

Pohlsches Rad und Chaos

Grolik Benno, Kopp Joachim

25. November 2002

1 Grundlagen des Versuchs

Bei vielen physikalischen und technischen Anwendungen spielt die Untersuchung eines schwingenden Systems eine wichtige Rolle. Im günstigsten Fall ist die Schwingung harmonisch und damit leicht mathematisch zu beschreiben. Allerdings gewinnen auch zunehmend nicht-lineare und chaotische Systeme an Bedeutung, da es mit der rapide steigenden Rechenleistung der Computer auch möglich ist, solche Systeme zumindest näherungsweise zu beschreiben — man denke z.B. an das Problem der Wettervorhersage.

Bei den hier beschriebenen Experimenten wurden wichtige Eigenschaften von harmonischen und chaotischen Oszillatoren am Beispiel des Pohlschen Rades untersucht. Dabei handelt es sich um ein Drehpendel, das durch eine Spiralfeder die Rückstellkraft erfährt und durch einen Elektromagneten gedämpft wird. Zusätzlich kann das Pohlsche Rad durch einen regelbaren Elektromotor in erzwungene Schwingungen versetzt werden.

Die Messdatenerfassung erfolgte größtenteils elektronisch über mit Hilfe eines “Computers”.

Um chaotische Schwingungen beobachten zu können wurde ein zusätzliches Gewicht an dem Drehpendel befestigt, so dass das System nichtlinear wurde.

2 Der freie gedämpfte Oszillator

Im ersten Versuchsteil wurden charakteristische Größen des freien, gedämpften harmonischen Oszillators gemessen, nämlich seine Eigenfrequenz und die Dämpfungskonstante. Dazu wurde das Pohlsche Rad von Hand ausgelenkt und die darauf folgende harmonische Schwingung sowohl mit dem Auge als auch mit dem Computer beobachtet.

Abbildung (1) zeigt die Schwingung als Auftragung der Auslenkung ϕ über der Zeit t und als Phasenraumdiagramm, wo ϕ gegen $\dot{\phi}$ aufgetragen ist. Charakteristisch für den gedämpften harmonischen Oszillator ist die nach innen laufende Spirale im Phasenraum. Sie verdeutlicht, dass durch die Dämpfung sowohl kinetische als auch potentielle Energie ständig abnehmen und das Pendel schließlich zur Ruhe kommt.

2.1 Beobachtungen mit dem bloßen Auge

Zunächst wurde mehrmals mit einer Stoppuhr die Schwingungsdauer T gemessen. Um genauere Ergebnisse zu erhalten wurde nicht die Dauer einer einzelnen Schwingung gemessen, sondern die von jeweils zehn aufeinanderfolgenden Perioden, die dann durch 10 geteilt werden muss. Außerdem wurde der Versuch fünfmal durchgeführt um statistische Schwankungen des Ergebnisses zu minimieren. Es ergab sich eine mittlere Periodendauer von $\bar{T} = 2.027$ s, das entspricht der mittleren Frequenz

$$\bar{f} = 0.4934 \pm 0.0046 \text{ Hz} \quad (1)$$

Der angegebene Fehler errechnet sich folgendermaßen: Der statistische Anteil ist die Standardabweichung der Frequenzen aus den fünf Einzelmessungen. Er beträgt $\Delta f_{stat} = 0.0022$ Hz.

Für den systematischen Fehler wurde angenommen, dass die Messung der Dauer von zehn Schwingungen auf ± 0.1 s genau ist. Dieser Beitrag setzt sich zusammen aus einer möglichen systematischen Ungenauigkeit der Stoppuhr, die z.B. durch thermische Ausdehnung oder Verschleiß einzelner Bauteile der Uhr verursacht werden kann, sowie aus einer evtl. vorhandenen systematischen Ungenauigkeit beim Ablesen. Diese kann z.B. auftreten, wenn der Experimentator die Uhr zwar gleichzeitig mit dem Pendel startet, sie aber grundsätzlich zu spät anhält. Gemäß dem linearen Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f = \Delta T \frac{1}{T^2} \quad (2)$$

errechnet sich daraus ein systematischer Fehleranteil von $\Delta f_{sys} = 0.0035$. Bei Beiträgen zusammenaddiert ergeben den oben angegebenen Gesamtfehler. Man sieht, dass bei diesem Experiment statistischer und systematischer Fehler ungefähr gleich sind.

