorph zu dem von $\pi_0(X)$ erzeugten freien $\mathbb{Z}$-Modul, also $H_0(X) \cong \mathbb{Z}\langle \pi_0(X) \rangle$

   (25 Punkte)

4. **Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe**

   Wir wollen zeigen, dass die Abelianisierung der Fundamentalgruppe eines wegzusammenhängenden topologischen Raumes X isomorph zu seiner ersten Homologiegruppe ist
   $$\pi_1^{\mathrm{ab}}(X, x_0) \cong H_1(X)$$

   Eine mögliche Vorgehensweise ist diese: Man benutzt den natürlichen Homöomorphismus $h \colon [0,1] \to \Delta_1$ vom Einheitsintervall zum Standard-1-Simplex, definiert durch $t \mapsto te_1 + (1-t)e_0$, um Abbildungen f und g zu definieren:
   $$f \colon \pi_1^{\mathrm{ab}}(X, x_0) \to H_1(X) \text{ durch } [\alpha] \mapsto [\alpha \circ h^{-1}].$$
   und
   $$g \colon H_1(X) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X, x_0) \text{ durch } [\sigma] \mapsto [\gamma_{\sigma(e_0)} * (\sigma \circ h) * \gamma_{\sigma(e_1)}^{-1}].$$
   Dabei bezeichnet γ_x einen beliebigen Weg vom Basispunkt x_0 zum Punkt $x \in X$

   Zu zeigen ist dann, dass f und g wohldefinierte Homomorphismen sind, die zueinander invers sind.

   (40 Punkte)