Mathematik der Finanzmärkte
Vorlesungsskript

Sommer 2017

Achim Klenke
Institut für Mathematik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Staudingerweg 9
D-55099 Mainz

16. Februar 2005

korrigiert: 19. April 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Ein Beispiel

Betrachte eine Aktie. Wert heute: $S_0 = 400\,€$. Wert morgen

$$S_1 = \begin{cases} 500\,€ & \text{mit WS } p = \frac{1}{2}, \\ 350\,€ & \text{mit WS } 1 - p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Eine **Europäische Call–Option** ist das Recht (aber nicht die Pflicht), eine Aktie zum Fälligkeitstermin (*expiry* oder *maturity*) T zum Ausführungspreis (*strike price*) K zu erwerben.
Der Wert zur Zeit T ist

$$C_T = (S_T - K)^+.$$

Analog ist eine **Europäische Put Option** ein Verkaufsrecht mit Wert

$$P_T = (K - S_T)^+.$$

Frage: Was ist der faire Verkaufspreis $\pi(C)$ von C?

Im Beispiel für $K = 440\,€$.
Naiv: Preisung über den Erwartungswert

$$\mathbf{E}[C] = \mathbf{E}[(S_1 - K)^+] = p(500\,€ - 440\,€) = 30\,€.$$

Denn der Wert der Option zur Zeit $T = 1$ ist

$$C = \begin{cases} 60\,€, & \text{falls der Kurs steigt,} \\ 0, & \text{falls der Kurs fällt.} \end{cases}$$

In Wirklichkeit ist der faire Preis $\pi(C) = 20\,€$! Warum?
Für $20\,€$ kann man die Option von Hand herstellen. Handelsstrategie (*Hedge*):

Zeit $t = 0$ Kaufe 0.4 Aktien je 400 €. Das kostet 160 €. Leihe dafür 140 €von der Bank.
Verbleibende Kosten=Wert des Portfolios=20 €.

Zeit $t = 1$ Fall 1: $S_1 = 500\,€$. Dann ist der Wert des Portfolios $0.4 \cdot 500\,€ - 140\,€ = 60\,€$.
Fall 2: $S_1 = 350\,€$. Dann ist der Wert des Portfolios $0.4 \cdot 350\,€ - 140\,€ = 0\,€$.
In jedem Fall wird genau der Wert der Option nachgebildet.

Wäre der Marktpreis $\pi(C)$ für die Option > 20 €, so könnte man einen sicheren Gewinn machen: Stelle Option für 20 € her und verkaufe sie für $\pi(C) > 20$ €.

Wäre $\pi(C) < 20$ €: Kaufe Option, Verkaufe 0.4Aktien, Verleihe 140 €. In beiden Fällen erwirtschaftet man einen sicheren Gewinn.

Bemerke: Der faire Preis $\pi(C)$ hängt nicht von p ab!
Gibt es einen Wert p^*, sodass $\pi(C) = \mathbf{E}^*[C]$?
Ja: $p^* = \frac{1}{3}$ tut es, denn

$$\mathbf{E}^*[C] = p^*(500\,€ - K)$$

$$= \frac{500\,€ - 440\,€}{3} = 20\,€.$$

Allgemeiner: Sei

$$H = \begin{cases} H^b, & \text{falls } S_1 = 500\,€, \\ H^a, & \text{falls } S_1 = 350\,€, \end{cases}$$

ein **contingent Claim** (kurz **Claim**). Dann ist der faire Preis

$$\pi(H) = \mathbf{E}^*[H] = p^* H^b + (1 - p^*) H^a,$$

denn es gibt den Hedge

$$\text{Kaufe } \theta^1 = \frac{H^b - H^a}{150\,€} \text{ Aktien}$$

$$\text{Verleihe } \theta^0 = H^b - \frac{H^b - H^a}{150\,€} \cdot 500\,€.$$

Wert des Portfolios zur Zeit 1

$$\theta^1 S_1 + \theta^0 = \begin{cases} \dfrac{H^b - H^a}{150} 500 + H^b - \dfrac{H^b - H^a}{150} 500 = H^b, & \text{falls } S_1 = 500\,€, \\[2ex] \dfrac{H^b - H^a}{150} 350 + H^b - \dfrac{H^b - H^a}{150} 500 = H^a, & \text{falls } S_1 = 350\,€, \end{cases}$$