Zur Bestimmung der Dämpfungskonstante λ wurde während die Amplitude des schwingenden Drehpendels bei jeder Periode abgelesen. Auch diese Messung wurde fünfmal durchgeführt, da die Ergebnisse jedoch sehr gut reproduzierbar waren, genügt es eine der Messreihen herauszugreifen und näher zu untersuchen.

Abbildung (2) zeigt die halblogarithmische Darstellung der Schwingungsamplitude über der Zeit. Da die Schwingungsamplitude mit $\exp(-\lambda t)$ abnimmt ergibt sich aus der Steigung der Regressionsgeraden die Dämpfungskonstante λ . Im vorliegenden Fall beträgt sie $0.157 \pm 0.0030 \text{ s}^{-1}$. Der angegebene Fehler ergab sich ebenfalls bei der Berechnung der Regressionsgeraden.

Aus der Dämpfungskonstante lässt sich leicht die Abklingzeit berechnen: $\tau = 1/\lambda = 6.39 \pm 0.123$ s. Der Fehler wurde mittels linearer Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta \tau = \Delta \lambda \frac{1}{\lambda^2} \quad (3)$$

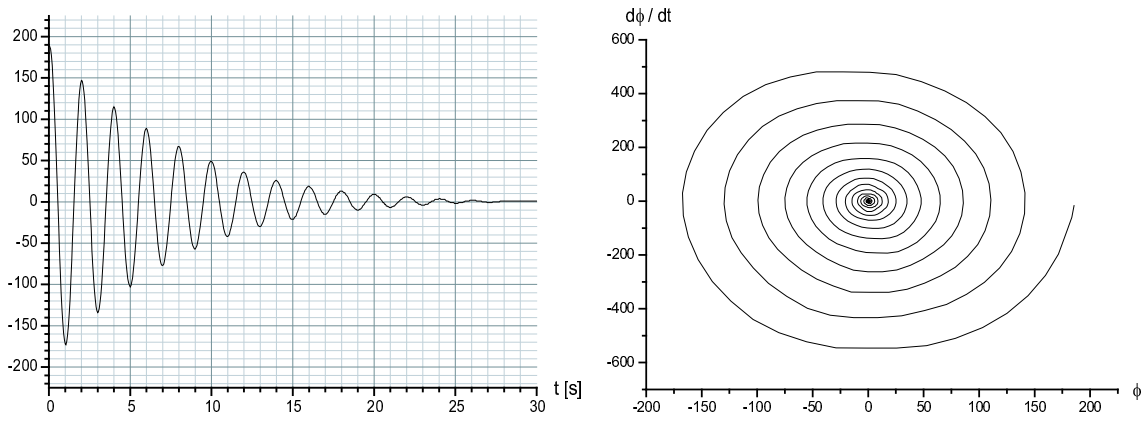


Abbildung 1: Schwingung des freien, gedämpften harmonischen Oszillators. Links ist die Zeitabhängigkeit der Auslenkung gezeigt, rechts das Phasenraumdiagramm

