

Brückenschaltungen

Grolik Benno, Kopp Joachim

2. Januar 2003

1 Grundlagen des Versuchs

1.1 Brückenschaltung für Gleichstromwiderstände

Zur genauen Bestimmung ohmscher Widerstände eignet sich die klassische Methode, bei der aus einer Strom- und einer Spannungsmessung nach dem Ohmschen Gesetz der Widerstand ausgerechnet wird, nur sehr bedingt. Dabei verfälschen nämlich der Spannungsabfall am Amperemeter bzw. der Stromfluss durch das Voltmeter die Messung so stark, dass keine Präzisionsmessungen möglich sind.

Deshalb verwendet man hierfür in der Regel die Wheatstone'sche Brückenschaltung (vgl. Abbildung 1). Ist hier z.B. R_1 unbekannt, so kann man durch geeignete Wahl der übrigen Widerstände die Schaltung so ausgleichen, dass durch das Strommessgerät kein Strom mehr fließt. Aus den Kirchhoff'schen Gesetzen kann man für diesen Fall die Abgleichbedingung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (1)$$

herleiten, aus der man wiederum den unbekanntem Widerstand sehr genau berechnen kann.

1.2 Brückenschaltungen für Wechselstromwiderstände

Allerdings kann man mit derartigen Brückenschaltungen nicht nur ohmsche Widerstände bestimmen. Abbildung 2 zeigt zwei Schaltungen zur Bestimmung von kapazitiven bzw. induktiven Widerständen. Auch hier gilt im Fall des Abgleichs (d.h. $I_G = 0$)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \quad (2)$$

wobei für Z_1 bis Z_4 jetzt die komplexen Darstellungen der jeweiligen Wechselstromwiderstände eingesetzt werden müssen.