$$= H.$$

Kosten der Strategie (=Wert des Portfolios bei $t = 0$)

$$\begin{aligned} \pi(H) &= \theta^1 S_0 + \theta^0 \\ &= \frac{H^b - H^a}{150} 400 + H^b - \frac{H^b - H^a}{150} 500 \\ &= \frac{1}{3} H^b + \frac{2}{3} H^a \\ &= p^* H^b + (1 - p^*) H^a \\ &= \mathbf{E}^*[H]. \end{aligned}$$

Beachte: p^* ist unabhängig von p und H.
Was ist p^*?
p^* ist eindeutig festgelegt dadurch, dass

$$\mathbf{E}^*[S_1] = S_0.$$

Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}^*$ heißt heißt **risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß**.

Problem: Nimmt S_1 drei oder mehr mögliche Werte an, so kann ein Claim im Allgemeinen nicht durch einen risikofreien Hedge nachgebildet werden.

Marktannahmen

- Handel ohne Transaktionskosten
- unbegrenzte Stückzahlen (auch Bruchstücke) handelbar
- Geld leihen und verleihen unbegrenzt möglich, eventuell mit Zinsen
- Negativer Besitz an Aktien ist möglich (short position)
- Keine **Arbitragemöglichkeit** (Profit ohne Risiko)

1.2 Binomisches Ein-Perioden-Modell

Handelszeitpunkte: $\mathbb{T} = \{0, 1\}$
Bankkonto mit Verzinsung $r > 0$: $S_0^0 = 1,\ S_1^0 = 1 + r$ „*Cash Bond*“
Risikoanlage $(S_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$
S_1^1 ist eine Zufallsvariable in einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit

$$\mathbf{P}[S_1^1 = \underbrace{(1+b)S_0^1}_{=:S^b}] = p, \qquad \mathbf{P}[S_1^1 = \underbrace{(1+a)S_0^1}_{=:S^a}] = 1-p,$$

für ein $p \in (0, 1)$. Um Arbitrage auszuschließen, muss $a < r < b$ gelten. Wir setzen

$$\beta = \frac{1}{1+r}.$$

Portfolio:
$\theta_t^0 =$ Einheiten des Cash Bond S_t^0 in der Zeit $(t-1, t]$
$\theta_t^0 =$ Einheiten der Risikoanlage S_t^1 in der Zeit $(t-1, t]$

Wert des Portfolios

$$\begin{aligned} V_0 &= \theta_1^0 S_0^0 + \theta_1^1 S_0^1 =: \theta_1 \cdot S_0 \\ V_t &= \theta_t^0 S_t^0 + \theta_t^1 S_t^1 =: \theta_t \cdot S_t \quad \text{für } t \geq 1. \end{aligned}$$

Claim

$$H_1 = \begin{cases} H^a, & \text{falls } S_1^1 = (1+a)S_0^1 \\ H^b, & \text{falls } S_1^1 = (1+b)S_0^1. \end{cases}$$

Fairer Preis $H_0 = \pi(H) =$? Wird durch Hedge θ ermittelt. Dabei muss ein Hedge erfüllen

$$V_0 = H_0, \qquad V_1 = H_1.$$

Also

$$\begin{aligned} H^a &= (1+r)V_0 + \theta_1^1\big((1+a)S_0^1 - (1+r)S_0^1\big) \\ H^b &= (1+r)V_0 + \theta_1^1\big((1+b)S_0^1 - (1+r)S_0^1\big). \end{aligned}$$

Auflösen nach θ_1^1 ergibt

$$\theta_1^1 = \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1} = \frac{H^b - H^a}{S^b - S^a} \qquad \text{(sogenanntes „}\Delta\text{“)}. \tag{1.1}$$