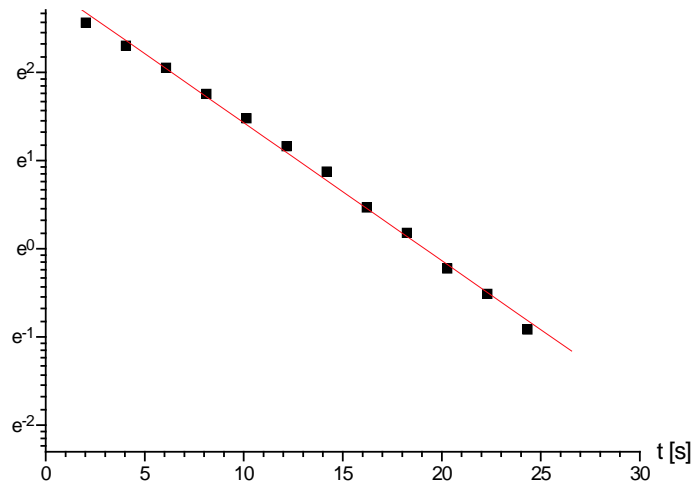


Abbildung 2: Halblogarithmische Auftragung der Schwingungsamplitude gegen die Zeit. Die Ablesung erfolgte hier mit bloßem Auge.

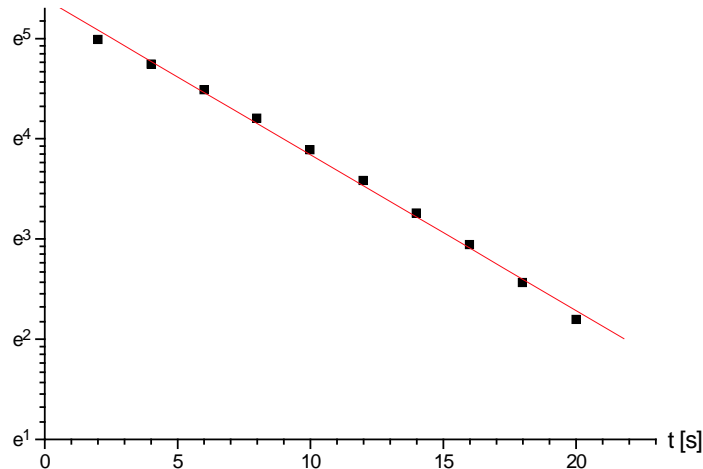


Abbildung 3: Halblogarithmische Auftragung der Schwingungsamplitude gegen die Zeit. Die Messdaten wurden hier mit dem Computer erfasst.

2.2 Computergestützte Analyse

Da Messungen mit bloßem Auge in der Regel sehr fehleranfällig sind wurden Eigenfrequenz und Dämpfungskonstante auch noch aus den Computeraufzeichnungen bestimmt.

Wie man aus Abbildung (1) ablesen kann, benötigt das System für 12 Schwingungen 24 s. Das entspricht einer Frequenz von 0.5 Hz. Dieser Wert ist geringfügig größer als der manuell ermittelte. Aufgrund des genaueren Messverfahrens liegt er wahrscheinlich näher am tatsächlichen Wert.

Abbildung (3) zeigt die Schwingungsamplitude in halblogarithmischer Auftragung gegen die Zeit. Das Diagramm ist praktisch identisch mit Abbildung (2), dementsprechend erhält man auch fast identische Werte für Dämpfungskonstante und Abklingzeit: $\lambda = 0.155 \pm 0.0033 \text{ s}^{-1}$; $\tau = 6.43 \pm 0.138 \text{ s}$.

Die elektronisch gemessenen Werte weichen also kaum von den manuell ermittelten ab, und sie liegen auch innerhalb der gegenseitigen Fehlertoleranzen. Man sieht daraus, dass die Ablesung mit dem Auge doch relativ genau war.

