Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 5

1. **Universelle Eigenschaft des Produkts topologischer Räume**

   Zeigen Sie: Der Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ einer Familie X_i topologischer Räume mit den kanonischen Projektionen $p_i \colon X \to X_i$ ist durch die folgende universelle Eigenschaft charakterisiert:

   Für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $f \colon Y \to X$ gilt:

   $$f \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f_i := p_i \circ f \text{ ist stetig für alle } i \in I.$$

   (Hinweis: Die (ggf. zu beweisende) Identität: Für Teilräume $Y_i \subseteq X_i$ gilt

   $$f^{-1}(\prod_{i \in I} Y_i) = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(Y_i)$$

   könnte hilfreich sein)

   (25 Punkte)

2. **Gleichmäßige Stetigkeit**

   Definieren Sie den Begriff der *gleichmäßigen Stetigkeit* von Abbildungen zwischen metrischen Räumen X, Y und zeigen Sie für diese:

   Ist X kompakt, so ist jede stetige Abbildung $f \colon X \to Y$ gleichmäßig stetig.

   (15 Punkte)

3. **Homotopieäquivalenz**

   Finden Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen-Orthonormalisierungsverfahrens eine Deformationsretraktion

   $$r \colon GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R})$$

   .

   (Die entsprechenden Eigenschaften sind zu zeigen)

   (25 Punkte)

4. **Einhängung**

Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen den Quotientenraum

$$S(X) := X \times I \diagup \sim$$

mit $I = [0,1]$ und $(x,s) \sim (x',s') :\Leftrightarrow s = s' \in \{0,1\}$ die *Einhängung* oder *Suspension* von X. Zeigen Sie:

a) $S(X)$ ist immer wegzusammenhängend.

b) Ist X wegzusammenhängend, so ist $S(X)$ einfach zusammenhängend.

c) $S(S^{n-1})$ ist homöomorph zu S^n für alle $n \in \mathbb{N}$.
(Hinweis: Starten Sie mit einer stetigen Abbildung $S^{n-1} \times I \to S^n$).

(35 Punkte)