Nochmal Einsetzen (mit $\beta = \frac{1}{1+r}$) liefert

$$H^b = (1+r)\theta_1^0 + \frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}(1+b)S_0^1.$$

Es folgt

$$\theta_1^0 = \beta\frac{(1+b)H^a - (1+a)H^b}{b-a}$$

und

$$\begin{aligned}
V_0 &= \theta_1^1 S_0^1 + \theta_1^0 S_0^0 \\
&= \underbrace{\beta(1+r)}_{=1}\frac{H^b - H^a}{(b-a)S_0^1}S_0^1 + \beta\frac{(1+b)H^a - (1+a)H^b}{b-a}\underbrace{S_0^0}_{=1} \\
&= \beta\frac{r(H^b - H^a)}{b-a} + \beta\frac{bH^a - aH^b}{b-a} \\
&= \beta\Big[H^a \cdot \underbrace{\frac{b-r}{b-a}}_{=1-p^*} + H^b \cdot \underbrace{\frac{r-a}{b-a}}_{=:p^*}\Big].
\end{aligned}$$

Also ist

$$\pi(H) = V_0 = \beta[(1-p^*)H^a + p^* H^b].$$

Neues W-Maß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch

$$Q[S_1^1 = (1+b)S_0^1] = 1 - Q[S_1^1 = (1+a)S_0^1] = p^*.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^Q[\beta S_1^1] &= \beta S_0^1\big[p^*(1+b) + (1-p^*)(1+a)\big] \\
&= S_0^1\Big[\frac{1-\beta(1+a)}{b-a}(1+b) + \frac{\beta(1+b)-1}{b-a}(1+a)\Big] \\
&= S_0^1.
\end{aligned}$$

Das heißt, der diskontierte Preis $\overline{S}_t^1 := \beta^t S_t^1,\ t \in \mathbb{T}$ ist ein Q–Martingal.
Nach Definition von Q ist

$$\pi(H) = V_0 = \mathbf{E}^Q[\beta H].$$

1.3 Binomisches Mehr-Perioden-Modell

Das Modell wird auch **Cox-Ross-Rubinstein Modell** genannt.

- Die Menge der Handelszeiten ist $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$.
- Es gibt einen Cash Bond, der mit Zinsrate $r > 0$ verzinst wird

  $$S_t^0 = (1+r)^t \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T}.$$

  Wir schreiben $\beta := \frac{1}{1+r}$ für den Diskontierungsfaktor.

- Es seien $X_1, \dots, X_T$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit
$$\mathbf{P}[X_t = 1 + b] = 1 - \mathbf{P}[X_1 = 1 + a] = p \in (0, 1) \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T},$$
wobei $a < r < b$.
- Es gebe eine Risikoanlage S^1, die dargestellt wird durch
$$S_t^1 = S_0^1 \cdot X_1 \cdots X_t \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T}.$$
Wir schreiben $\overline{S}_t^1 = \beta^t S_t^1$ für die diskontierte Risikoanlage.

Ein Claim H ist eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, die nur von $X_1, \dots, X_T$ abhängt (also $\sigma(X_1, \dots, X_T)$-messbar ist). H_t ist der faire Handelspreis von H zur Zeit t. Speziell ist $H_T = H$ und $\pi(H) := H_0$. Es ist H_t dann $\sigma(X_1, \dots, X_t)$-messbar.