3 Messung der Resonanzkurve bei erzwungenen Schwingungen

Im nächsten Versuchsteil wurde das Pohlsche Rad mit dem Elektromotor in erzwungene Schwingungen versetzt und die dabei auftretenden Resonanzphäno-

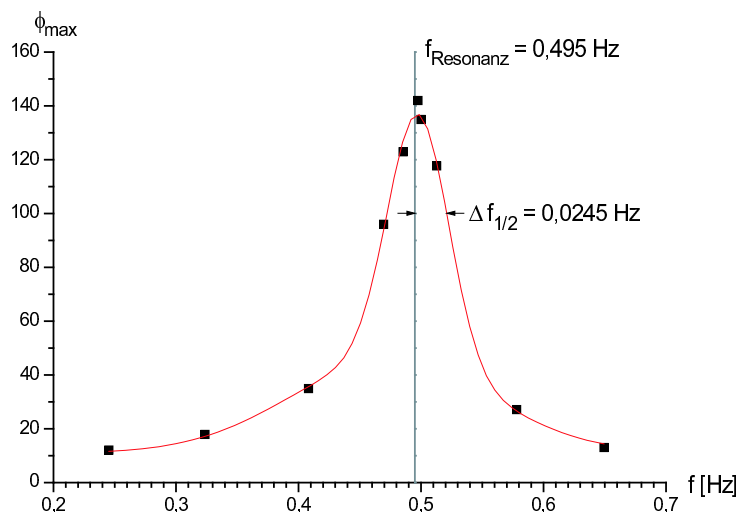


Abbildung 4: Resonanzkurve des Pohlschen Rades

mene beobachtet.

Abbildung (4) zeigt die typische Resonanzkurve. Aufgetragen ist die Amplitude der Schwingung über der Erregerfrequenz. Das Maximum der Kurve liegt bei der Resonanzfrequenz $f_{\text{Resonanz}} = 0.495$ Hz. Diese ist geringfügig niedriger als die (mit dem Computer ermittelte) Eigenfrequenz der freien Schwingung von 0.5 Hz. Dies bestätigt die theoretischen Vorhersagen, wonach v.a. bei starker Dämpfung genau diese Abweichung auftreten muss.

Man beachte, dass die Resonanzkurve, wenn man sie nach links extrapoliert, nicht durch den Ursprung geht. Das ist auch anschaulich leicht zu verstehen, denn für sehr niedrige Erregerfrequenzen ($f \rightarrow 0$) folgt das System einfach der Erregerschwingung und hat deshalb die gleiche Amplitude wie der Antrieb.

Ebenfalls aus Abbildung (4) lässt sich die Halbwertsbreite $\Delta f_{1/2}$ der Resonanzkurve bestimmen. Das ist die halbe Breite der Resonanzkurve an der Stelle, an der die Amplitude auf den $\sqrt{2}$ -ten Teil ihres Maximalwertes abgefallen ist. Im vorliegenden Fall ist $\Delta f_{1/2} = 0.0245$ Hz. Auch dieser Wert stimmt gut mit den theoretischen Vorhersagen überein, wonach gelten muss

$$\Delta f_{1/2} = \frac{\lambda}{2\pi} = 0.0247 \text{ Hz} \quad (4)$$

4 Das nichtlineare Pohlsche Rad

4.1 Die freie nichtlineare Schwingung

Um aus dem Pohlschen Rad einen nichtlinearen Oszillator zu machen kann man ein zusätzliches Gewichtsstück daran befestigen. Durch die so erzeugte

asymmetrische Massenverteilung wird die Schwingung des Systems wesentlich komplizierter.

Abbildung (5) zeigt das Ausschwingverhalten für zwei verschiedene Dämpfungsströme. Die oberen Diagramme wurden mit $I = 400$ mA aufgenommen, die unteren bei $I = 200$ mA. Man erkennt, dass die Schwingungen nicht mehr sinusförmig sind und dass auch die Periodendauer variiert.

