Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 4

1. **Basen**

Es bezeichne d_{std} die (euklidische) Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ und $\mathcal{T}_{\text{std}}$ die Standardtopologie. Wir nennen $D \subset \mathbb{R}$ *diskret* (bezüglich $\mathcal{T}_{\text{std}}$), wenn es für alle $x \in D$ ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $U_\varepsilon(x) \cap D$ endlich ist.

a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Basen von Topologien auf $\mathbb{R}$ sind:

$\mathcal{B}_1 = \{(-\infty, a], [b, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_2 = \{(-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{B}_3 = \{[b, \infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_4 = \{(-\infty, a), (b, \infty) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{B}_5 = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_6 = \{(b, \infty) \mid b \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{B}_7 = \{\mathbb{R} \setminus E \mid E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_8 = \{\mathbb{R} \setminus A \mid A \subset \mathbb{R} \text{ abzählbar}\}$
$\mathcal{B}_9 = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_{10} = \{[a, b] \mid a < b \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{B}_{11} = \{[0, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_{12} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$\mathcal{B}_{13} = \{N \subset \mathbb{R} \mid 0 \in N\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_{14} = \{\mathbb{R} \setminus D \mid D \subset \mathbb{R} \text{ abzählbar und diskret bzgl. } d_{\text{std}}\}$

b) Es sei $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_{\text{std}}$. Zeigen Sie, dass $U = \mathbb{R}$.

c) Es sei $f\colon (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{\text{dis}})$ eine stetige Funktion, wobei $\mathcal{T}_{\text{dis}} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die diskrete Topologie ist. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

d) Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_i$ die Topologie, die von $\mathcal{B}_i$ auf $\mathbb{R}$ erzeugt wird. Dies ist die gröbste Topologie, die $\mathcal{B}_i$ enthält. Sie hat dann automatisch $\mathcal{B}_i$ als Subbasis (nicht zu zeigen).

Ordnen Sie die Topologien $\mathcal{T}_i$ bezüglich der Relation $\subset$. Geben Sie für 10 bezüglich $\subset$ benachbarte Paare $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_j$ Ihrer Wahl jeweils entweder eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die stetig als Funktion $f\colon (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_i)$ und nicht stetig als Funktion $f\colon (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{\text{std}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_j)$ ist oder zeigen Sie gegebenenfalls, dass es für das gewählte Paar keine solche Funktion gibt.

(50 Punkte)

2. **n-Simplex**

Die *konvexe Hülle* einer Menge ist die kleinste abgeschlossene und konvexe Menge, die die gegebene Menge enthält.

Zeigen Sie: Die konvexe Hülle endlich vieler Punkte $x_1, \dots, x_n$ im $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch alle Punkte der Form $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, wobei $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(25 Punkte)

3. **Eigenschaften von CW-Komplexen**

Sei X ein CW-Komplex. Zeigen Sie:

a) X ist hausdorffsch

b) X ist zusammenhängend genau dann wenn X wegzusammenhängend ist.

c) $U \subset X$ ist offen genau dann wenn für alle charakteristischen Abbildungen $\Phi : B^n \to X$, $n \in \mathbb{N}$, das Urbild $\Phi^{-1}(U)$ offen in B^n ist.

(25 Punkte)