Rückwärtsinduktion

Wir schreiben $H_t^{x_1,\dots,x_t}$ für den fairen Handelspreis von H zur Zeit t, wenn die Werte $X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t$ bekannt sind. Analog schreiben wir $S_t^{1;\, x_1,\dots,x_t} = S_0^1 \cdot \prod_{s=1}^t x_s$ für den Wert der Risikoanlage zur Zeit t, wenn die entsprechenden Werte bekannt sind. Dann ist wie im Ein-Perioden-Modell
$$H_{T-1}^{x_1,\dots,x_{T-1}} = \beta \left[(1-p^*) H^{x_1,\dots,x_{T-1},1+a} + p^* H^{x_1,\dots,x_{T-1},1+b}\right]$$
und
$$\theta_T^0 = \beta \frac{(1+b) H_T^{x_1,\dots,x_{T-1},1+a} - (1+a) H_T^{x_1,\dots,x_{T-1},1+b}}{b-a}$$
$$\theta_T^1 = \frac{H^{x_1,\dots,x_{T-1},1+b} - H^{x_1,\dots,x_{T-1},1+a}}{(b-a) S_{T-1}^{1;\, x_1,\dots,x_{T-1}}}.$$
Sei (wie im Einperiodenmodell) $p^* = \frac{r-a}{b-a}$. Definieren wir Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ so, dass $X_1, \dots, X_T$ unabhängig sind mit
$$Q[X_t = 1 + b] = 1 - Q[X_t = 1 + a] = p^* \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T},$$
so ist
$$\begin{aligned} H_{T-1}^{x_1,\dots,x_{T-1}} &= \mathbf{E}^Q[\beta H_T^{x_1,\dots,x_{T-1},X_T}] \\ &= \mathbf{E}^Q[\beta H_T |\, X_1 = x_1, \dots, X_{T-1} = x_{T-1}]. \end{aligned}$$
Ferner ist (Nachrechnen!)
$$\mathbf{E}^Q[\beta S_{t+1}^1 | S_t^1 = s_t] = s_t \quad \text{für alle möglichen } s_t.$$
Also ist $(\overline{S}_t^1)_{t \in \mathbb{T}}$ ein Q-Martingal.

Für den Induktionsschritt betrachten wir nun $H_{T-1} = H_{T-1}^{X_1,\dots,X_{T-1}}$ als Claim in einem Modell mit $T-1$ Handelstagen. Dann ist
$$\begin{aligned} H_{T-2}^{x_1,\dots,x_{T-2}} &= \mathbf{E}^Q[\beta H_{T-1} |\, X_1 = x_1, \dots, X_{T-2} = x_{T-2}] \\ &= \mathbf{E}^Q[\beta^2 H_T |\, X_1 = x_1, \dots, X_{T-2} = x_{T-2}]. \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir

$$H_t^{x_1,\dots,x_t} = \mathbf{E}^Q[\beta^t H_T \,|\, X_1 = x_1,\dots,X_t = x_t].$$

Speziell für $t = 0$ erhalten wir die Preisformel

$$\pi(H) = H_0 = \mathbf{E}^Q[\beta^T H_T].$$

Wie oben erhalten wir für den Hedge

$$\theta_t^0 = \beta \frac{(1+b)H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},1+a} - (1+a)H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},1+b}}{b-a}$$

$$\theta_t^1 = \frac{H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},1+b} - H_t^{X_1,\dots,X_{t-1},1+a}}{(b-a)S_{t-1}^1}.$$

Beispiel: Europäischer Call

$$H_T = (S_T^1 - K)^+.$$

Dann ist

$$Q[S_T^1 = S_0^1(1+b)^t(1+a)^{T-t}] = \binom{T}{t}(p^*)^t(1-p^*)^{T-t}.$$

Also, mit $A = \min\{t \in \mathbb{N} : S_0^1(1+b)^t(1+a)^{T-t} > K\}$,

$$\begin{aligned} H_0 &= \beta^T \sum_{t=0}^{T} \binom{T}{t}(p^*)^t(1-p^*)^{T-t}\left[(1+b)^t(1+a)^{T-t}S_0^1 - K\right]^+ \\ &= S_0^1 \sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t}(p^*)^t(1-p^*)^{T-t}\left[\frac{(1+b)^t(1+a)^{T-t}}{(1+r)^T}\right] \\ &\quad - K\beta^T \sum_{t=A}^{T}\binom{T}{t}(p^*)^t(1-p^*)^{T-t}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $p' = p^* \frac{1+b}{1+r}$, dann ist $p' \in (0,1)$ und $1 - p' = \frac{(1-p^*)(1+a)}{1+r}$. Wir definieren die Verteilungsfunktion der Binomialverteilung

$$b_{n,q}(m) = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k} q^k(1-q)^{n-k}$$

und

$$\tilde{b}_{n,q}(m) = \sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k} q^k(1-q)^{n-k}$$

Dann erhalten wir die CRR-Formel

$$\pi(H) = H_0 = S_0^1\, \tilde{b}_{T,p'}(A) - K\,\beta^T\, \tilde{b}_{T,p^*}(A).$$

Dies ist das diskrete Analogon zur Black–Scholes Formel, die wir später noch kennen lernen werden.