Entsprechend ist auch die Phasenraumtrajektorie keine Spirale mehr, sondern eine kompliziertere geometrische Figur. Man sieht, dass der Attraktor — also der Punkt, an dem das Pendel zur Ruhe kommt — nicht mehr bei der Auslenkung 0 liegt, da dort ein instabiles Gleichgewicht herrscht. Vielmehr gibt es jetzt zwei mögliche Attraktoren, nämlich in den beiden Positionen, in denen das Zusatzgewicht gerade durch die Federspannung kompensiert wird. Ob der rechte oder linke Attraktor erreicht wird, hängt von den Anfangsbedingungen ab.

4.2 Chaotische Schwingung des getriebenen nichtlinearen Pendels

Um das nichtlineare Pohlsche Rad in chaotische Schwingungen zu versetzen, wurde nun wieder der Antrieb zugeschaltet und das Verhalten bei unterschiedlichen Erregerfrequenzen untersucht.

Während das System für sehr kleines f noch dem Antriebsmotor folgen kann, treten bei etwas höheren Frequenzen sogenannte Bifurkationen auf. Nach der ersten Bifurkation wechselt die Amplitude der Schwingung auf unvorhersehbare Weise zwischen zwei verschiedenen Werten hin und her. Das entsprechende Verhalten ist in Abbildung (6) gezeigt. Im Phasenraumdiagramm zeigt sich die Bifurkation dadurch, dass die Trajektorie zwei unterschiedliche geometrische Figuren durchläuft. Hier sind dies die kleinen Ellipsen um die beiden Attraktoren und die große hantelförmige Kurve.

Nach der zweiten Bifurkation treten vier verschiedene Amplituden auf, die in scheinbar zufälliger Reihenfolge aufeinanderfolgen. Die Diagramme in Abbildung (7) wurden in diesem Bereich aufgenommen. Leider sind in den Grafiken nur drei verschiedene Amplituden klar unterscheidbar, da sie bereits so dicht beieinander liegen, dass eine genauere Auflösung mit der verwendeten Apparatur nicht möglich ist.

Auch das Phasenraumdiagramm wird nach der zweiten Bifurkation nochmals komplizierte. Neu hinzugekommen sind z.B. Kurven in Form eines abgerundeten Dreiecks um die beiden Attraktoren.

Wie bereits erwähnt liegen die “erlaubten” Amplituden bei Bifurkationen höherer Ordnung immer dichter beieinander. Der Übergang zum echt chaotischen Bereich, in dem schließlich alle Amplituden in zufälliger Reihenfolge auftreten, ist daher fließend.

Bei hohen Erregerfrequenzen kann das System dem Antrieb nicht mehr folgen und führt nur noch sehr schwache Schwingungen aus. Das bedeutet, für hohes f wird das Verhalten wieder besser vorhersagbar.

