Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 3

1. **Diagonale im Hausdorffraum**

   Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x,x) \in X \times X | x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist.

   (25 Punkte)

2. **Produkt metrischer Räume**

   Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume. Dann ist die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf $X_1 \times X_2$ metrisierbar.

   (25 Punkte)

3. **Produkt von Hausdorff-Räumen**

   Zeigen Sie: Ist $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume, so gilt:

   $$X_i \text{ ist hausdorffsch für alle } i \in I \Longrightarrow X = \prod_{i \in I} X_i \text{ ist hausdorffsch.}$$

   Sind alle X_i nicht leer, so gilt auch die Umkehrung.

   (25 Punkte)

4. **Quasi-Zusammenhangskomponente**

   Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$ ein Punkt, so nennt man

   $$Q(x) = \bigcap \{A \mid A \text{ offen und abgeschlossen in } X, x \in A\}$$

   die *Quasi-Zusammenhangskomponente* von x. Zeigen Sie:

   a) Die Menge der Quasi-Zusammenhangskomponenten von X bildet eine Zerlegung von X, d.h. sind $x, y \in X$ zwei Punkte, dann sind die zugehörigen Quasi-Zusammenhangskomponenten $Q(x)$ und $Q(y)$ entweder gleich oder disjunkt.

   b) Die Quasi-Zusammenhangskomponente $Q(x)$ eines Punktes $x \in X$ ist stets abgeschlossen. Geben Sie ein Beispiel eines topologischen Raumes an, in dem mindestens eine Quasi-Zusammenhangskomponente nicht offen ist.

   c) Es sei x ein Punkt in X. Dann gilt $W(x) \subset Z(x) \subset Q(x)$, wobei $W(x)$ die Wegekomponente und $Z(x)$ die Zusammenhangskomponente von x bezeichnet.

   (25 Punkte)