1.4 Weitere Derivate

Europäischer Put $P = (K - S^1_T)^+$.
Dann ist
$$C_T - P_T = (S^1_T - K)^+ - (K - S^1_T)^+ = S^1_T - K.$$
Für jedes $t \in \mathbb{T}$ ist also
$$C_t - P_t = S^1_t - \beta^{T-t}K. \tag{1.2}$$
Dieser Zusammenhang heißt die **Call–Put Parität** für europäische Optionen. Es reicht also beim Preisproblem, nur Calls zu betrachten.

Amerikanischer Call/Put $C(A)/P(A)$ Fälligkeit T, Ausführungspreis K.
Ein amerikanischer Call/Put ist das Recht, zu einem beliebigen Zeitpunkt $\tau \leq T$, eine Aktie zum Preis K zu kaufen/verkaufen.
$$C(A) = \sup_{\tau \leq T \text{ Stoppzeit}} (S^1_\tau - K)^+ \beta^{\tau - T},$$
$$P(A) = \sup_{\tau \leq T \text{ Stoppzeit}} (K - S^1_\tau)^+ \beta^{\tau - T}.$$
Für amerikanische Optionen gibt es keine Call–Put Parität.

Forward F Ein Forward ist ein Privatkontrakt („over the counter“=OTC), der vorsieht, dass ein Partner („long“) zum Liefertermin T eine Aktie zum Lieferpreis K dem anderen Partner („short“) abkauft.
$$F = S^1_T - K.$$
K ist dabei so gewählt, dass der Kontrakt anfangs wertlos ist: $F_0 = 0$. Wie muss nun also K gewählt werden?
Hedge: $\theta^1_t = 1,\ t \leq T,\ \theta^0_t = -\beta^T K$.
Dann ist
$$V_T = \theta_T \cdot S_T = S^1_T - \beta^T K S^0_T = S^1_T - K = F.$$
Der Wert des Forward Kontrakts muss anfangs gleich Null sein:
$$F_0 := V_0 = \theta^1_0 S^1_0 + \theta^0_0 S^0_0 = S^1_0 - \beta^T K \stackrel{!}{=} 0,$$
also ist der Forward Preis
$$K = \beta^{-T} S^1_0.$$

Kapitel 2

Steilkurs Martingale

2.1 σ–Algebren

Sei Ω eine höchstens abzählbare Menge von Elementarereignissen. Eine σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf Ω ist ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ mit den Eigenschaften

$$\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$$

$$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$$

$$A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Interpretation

$$\mathcal{F} = \left\{ A \subset \Omega : \ A \text{ ist beobachtbares Ereignis} \right\}.$$

$\mathcal{F}$ gibt also den Informationsstand eines Beobachters an. Dieser Informationsstand kann durch zeitlichen Verlauf wachsen.

Definition 2.1 *Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ von Teil-σ-Algebren heißt **Filtration**, falls*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$$

Interpretation: $\mathcal{F}_t$ sind die bis Zeit t beobachtbaren Ereignisse.

Beispiel 2.2 T–facher Münzwurf. $\Omega = \{0,1\}^T$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $\mathcal{F}_t = \left\{ A_t \times \{0,1\}^{T-t} : \ A_t \subset \{0,1\}^t \right\}$. A_t beschreibt die möglichen Ausgänge der ersten t Würfe.

