

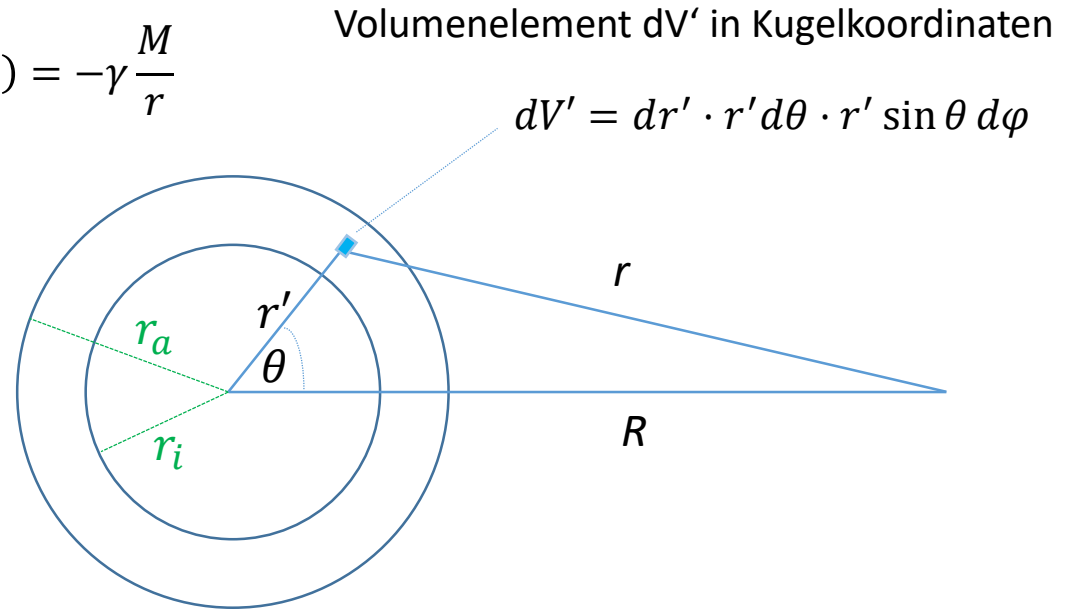
Gravitationspotential einer Hohlkugel im Abstand R :

Gravitationspotential einer Punktmasse: $V(R) = -\gamma \frac{M}{r}$

Lösung über Volumenintegration:

$$V(R) = -\gamma \int_{\text{Volumen}} \frac{\rho}{r} dV'$$

$$V(R) = -\gamma \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\varphi$$



Mit Kosinussatz:

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta$$

Liese sich r im obigen Integral ersetzen und das Integral mathematisch lösen:

$$V(R) = -\gamma \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{r'^2 \sin \theta}{\sqrt{r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta}} \, dr' \, d\theta \, d\varphi$$