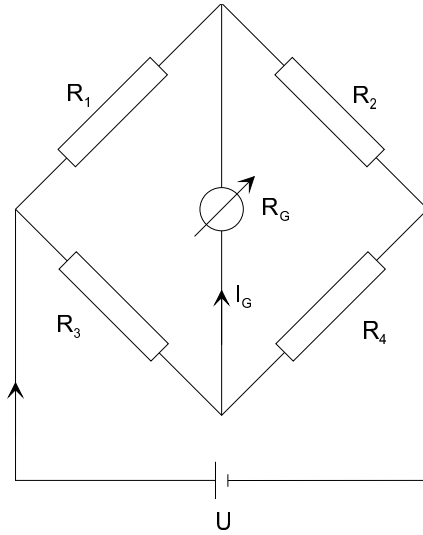


Abbildung 1: Die Wheatstone'sche Brückenschaltung

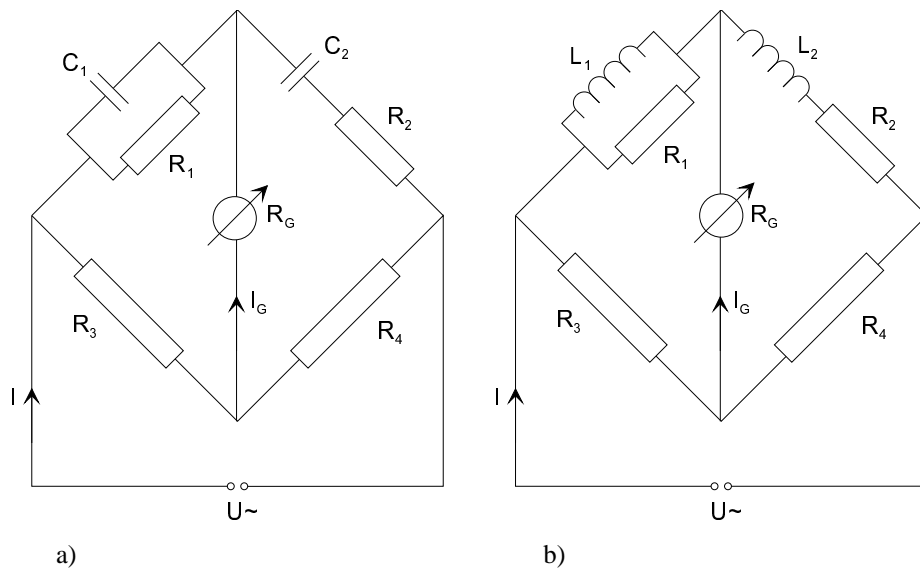


Abbildung 2: Verschiedene Wechselspannungsbrücken

In Abbildung 2a) erhält man:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \right)^{-1} \\ Z_2 &= R_2 - \frac{i}{\omega C_2} \\ Z_3 &= R_3 \\ Z_4 &= R_4 \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Abgleichbedingung (2) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \right) \cdot \left(R_2 - \frac{i}{\omega C_2} \right)} &= \frac{R_3}{R_4} \\ R_4 &= R_3 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \right) \cdot \left(R_2 - \frac{i}{\omega C_2} \right) \\ R_4 &= R_3 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} + i \left(-\frac{1}{R_1\omega C_2} + R_2\omega C_1 \right) \right) \end{aligned}$$

Spaltet man diese Gleichung in Real- und Imaginärteil auf, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{R_4}{R_3} &= \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \\ \frac{1}{R_1\omega C_2} &= R_2\omega C_1 \end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung kann man auch für Abbildung 2b) durchführen. Hier sind die komplexen Widerstände

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left(\frac{1}{R_1} - \frac{i}{\omega L_1} \right)^{-1} \\ Z_2 &= R_2 + i\omega L_2 \\ Z_3 &= R_3 \\ Z_4 &= R_4 \end{aligned}$$

und eine analoge Rechnung wie oben liefert

$$\begin{aligned} R_4 &= R_3 (R_2 + i\omega L_2) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{i}{\omega L_1} \right) \\ &= R_3 \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1} + i \left(\frac{\omega L_2}{R_1} - \frac{R_2}{\omega L_1} \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{R_4}{R_3} &= \frac{R_2}{R_1} + \frac{L_2}{L_1} \\ R_1 R_2 &= \omega^2 L_1 L_2 \end{aligned}$$

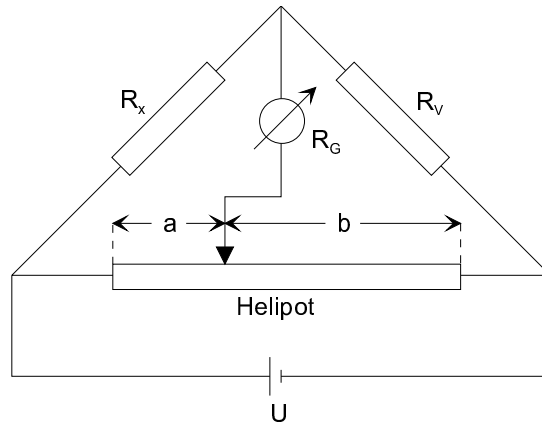


Abbildung 3: Die in unseren Experimenten verwendete Wheatstone'sche Brückenschaltung

2 Messung von Gleichstromwiderständen

In diesem Abschnitt wollen wir die Ergebnisse unserer Messungen an der Wheatstone'schen Brückenschaltung diskutieren und mögliche Fehlerquellen analysieren.

Abbildung 3 zeigt die verwendete Schaltung. Der Widerstand R_x war die jeweils zu bestimmende Größe, für den Vergleichswiderstand R_V wurden verschiedene feste Widerstände eingebaut. Ein Helipot (sehr genau einstellbarer Schiebewiderstand) bildete den unteren Brückenweig, über den der Abgleich der Schaltung erfolgte. Ein μA -meter sorgte für die nötige Genauigkeit des Abgleichs.