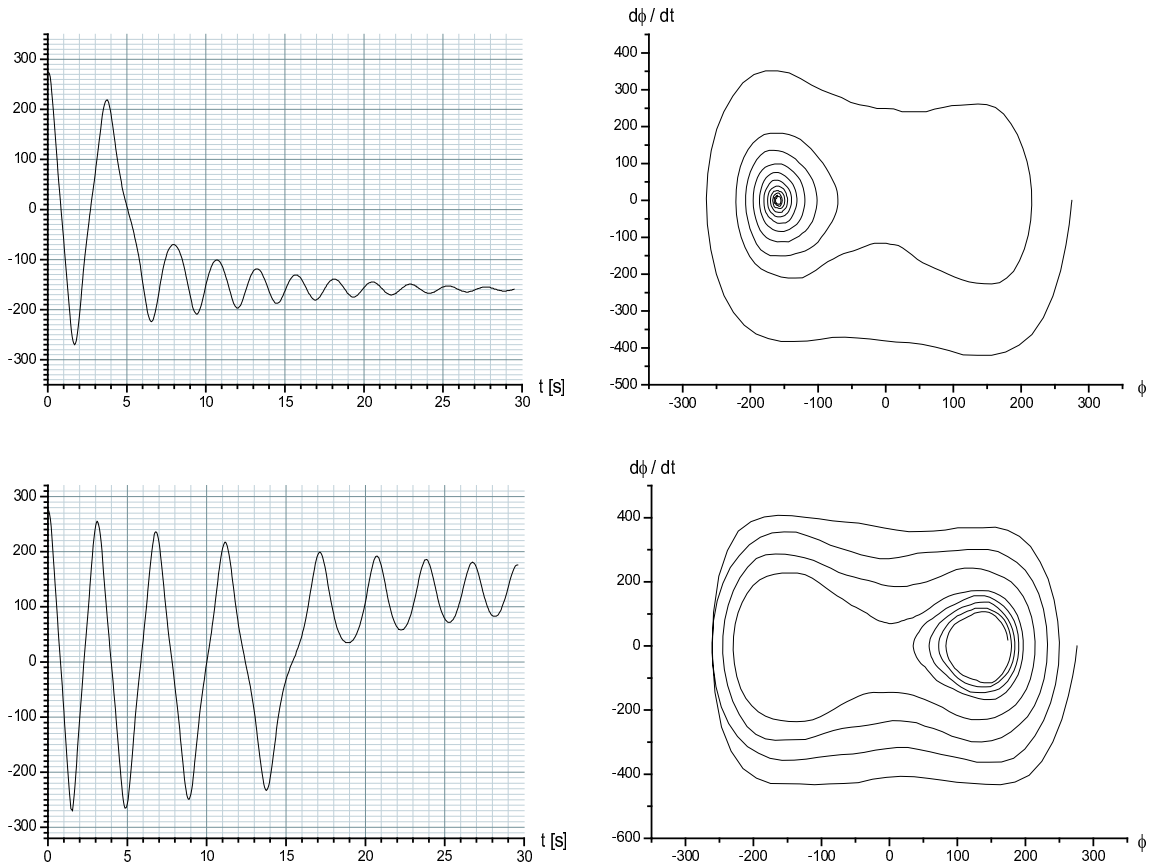


Abbildung 5: Orts- und Phasenraumdiagramme für die freie Schwingung des nichtlinearen Pohlschen Rades bei starker Dämpfung (oben) und schwacher Dämpfung (unten).

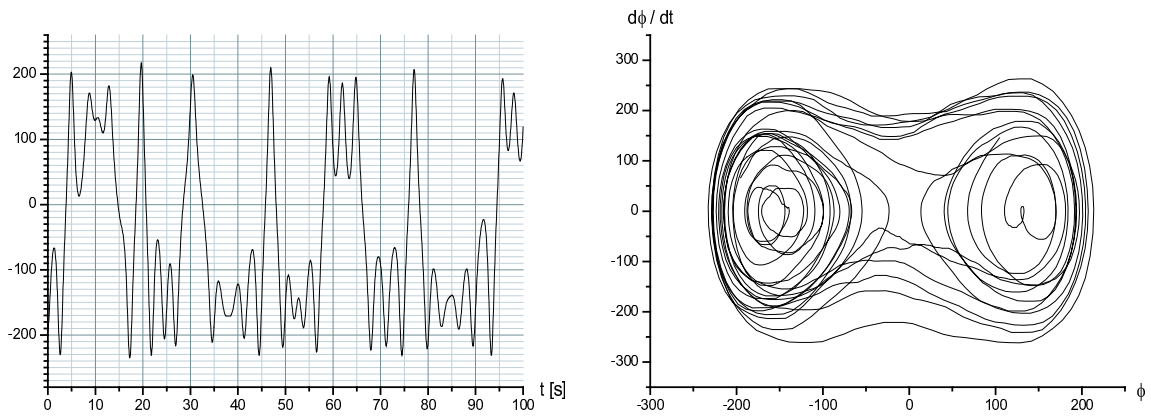


Abbildung 6: Orts- und Phasenraumdiagramme für die chaotische Schwingung des Pohlschen Rades nach der ersten Bifurkation