Machbar, aber nicht die cleverste Lösung

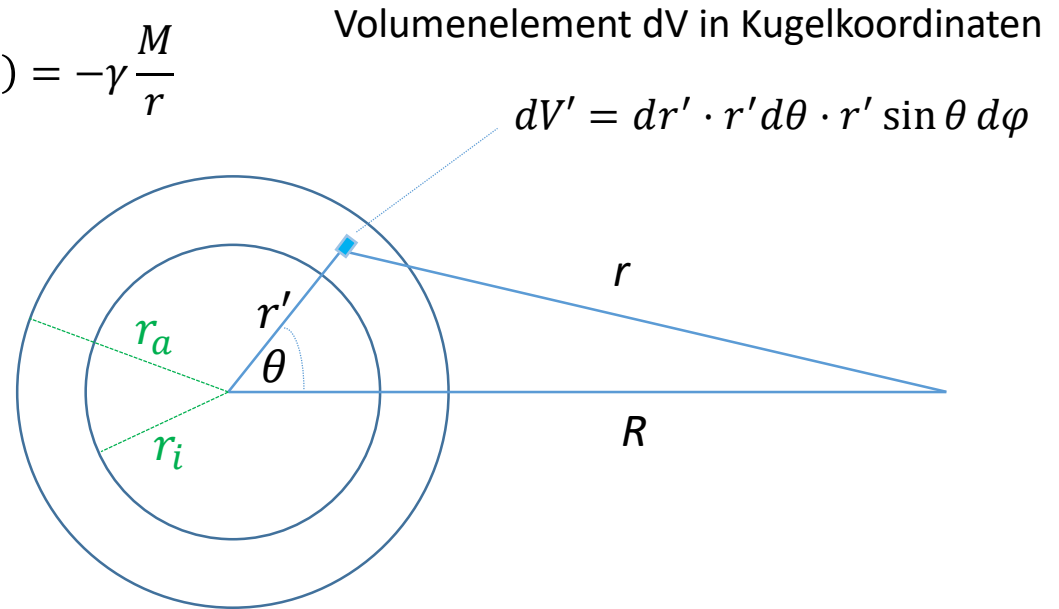
Gravitationspotential einer Hohlkugel im Abstand R :

Gravitationspotential einer Punktmasse: $V(R) = -\gamma \frac{M}{r}$

Lösung über Volumenintegration:

$$V(R) = -\gamma \int_{\text{Volumen}} \frac{\rho}{r} dV'$$

$$V(R) = -\gamma \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r} r'^2 \sin \theta \, dr' \, d\theta \, d\varphi$$



Mit Kosinussatz: $r^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta$

und seiner Ableitung $(dr, d\theta)$: $2rdr = 2r'R \sin \theta \, d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin \theta \, d\theta}{r} = \frac{dr}{r'R}$

Können wir die Integration über $d\theta$ durch eine Integration über dr ersetzen:

Grenzen: $\theta = 0$ korrespondiert zu $r = R - r'$ und $\theta = \pi$ korrespondiert zu $r = R + r'$ **für $R > r_a$** ;

Integral über φ ausführen

$$V(R) = -2\pi\gamma\rho \int_{r_i}^{r_a} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta \, d\theta}{r} r'^2 \, dr' = -2\pi\gamma\rho \int_{r_i}^{r_a} \int_{R-r'}^{R+r'} \frac{dr}{r'R} r'^2 \, dr' = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_{r_i}^{r_a} \int_{R-r'}^{R+r'} dr \, r' \, dr'$$

$$V(R) = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_{r_i}^{r_a} \int_{R-r'}^{R+r'} dr \, r' \, dr' = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_{r_i}^{r_a} \left(r \Big|_{R-r'}^{R+r'} \right) r' \, dr' = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_{r_i}^{r_a} 2r'^2 \, dr'$$

$$V(R) = -\frac{4\pi\gamma\rho}{3R} (r_a^3 - r_i^3) = -\gamma \frac{M}{R} \quad \text{Identisch dem Gravitationspotential einer Punktmasse im Außenbereich}$$

Grenzen: $\theta = 0$ korrespondiert zu $r = r' - R$ und $\theta = \pi$ korrespondiert zu $r = R + r'$ **für $R < r_i$** ;

$$V(R) = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_{r_i}^{r_a} \int_{r'-R}^{R+r'} dr \, r' \, dr' = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_{r_i}^{r_a} \left(r \Big|_{r'-R}^{R+r'} \right) r' \, dr' = -\frac{2\pi\gamma\rho}{R} \int_{r_i}^{r_a} 2Rr' \, dr'$$

$$V(R) = -4\pi\gamma\rho \left(\frac{r_a^2}{2} - \frac{r_i^2}{2} \right) = \text{const} \neq f(R) \quad \Rightarrow \quad \text{Keine Gravitationskraft im Inneren!}$$

Gravitationspotential einer Vollkugel Radius R im Abstand r :

Im Außenbereich $r > R$: Herleitung der Hohlkugel mit $r_i=0$!