2.1 Der Ohmsche Widerstand eines Potentiometers

Im ersten Experiment wurde der maximale Widerstand eines Potentiometers bestimmt. Tabelle 1 gibt die Ausgangsgrößen — den bekannten Widerstand R_V und die Einstellung des Helipot beim Abgleich der Brücke — sowie den daraus errechneten Wert für den unbekanntem Widerstand R_x an, der sich aus (1) errechnet. Dabei wird für das Verhältnis R_3/R_4 das Verhältnis a/b der am Helipot abgegriffenen Teilwiderstände eingesetzt. Drückt man nun noch a durch den gemessenen Wert b und den bekannten Skalenendwert 10 aus, so erhält man

$$R_x = R_V \cdot \left(\frac{10}{b} - 1 \right) \quad (3)$$

Beim Fehler von R_V handelt es sich um eine Herstellerangabe, während die Ablesegenauigkeit des Helipots von uns auf einen halben Strichabstand geschätzt wurde. Da es sich in beiden Fällen um systematische Fehler handelt, wurde zur Berechnung

U [V]	$R_V [\Omega]$	b [Skalenteile]	$R_x [\Omega]$
0.5	$10 \pm 1 \%$	0.87 ± 0.005	104.9 ± 1.71
	$30 \pm 1 \%$	2.27 ± 0.005	102.2 ± 1.31
	$100 \pm 1 \%$	4.97 ± 0.005	101.2 ± 1.21

Gewichteter Mittelwert: $\overline{R_x} = 102.35 \Omega \pm 0.79 \Omega$

Tabelle 1: Ergebnisse der Widerstandsmessung an einem Potentiometer

der Abweichung von R_x eine lineare Fehlerfortpflanzung angenommen:

$$\begin{aligned} \Delta R_x &= \Delta R_V \frac{\partial R_x}{\partial R_V} + \Delta b \frac{\partial R_x}{\partial b} \\ &= \Delta R_V \left(\frac{10}{b} - 1 \right) + \Delta b \cdot 10 R_V \frac{1}{b^2} \end{aligned}$$

Obwohl nur drei Messungen durchgeführt wurden, fällt auf, dass der erste Wert (für $R_V = 10 \Omega$) wesentlich größer ist als die beiden anderen Werte, und dass er auch nicht in deren Fehlertoleranzen liegt. Das ist darauf zurückzuführen, dass bei dem geringen Zusatzwiderstand von nur 10Ω ein verhältnismäßig großer Strom fließt, der zu einer leichten Erwärmung des Potentiometers und damit zu einer Widerstandserhöhung führt.

2.2 Der Ohmsche Widerstand einer Glühlampe

Analog zu den Messungen im vorherigen Abschnitt wurde auch der Widerstand einer Glühlampe bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgeführt. Man sieht sofort, dass der Widerstand offenbar sehr stark von R_V abhängt. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei kleinerem R_V der Gesamtstrom durch den oberen Brückenast größer wird, was zu einer starken Erhitzung der dünnen Glühwendel führt. Da der Widerstand eines Metalls mit der Temperatur ansteigt, erhält man bei kleinerem R_V einen größeren Widerstand.

Dieses Ergebnis wurde auch durch einen zweiten Versuch bestätigt, bei dem bei konstantem R_V die Spannung an der Brücke variiert wurde (Tabelle 3 und Abbildung 4). Bei dem kleinen Vergleichswiderstand von 10Ω ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz $I = U/(R_x + R_V)$ ein hoher Stromfluss und damit eine starke Erwärmung. Bei einer Spannung von 4.0 V war die Glühwendel bereits so heiß, dass die Birne zu leuchten begann. Bei $R_V = 200 \Omega$ dagegen ist der Strom und der Spannungsabfall an der Birne geringer, d.h. es wird weniger elektrische Leistung in Wärme umgewandelt. Entsprechend nimmt der Widerstand nur langsam zu.