Definition 2.3 *Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt $\mathcal{F}$–**messbar**, falls $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für jede Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}$. Also, falls $X \in B$ ein $\mathcal{F}$–beobachtbares Ereignis ist. Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein W-Raum, so heißt X eine Zufallsvariable.*

Definition 2.4 *Ist $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung, so heißt*

$$\sigma(X) := \left\{ X^{-1}(B) : \ B \subset \mathbb{R} \ \textit{Borel-Menge} \right\}$$

*die von X **erzeugte σ–Algebra**.*

$\sigma(X)$ umfasst alle Ereignisse, die sich mit Kenntnis von X beschreiben lassen.

Lemma 2.5 *$\sigma(X)$ ist die kleinste σ-Algebra $\mathcal{G}$ auf Ω, sodass X $\mathcal{G}$–messbar ist. Ist speziell X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so ist $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$.*

Beweis Übung! □

Beispiel 2.6 $\Omega = \{0,1\}^2,\ X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$.

$$\sigma(X) = \Big\{\emptyset, \{(0,0)\}, \{(0,1),(1,0)\}, \{(1,1)\}, \{(0,0),(0,1),(1,0)\}, \\ \{(0,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0),(1,1)\}, \Omega\Big\}$$

Definition 2.7 *Sind $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, so heißt*

$$\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \Big\{(X_1, \ldots, X_n)^{-1}(B) :\ B \subset \mathbb{R}^n\Big\}$$

die von $X_1, \ldots, X_n$ erzeugte σ–Algebra. Dies ist die kleinste σ–Algebra auf Ω, sodass $X_1, \ldots, X_n$ messbar sind.

Definition 2.8 *Sind $X_0, \ldots, X_T$ Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, so heißt die durch*

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_0, \ldots, X_t), \qquad t \in \{0, \ldots, T\}$$

definierte Filtration $\mathbb{F}$ die von X erzeugte Filtration.

Idee: $\mathbb{F}$ stellt den durch Beobachtung von X wachsenden Informationsstand dar.

Definition 2.9 *Sei $\mathbb{T} := \{0, \ldots, T\}$. Eine Familie $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ heißt* ***stochastischer Prozess****. Ist $\mathbb{F}$ eine Filtration und X_t $\mathcal{F}_t$–messbar für jedes $t \in \mathbb{T}$, so heißt X an $\mathbb{F}$* ***adaptiert****. Ist X_t auch $\mathcal{F}_{t-1}$–messbar für $t \geq 1$, so heißt X* ***previsibel****.*

Beispiel 2.10 (Münzwurf) $\Omega = \{-1, +1\}^T$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}[\{\omega\}] = 2^{-T}$ für jedes $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T) \in \Omega$. Setze

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_t(\omega) &= \omega_t \\ Y_t &= X_1 + \ldots + X_t \\ Z_t &= X_1 + \ldots + X_{t-1}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{F}$ die von X erzeugte Filtration. X, Y, Z sind adaptiert, und Z ist previsibel.

2.2 Bedingte Erwartungen

Sei X eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ und $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil–σ–Algebra. Für $A \in \mathcal{G}$ mit $\mathbf{P}[A] > 0$ definieren wir

$$\mathbf{E}[X|A] = \frac{\mathbf{E}[X \mathbb{1}_A]}{\mathbf{P}[A]}.$$

Dies ist der Erwartungswert von X bezüglich der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}[\,\cdot\,] = \frac{\mathbf{P}[\,\cdot\, \cap A]}{\mathbf{P}[A]}.$$

Da Ω abzählbar ist, gibt es eine endliche oder abzählbare Menge I und disjunkte Ereignisse $A_i \in \mathcal{G}$, $i \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, sodass

$$B \in \mathcal{G} \Longleftrightarrow \exists J \subset I \ \text{ mit } \ B = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Die A_i sind die unzerlegbaren Ereignisse oder **Atome** von $\mathcal{G}$.
Für $\omega \in A_i$ definieren wir

$$Y(\omega) := \begin{cases} \mathbf{E}[X|A_i] = \mathbf{E}[X\mathbb{1}_{A_i}]/\mathbf{P}[A_i], & \text{falls } \mathbf{P}[A_i] > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist Y eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ mit der Eigenschaft

$$\mathbf{E}[Y\mathbb{1}_A] = \mathbf{E}[X\mathbb{1}_A] \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{G}.$$

Hierdurch ist Y eindeutig charakterisiert.