Achtung R und r jetzt wie in Skizze unten!

$$V(r) = -\frac{4\pi\gamma\rho}{3r}(r_a^3 - r_i^3) = -\gamma\frac{M}{r}$$

Identisch dem Gravitationspotential einer Punktmasse im Außenbereich

Auf der Kugel $r = R$

$$V(r = R) = -\frac{4\pi\gamma\rho}{3R}R^3 = -\gamma\frac{M}{R}$$

Im Inneren $r < R$:

Aus Masse $m(r)$ in der inneren Kugel erhalten wir

$$V_1(r < R) = -\frac{4\pi\gamma\rho}{3r}r^3\frac{R^3}{R^3} = -\gamma M\frac{r^2}{R^3}$$

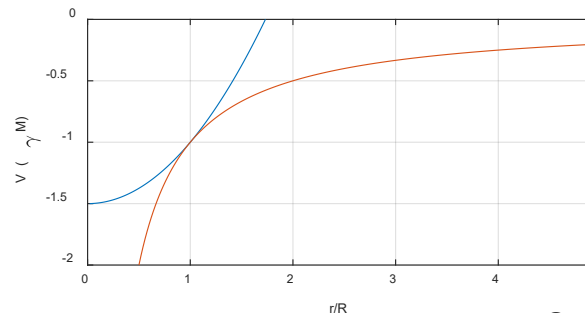
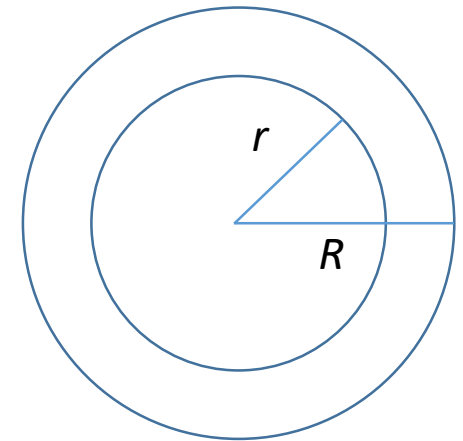
Aus Masse $m(r)$ in der äußeren Hohlkugel mit $r_a = R$ und $r_i = r$ erhalten wir

$$V_2(r) = -4\pi\gamma\rho\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) = -4\pi\gamma\rho\left(\frac{3R^3}{3 \cdot 2R} - \frac{3R^3r^2}{3R^3 \cdot 2}\right) = -\gamma M\left(\frac{3}{2R} - \frac{3r^2}{2R^3}\right)$$

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) = \frac{\gamma M}{R}\left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2}\right)$$

Potentielle Energie steigt quadratisch

⇒ Kraft steigt linear mit r im Inneren der Kugel



Setzt man ohne nachdenken
(bzw. nur mit $x = \cos \theta$)
die Integrale in ein
Algebrasystem ein
wird die Rechnung etwas länger;
($r=r'$, $s=R$ im Algebrasystem verwendet
wegen Lesbarkeit)

Gleich kurz wie in Folie 2 wenn man

$$k = \sqrt{r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta}$$

$$\frac{dk}{d\theta} = \frac{2r'R \sin \theta}{2\sqrt{r'^2 + R^2 - 2r'R \cos \theta}}$$

$$dk = \frac{r'R \sin \theta}{k} d\theta$$

im Integral substituiert



Integrate $r^2/\sqrt{r^2+s^2-2*r*s*x}$ dx

Extended Keyboard

Upload

Indefinite integral:

$$\int \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2 r s x}} dx = -\frac{r \sqrt{r^2 - 2 r s x + s^2}}{s} + \text{constant}$$

Integrate $r*\sqrt{r^2+s^2-2*r*s}$ dr

Extended Keyboard

Upload

Indefinite integral:

$$\int r \sqrt{r^2 + s^2 - 2 r s} dr = \frac{r^2 (2 r - 3 s) \sqrt{(r - s)^2}}{6 (r - s)} + \text{constant}$$