Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 2

1. **Abschluss, Inneres, Komplement**

   Es sei X ein topologischer Raum. Für jede Teilmenge $V \subset X$ ist

   $$\bar{V} = \bigcap_{\substack{A \supset V \\ A \text{ abg.}}} A$$

   der Abschluss von V in X,

   $$V^o = \bigcup_{\substack{U \subset V \\ U \text{ offen}}} U$$

   das Innere von V in X und $V^c := X \setminus V$ das Komplement von V in X.

   a) Zeigen Sie, dass $V^o \subset V \subset \bar{V}$.

   b) Zeigen Sie, dass aus $V \subset W$ sowohl $W^c \subset V^c$ als auch $\bar{V} \subset \bar{W}$ und $V^o \subset W^o$ folgt.

   c) Zeigen Sie, dass $(V^c)^c = V, \bar{\bar{V}} = \bar{V}$ und $(V^o)^o = V^o$ gelten.

   d) Zeigen Sie, dass $\bar{V} = ((V^c)^o)^c$ und $V^o = (\overline{V^c})^c$.

   e) Zeigen Sie, dass $\overline{(\overline{V^o})^o} = \overline{V^o}$ und $\overline{((\bar{V})^o)}^o = (\bar{V})^o$ gelten. Können Sie jeweils ein konkretes Beispiel mit $(\overline{V^o})^o \neq V^o$ und $\overline{((\bar{V})^o)} \neq (\bar{V})$ angeben?

   f) Leiten Sie aus c), d) und e) ab, dass sich maximal 14 verschiedene Teilmengen von X erzeugen lassen dadurch, dass man auf eine Teilmenge V die Operationen *Abschluss* und *Komplement* in X beliebig oft und beliebig kombiniert anwendet.

   (30 Punkte)

2. **Konvergenz von Folgen**

   Es sei $X = (X, d_X)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt $\varepsilon - n_0$-*konvergent*, wenn ein $x \in X$ existiert derart, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

   Die Folge $(x_n)_n$ heißt *konvergent* gegen $x \in X$, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ mit $x \in U$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

   Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   a) Die Folge $(x_n)_n$ $\varepsilon - n_0-$konvergiert gegen x.

   b) für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $x_n \in U_\epsilon(x)$ für alle $n \geq n_0$.

   c) Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert gegen x.

   (10 Punkte)

3. **Der projektive Raum**

Es sei $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ die natürliche Projektion auf den komplex-projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{C}P^n \to \mathrm{Herm}^{n+1}(\mathbb{C}) := \left\{ A \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \mid A^* = A \right\}.$$

definiert durch $v \mapsto \frac{1}{v^*v} vv^*$, $v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist eine Einbettung (Homöomorphismus aufs Bild) von $\mathbb{C}P^n$ in den Raum $\mathrm{Herm}^{n+1}(\mathbb{C})$ der Hermiteschen Matrizen.

(30 Punkte)

4. **Quadrat mit Kantenverklebungen**

Gegeben sei ein Quadrat $[0,1] \times [0,1]$. In (a) und (c) untersuchen wir Quotientenräume, die durch Verheften gegenüberliegender Kanten aus dem Quadrat hervorgehen.

(a) Der *zweidimensionale Torus* T^2 entsteht durch gleichsinniges Verheften (via $(0,t) \sim (1,t)$ und $(s,0) \sim (s,1)$). Begründen Sie, dass die Zuordnung $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $(s,t) \mapsto (e^{2\pi is}, e^{2\pi it})$ eine Einbettung von T^2 in $\mathbb{C}^2$ ergibt.

(b) Begründen Sie, dass die Ringwurst (zweidimensionale Sphäre modulo Verklebung des Nordpols mit dem Südpol) in $\mathbb{R}^3$ einbettet.

(c) Begründen Sie, dass bei Vorliegen einer gegensinnigen und einer gleichsinnigen Verheftung stets eine Sphäre mit zwei Kreuzhauben entsteht. (Hinweis: cut and paste)

(30 Punkte)