2.3 Ohmsche Widerstände von Spulen

Ist eine Spule in einen Gleichstromkreis geschaltet, so hat sie einen rein ohmschen Widerstand, die Induktivität spielt dann keine Rolle. Deshalb kann der ohmsche Widerstand einer Spule ebenfalls mit der Wheatstoneschen Brücke bestimmt werden. Für die im Praktikum vorhandenen Spulen haben wir diese Messung durchgeführt, wobei das

U [V]	$R_V [\Omega]$	b [Skalenteile]	$R_x [\Omega]$
3	$10 \pm 1 \%$	1.16 ± 0.005	76.2 ± 1.13
	$100 \pm 1 \%$	7.945 ± 0.005	25.9 ± 0.34
	$200 \pm 1 \%$	9.05 ± 0.005	21.0 ± 0.33

Tabelle 2: Widerstand einer Glühlampe bei konstanter Spannung

$R_V [\Omega]$	U [V]	b [Skalenteile]	I [mA]	$R_x [\Omega]$
$10 \pm 1 \%$	0.5	3.04 ± 0.005	15	22.9 ± 0.28
	1.0	2.51 ± 0.005	25	29.8 ± 0.38
	2.0	1.59 ± 0.005	32	52.9 ± 0.73
	3.0	1.16 ± 0.005	35	76.2 ± 1.13
	4.0	0.97 ± 0.005	39	93.1 ± 1.46
	5.0	0.84 ± 0.005	42	109.0 ± 1.80
$200 \pm 1 \%$	0.5	9.11 ± 0.005	2	19.5 ± 0.32
	1.0	9.11 ± 0.005	5	19.5 ± 0.32
	2.0	9.09 ± 0.005	9	20.0 ± 0.32
	3.0	9.055 ± 0.005	14	20.9 ± 0.33
	4.0	9.00 ± 0.005	18	22.2 ± 0.35
	5.0	8.915 ± 0.005	22	24.3 ± 0.37

Tabelle 3: Widerstand einer Glühlampe bei konstantem Vergleichswiderstand

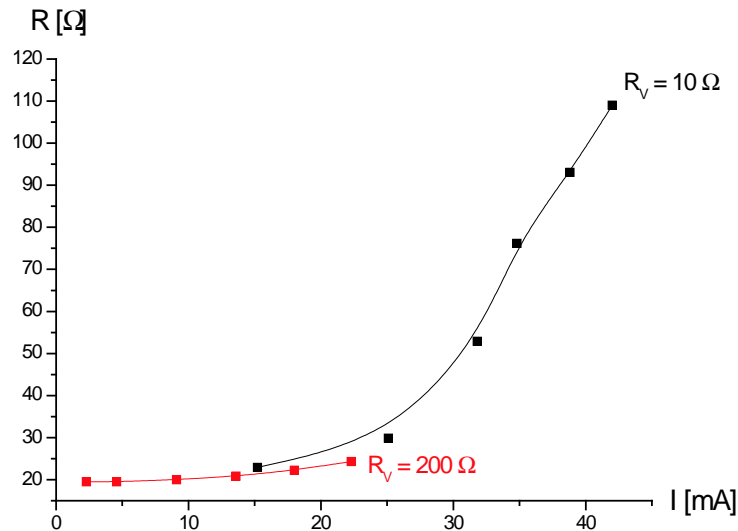


Abbildung 4: Der Widerstand einer Glühlampe in Abhängigkeit vom Stromfluss

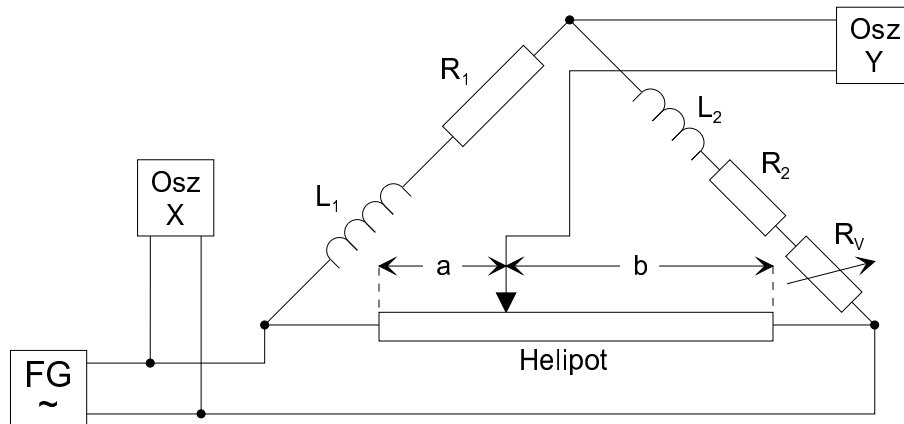


Abbildung 5: Die von uns verwendete Schaltung zur Messung von Induktivitäten

Vorgehen völlig analog zu den vorangegangenen Experimenten war. Als Vergleichswiderstand wurden 10Ω und als Spannung 0.5 V gewählt. Es ergaben sich folgende Widerstände:

Kleine Spule:	$38.1 \Omega \pm 0.50 \Omega$
Volle WHE-Spule:	$0.62 \Omega \pm 0.01 \Omega$
Halbe WHE-Spule:	$0.30 \Omega \pm 0.01 \Omega$

3 Messung von Wechselstromwiderständen

Im zweiten Teil des Praktikums wurden mit Hilfe von Wechselspannungsbrücken (vgl. Abb. 5 und 6) verschiedene induktive und kapazitive Widerstände gemessen. An dem in X-Y-Betrieb geschalteten Oszilloskop lagen die Versorgungsspannung und die Spannung an der Brückendiagonalen an. Im nicht abgeglichenen Zustand erhält man eine sogenannte Lissajous-Figur in Form einer Ellipse.

Durch Regeln des Vorwiderstandes R_V von L_2 und des Helipots kann man erreichen, dass sich diese Ellipse zu einer waagerechten Linie verengt, d.h. es fließt kein Strom mehr in der Brückendiagonalen, die Schaltung ist abgeglichen.

3.1 Induktive Widerstände

Im abgeglichenen Zustand gilt nach Gleichung (2):

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

Für die Bestimmung induktiver Widerstände mit der Schaltung aus Abbildung 5 muss man die folgenden Werte einsetzen: $Z_1 = R_1 + i\omega L_1$ (Reihenschaltung aus dem induktiven und dem ohmschen Widerstand von L_1), $Z_2 = R_V + R_2 + i\omega L_2$ (Reihenschaltung aus ohmschem und induktiven Widerstand von L_2 sowie dem regelbaren

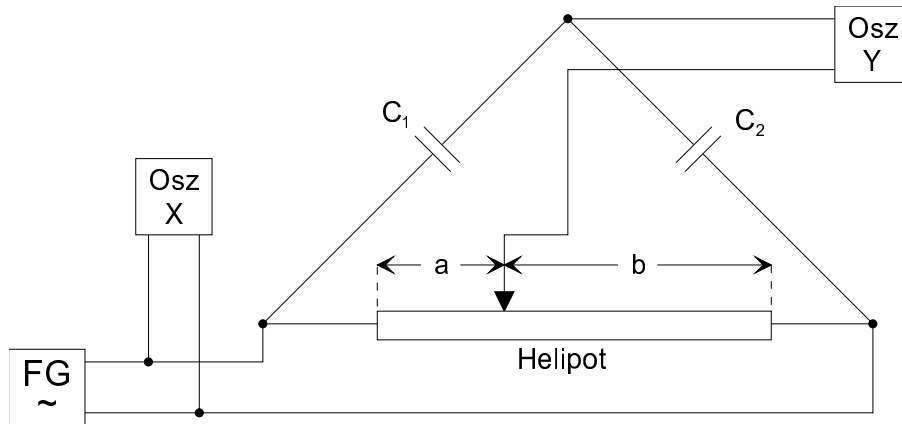


Abbildung 6: Die von uns verwendete Schaltung zur Messung von Kapazitäten

Vorwiderstand R_V), $\frac{Z_3}{Z_4} = \frac{10}{b} - 1$ (Einstellung des Helipots). Man erhält so:

$$\frac{R_1 + i\omega L_1}{R_V + R_2 + i\omega L_2} = \frac{10}{b} - 1$$

$$R_1 + i\omega L_1 = \left(\frac{10}{b} - 1\right) (R_V + R_2 + i\omega L_2)$$

In einem ersten Versuch wurde die Induktivität einer unbekannt Spule L_1 bestimmt. Aus dem Imaginärteil obiger Gleichung erhält man dafür:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{10}{b} - 1$$

$$L_1 = L_2 \cdot \left(\frac{10}{b} - 1\right)$$

Für den Fehler erhält man unter Berücksichtigung linearer Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 \frac{\partial L_1}{\partial L_2} + \Delta b \frac{\partial L_1}{\partial b}$$

$$= \Delta L_2 \left(\frac{10}{b} - 1\right) + \Delta b \cdot 10L_2 \frac{1}{b^2}$$