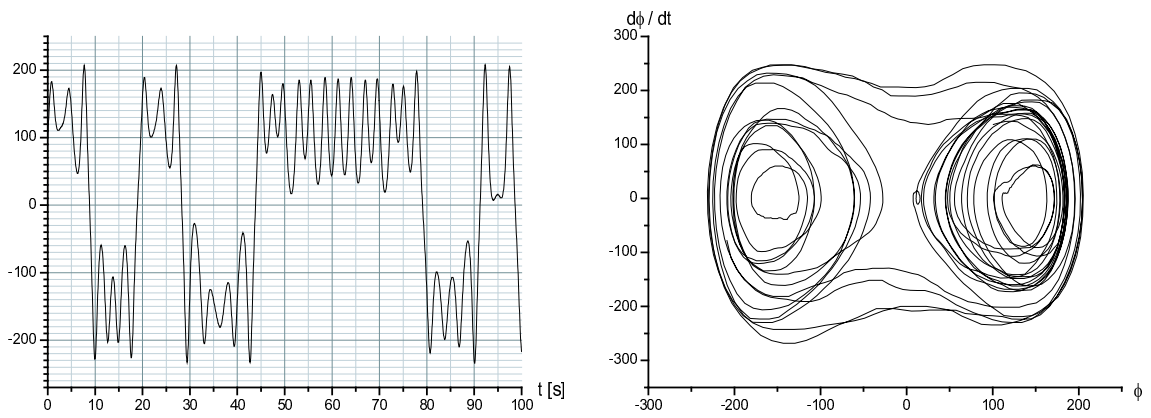


Abbildung 7: Orts- und Phasenraumdiagramme für die chaotische Schwingung des Pohlschen Rades nach der zweiten Bifurkation

Ein generelles Problem bei der Untersuchung der chaotischen Schwingungen liegt darin, dass der Einschwingvorgang im Allgemeinen sehr lange dauert und dass sein Ende wegen des chaotischen Verhaltens schwer erkennbar ist.

A Anhang

A.1 Das Federpendel

Ein Massenstück m , das an einer Feder aufgehängt ist, stellt einen harmonischen Oszillator dar, sofern die Feder dem Hooke'schen Gesetz gehorcht. Wird dieses System von außen zu erzwungenen Schwingungen angeregt, so lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{y} + \gamma\dot{y} + ky = F_0 \sin \omega t + mg \quad (5)$$

Dabei ist γ die Dämpfung und k die Federhärte. Der Term $F_0 \sin \omega t$ beschreibt die Erregerschwingung, mg ist die Gewichtskraft des Massenstücks. Durch die Substitution

$$z := y - \frac{mg}{k} \quad (6)$$

kann die Gewichtskraft eliminiert werden und man erhält

$$m\ddot{z} + \gamma\dot{z} + kz = F_0 \sin \omega t \quad (7)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu der Gleichung des Drehpendels, die in der Versuchsbeschreibung ausführlich diskutiert wird. Dabei entspricht m dem Trägheitsmoment Θ und die Auslenkung z dem Auslenkwinkel ϕ . Demzufolge erhält man völlig analog Eigenfrequenz der freien und Resonanzfrequenz der erzwungenen Schwingung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \quad (8)$$

$$\omega_R = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2} \quad (9)$$

Natürlich ist auch dies eine idealisierte Beschreibung des Federpendels, bei der Nichtlinearitäten nicht berücksichtigt werden. In der Praxis gilt z.B. bei Überdehnung der Feder das Hooke'sche Gesetz nicht mehr, wodurch die Federkraft in Gleichung (7) nicht mehr durch den Term kz beschrieben werden kann. Bei schlechterem Material kann die Hysterese eine Rolle spielen, wodurch ebenfalls das Hooke'sche Gesetz ungültig wird. Daneben ist die Dämpfung oft nicht linear mit der Geschwindigkeit \dot{z} . Besonders komplex wird das Problem, wenn in drei Dimensionen gerechnet werden muß, d.h. wenn das Federpendel aus irgendwelchen Gründen zur Seite ausweicht.