Definition 2.11 *Die Zufallsvariable $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] := Y$ heißt die **bedingte Erwartung** von X gegeben $\mathcal{G}$. Ist $B \in \mathcal{F}$, so heißt $\mathbf{P}[B|\mathcal{G}] := \mathbf{E}[\mathbb{1}_B|\mathcal{G}]$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B gegeben $\mathcal{G}$.*

Beispiel 2.12 Sei $\Omega = \{0,1\}^2$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $\mathbf{P}[\{\omega\}] = \frac{1}{4}$ für jedes ω. Ferner seien

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \big\{\emptyset, \{(0,0),(0,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \Omega\big\}, \\ X(\omega) &= \omega_1 + \omega_2, \\ A_0 &= \{(0,0),(0,1)\}, \quad A_1 = \{(1,0),(1,1)\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathbf{E}[X\,|\,A_0] = \frac{\mathbf{E}[X\mathbb{1}_{A_0}]}{\mathbf{P}[A_0]} = \frac{\frac14 \cdot 0 + \frac14 \cdot 1}{\frac12} = \frac12 \quad \text{und} \quad \mathbf{E}[X\,|\,A_1] = \frac{\frac14 \cdot 1 + \frac14 \cdot 2}{\frac12} = \frac32.$$

Also ist

$$\mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} \frac12, & \text{falls } \omega \in A_0, \\ \frac32, & \text{falls } \omega \in A_1. \end{cases}$$

Wichtiger Spezialfall: $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ für eine Zufallsvariable Y.

Definition 2.13 *Wir schreiben $\mathbf{E}[X|Y] = \mathbf{E}[X\,|\,\sigma(Y)]$.*

Satz 2.14 (Faktorisierungslemma) *Sei X eine reelle Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ und Y eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable. Dann existiert eine (bis auf Gleichheit $\mathbf{P}_Y$-fast überall) eindeutig bestimmte messbare Abbildung $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, sodass*

$$\mathbf{E}[X\,|\,Y] = f(Y).$$

Für $y \in \mathbb{R}^d$ schreiben wir $\mathbf{E}[X\,|\,Y = y] := f(y)$.

Satz 2.15 (Eigenschaften der bedingten Erwartung) *Seien X und Y Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ und $\mathbf{E}[|Y|] < \infty$. Ferner seien $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}$ Unter-σ–Algebren von $\mathcal{F}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) (Linearität) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{E}[\lambda X + Y \,|\, \mathcal{G}] = \lambda \mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}] + \mathbf{E}[Y \,|\, \mathcal{G}]$.

(ii) Ist Y $\mathcal{G}$-messbar, so ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[XY \,|\, \mathcal{G}] &= Y\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}] \\ \mathbf{E}[Y \,|\, \mathcal{G}] &= Y. \end{aligned}$$

(iii) (Turmeigenschaft) Ist $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, so ist

$$\mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}_1] \,\big|\, \mathcal{G}_2\big] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}_2] \,\big|\, \mathcal{G}_1\big] = \mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}_1].$$

(iv) (Monotonie) Ist $X \geq Y$, so ist

$$\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}] \geq \mathbf{E}[Y \,|\, \mathcal{G}].$$

(v) (Jensen'sche Ungleichung) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konvex, so ist

$$\infty \;\geq\; \mathbf{E}[\varphi(X) \,|\, \mathcal{G}] \;\geq\; \varphi(\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}]).$$

(vi) Sind X und Y unabhängig, so ist $\mathbf{E}[X|Y] = \mathbf{E}[X]$.