Um eine höhere Genauigkeit zu erreichen, wurde der Abgleich mehrmals durchgeführt und dann mit dem Mittelwert der Messwerte für b gerechnet. Für den Fehler Δb wurde die Summe aus statistischem Fehler (Standardabweichung) und systematischem Fehler (Ableseungenauigkeit ± 0.005) eingesetzt.

Es ergab sich ein Wert von $L_1 = 4.00 \pm 0.18$ mH. Da auf dieser Spule kein Nennwert angegeben war, ist es nicht möglich, das Messergebnis zu überprüfen.

In einem zweiten Versuch wurde die Wicklungszahl der WHE-Spule L_2 auf die Hälfte reduziert und mit Hilfe des soeben ermittelten Wertes von L_1 die neue Indukti-

vität L_2^* bestimmt:

$$\begin{aligned}\frac{L_1}{L_2^*} &= \frac{10}{b} - 1 \\ \implies L_2^* &= \frac{bL_1}{10 - b} \\ \Delta L_2^* &= \Delta L_1 \frac{b}{10 - b} + \Delta b \cdot \frac{L_1(10 - b) + bL_1}{(10 - b)^2}\end{aligned}$$

Da die Induktivität

$$L = \mu A \frac{n^2}{l} \quad (4)$$

einer Spule quadratisch mit der Wicklungszahl zunimmt, ist zu erwarten, dass die Induktivität der halben Spule ein Viertel des Nennwertes der Gesamtspule — in diesem Fall $\frac{1}{4} \cdot 2.3 \text{ mH} = 0.575 \text{ mH}$ — beträgt. Tatsächlich erhält man $L_2 = 0.563 \pm 0.033 \text{ mH}$. Wie man sieht, liegt also der berechnete Wert sehr gut innerhalb der Fehlergrenzen des experimentellen Wertes, was die Richtigkeit der Formel (4) bestätigt.

3.2 Kapazitive Widerstände

Den Abschluss dieses Praktikums bildete ein Versuch zur Bestimmung von Kapazitäten mit Hilfe einer Wechselspannungsbrücke gemäß Abbildung 6. Ohmsche Widerstände wurden hier ganz vernachlässigt; auch der Schiebewiderstand R_V wurde weggelassen, da er ganz auf 0 zurückgedreht werden musste, um die Schaltung abzugleichen.

Dadurch wurde die Rechnung deutlich einfacher als bei der Induktivitätsmessung:

$$\begin{aligned}\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{10}{b} - 1 \\ \frac{-\frac{i}{\omega C_1}}{-\frac{i}{\omega C_2}} &= \frac{10}{b} - 1 \\ \frac{C_2}{C_1} &= \frac{10}{b} - 1 \\ C_1 &= \frac{bC_2}{10 - b}\end{aligned}$$

Als Fehler ergibt sich:

$$\Delta C_1 = \Delta C_2 \frac{b}{10 - b} + \Delta b \cdot \frac{C_2(10 - b) + bC_2}{(10 - b)^2}$$

Zur Bestimmung der Messunsicherheit wurde die Messung wiederum mehrmals durchgeführt und anschließend mit Mittelwert und Standardabweichung weitergerechnet. Für die bekannte Vergleichskapazität $C_2 = 1 \mu\text{F}$ wurde ein Fehler von 5 % angenommen, da keine Herstellerangabe vorlag.

Für den vorliegenden Kondensator ergab sich so ein Wert von $C_1 = 2.33 \pm 0.13 \mu\text{F}$. Im Rahmen der Messgenauigkeit stimmt dies mit dem vom Hersteller angegebenen Nennwert von $22 \mu\text{F}$ überein.