Dr. Cynthia Hog-Angeloni
Laura Biroth, M.Sc.
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

Topologie
WS 2016/17

Übungsblatt 8

1. **Fundamentalgruppe von topologischen Gruppen**

   Es sei G eine Menge und es seien $*$ und $\circ$ zwei Verknüpfungen auf G mit den folgenden Eigenschaften:

   i) Es existieren Elemente $1_*, 1_\circ \in G$ mit der Eigenschaft $1_* * a = a = a * 1_*$ und $1_\circ \circ a = a = a \circ 1_\circ$ für alle $a \in G$.
   ii) Für alle $a, b, c, d \in G$ gilt $(a \circ b) * (c \circ d) = (a * c) \circ (b * d)$.

   Zeigen Sie

   a) $1_* = 1_\circ$
   b) $* = \circ$, d. h. $a * b = a \circ b$ für alle $a, b \in G$
   c) Die Verknüpfung ist kommutativ.
   d) Ist G topologische Gruppe, so ist $\pi_1(G, e)$ abelsch.

   (25 Punkte)

2. **2-blättrige Überlagerungen**

   Bestimmen Sie die Anzahl der wegzusammenhängenden 2-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ und skizzieren Sie diese. Begründen Sie, warum jede dieser Überlagerungen regulär ist.

   (25 Punkte)

3. **Nicht-Homöomorphie der Flächen in Normalform**

   Zu einer Gruppe G bezeichne $[G, G]$ die *Kommutatoruntergruppe* von G, welche erzeugt wird von allen Elementen der Form $ghg^{-1}h^{-1}$ für $g, h \in G$.

   a) Zeigen Sie: $[G, G]$ ist Normalteiler (insb.: Untergruppe) und vollinvariant, d.h. jeder Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$ bildet die Kommutatoruntergruppe von G in diejenige von H ab.
   b) Jeder Homomorphismus $\varphi\colon G \to H$ induziert genau einen Homomorphismus zwischen den Faktorgruppen $\overline{\varphi}\colon G/[G, G] \to [H/[H, H]$. Ist φ Isomorphismus, so auch $\overline{\varphi}$.
   c) Die Normalformen aus dem Hauptsatz der Flächentopologie sind paarweise nicht-homöomorph.

4. **Faserprodukt**

   Es seien $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Die Menge

$$X \times_Z Y := \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}$$

mit der Teilraumtopologie im Produktraum $X \times Y$ heißt *Faserprodukt* von f und g. Es sei $p\colon E \to B$ eine Überlagerung und $f\colon B' \to B$ eine stetige Abbildung. Wir bezeichnen mit $E' := B' \times_B E$ das Faserprodukt und mit $f'\colon E' \to E$ und $p'\colon E' \to B'$ die durch Einschränkung der Projektionen definierten Abbildungen.

Zeigen Sie, dass $p'\colon E' \to B'$ eine Überlagerung ist.

(25 Punkte)

5. **Euler-Charakteristik**

   Es bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller Flächen (bis auf Homöomorphie), deren Euler-Charakteristik kleiner oder gleich Null ist. Es sei $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ eine Zuordnung mit der Eigenschaft:

   $(*)$ Wenn $\widetilde{F}$ F n-blättrig überlagert, $F, \widetilde{F} \in \mathcal{F}$, dann ist $\mu(\widetilde{F}) = n\,\mu(F)$.

   Dann stimmt μ bis auf einen konstanten Faktor mit der Euler-Charakteristik überein.

(Zusatzaufgabe)