A.2 Weitere lineare Systeme

In Natur und Technik treten viele Phänomene auf, die durch eine lineare Differentialgleichung beschrieben werden können. Beispiele sind die Schallerzeugung durch schwingende Stimmbänder beim Menschen, alle Arten elektromagnetischer Schwingungen und Wellen (Mikrowellengeräte, Licht, Röntgenstrahlung) sowie Wasserwellen.

Daneben folgen Wachstumsprozesse in der Biologie und der Wirtschaft oft einem ähnlichen Verhalten: Sind beispielsweise von einer Tierart nur wenige Exemplare vorhanden, so können sich diese stark vermehren, bis Lebensraum und Nahrung zurückgehen, wodurch die Population zunächst langsamer wächst gebremst und irgendwann wieder abnimmt.

A.3 Hauptmerkmale linearer und nichtlinearer Systeme

Wie bei den Experimenten am Pohlschen Rad gezeigt wurde, verliert ein System viele interessante Eigenschaften, sobald es nichtlinear wird. Die folgende Tabelle stellt lineare und nichtlineare Systeme gegenüber:

Lineares System	Nichtlineares System
Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Amplitude.	Die Schwingungsdauer hängt von der Amplitude ab.
Das Superpositionsprinzip gilt	Das Superpositionsprinzip gilt nicht.
Das Verhalten des Systems ist immer vorhersagbar.	Das System kann sich chaotisch verhalten.
Das System ist mathematisch relativ leicht beschreibbar. Die Bewegungsgleichung ist linear und besitzt analytische Lösungen, so dass das Verhalten des Systems gut vorgesagt werden kann.	Die Bewegungsgleichung ist nicht linear. Sie ist im Allgemeinen nicht analytisch lösbar. Das Verhalten des System kann aber mit numerischen Verfahren beschrieben werden, solange es sich nicht chaotisch verhält.

A.4 Gleichrichter

In Abbildung (8) ist eine Schaltung gezeigt, die zur Umwandlung einer Wechselspannung in eine leicht geglättete Gleichspannung verwendet werden kann. Hat die Phasenleitung der Wechselspannung ein positives Potential, so ist die obere Diode in Durchlassrichtung gepolt, und am oberen Ausgang liegt die Spannung +12 V an. Eine Halbperiode später ist die untere Diode durchlässig und am unteren Ausgang können jetzt -12 V abgegriffen werden.

Die Kondensatoren dienen zur Glättung des Ausgangssignals. Ist beispielsweise die obere Diode durchlässig, so wird zunächst der Kondensator geladen

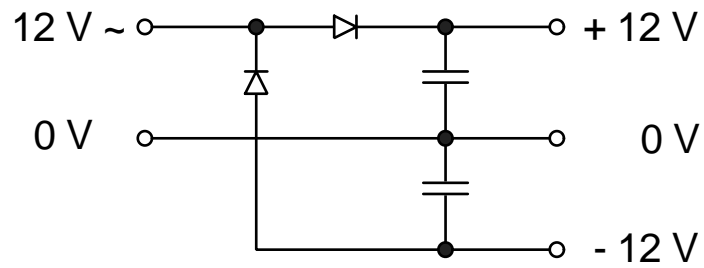


Abbildung 8: Schaltbild des hier beschriebenen Gleichrichters

wodurch die Spannung am Ausgang langsamer ansteigt als sie es ohne den Kondensator tun würde. In der Halbperiode, in der die Diode sperrt, gibt der Kondensator seine Ladung auf den Ausgang ab. Ohne den Kondensator würde die Ausgangsspannung auf 0 zusammenbrechen, sobald die Diode sperrt.