Beispiel 2.16 Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X + Y \,|\, Y] &= \mathbf{E}[X \,|\, Y] + \mathbf{E}[Y \,|\, Y] \\ &= \mathbf{E}[X] + Y. \end{aligned}$$

Beispiel 2.17 Seien $X_1, \ldots, X_T$ unabhängig, $\mathbf{E}[X_t] = 0$, $t = 1, \ldots, T$, $\mathcal{F}_t := \sigma(X_1, \ldots, X_t)$, $S_1 := X_1 + \ldots + X_t$.
Dann ist für $t > s$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[X_1 \,|\, \mathcal{F}_s] + \ldots + \mathbf{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_s] \\ &= X_1 + \ldots + X_s + \mathbf{E}[X_{s+1}] + \ldots + \mathbf{E}[X_t] \\ &= S_s. \end{aligned}$$

Korollar 2.18 (Bedingte Erwartung als Projektion) *Sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ-Algebra und X eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[X^2] < \infty$. Dann gilt für jedes $\mathcal{G}$-messbare Y mit $\mathbf{E}[Y^2] < \infty$*

$$\mathbf{E}\big[(X - Y)^2\big] \geq \mathbf{E}\Big[\big(X - \mathbf{E}[X\big|\mathcal{G}]\big)^2\Big]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $Y = \mathbf{E}[X\big|\mathcal{G}]$.

Mit anderen Worten: $\mathbf{E}[X\big|\mathcal{G}]$ ist die beste Vorhersage, die man über X machen kann, wenn man den Kenntnisstand $\mathcal{G}$ hat, oder formal: $\mathbf{E}[X\big|\mathcal{G}]$ ist die orthogonale Projektion von X auf $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. (Hierbei ist $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$ der Raum der quadratintegrierbaren $\mathcal{G}$-messbaren Zufallsvariablen.)

Beweis Sei Y messbar bezüglich $\mathcal{G}$. Dann ist (nach der Turmeigenschaft) $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X\big|\mathcal{G}]Y]$ und

$$\mathbf{E}\big[X\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}]\big] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}] \,\big|\, \mathcal{G}]\big] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X \,|\, \mathcal{G}]^2\big],$$

also

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\big[(X-Y)^2\big] - \mathbf{E}\Big[\big(X-\mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{G}]\big)^2\Big] \\
&\qquad = \mathbf{E}\Big[X^2 - 2XY + Y^2 - X^2 + 2X\mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{G}] - \mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{G}]^2\Big] \\
&\qquad = \mathbf{E}\Big[Y^2 - 2Y\,\mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{G}] + \mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{G}]^2\Big] \\
&\qquad = \mathbf{E}\Big[\big(Y-\mathbf{E}[X\,|\,\mathcal{G}]\big)^2\Big]. \qquad \square
\end{aligned}$$

2.3 Martingale

Definition 2.19 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein W-Raum, $\mathbb{T} = \{0, \dots, T\}$, und $\mathbb{F}$ eine Filtration. Ein adaptierter Prozess $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ mit $\mathbf{E}[|X_t|] < \infty$, $t \in \mathbb{T}$ heißt*

Martingal,	*falls* $\mathbf{E}[X_t\,|\,\mathcal{F}_s] = X_s$	*für alle* $t > s$
Submartingal,	*falls* $\mathbf{E}[X_t\,|\,\mathcal{F}_s] \geq X_s$	*für alle* $t > s$
Supermartingal,	*falls* $\mathbf{E}[X_t\,|\,\mathcal{F}_s] \leq X_s$	*für alle* $t > s$

Bemerkung 2.20 Es reicht, jeweils nur $t = s+1$ zu betrachten, denn

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X_{s+2}\,|\,\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_{s+2}\,|\,\mathcal{F}_{s+1}]\,\big|\,\mathcal{F}_s\big],$$

und wenn die definierenden Gleichung (bzw. Ungleichung) in einem Zeitschritt gilt, dann zieht sie sich durch in den zweiten Zeitschritt und so fort.

Bemerkung 2.21 Wird die Filtration $\mathbb{F}$ nicht explizit angegeben, so wird stillschweigend angenommen, dass $\mathbb{F} =: \sigma(X)$ die von X erzeugte Filtration ist

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\, s \leq t).$$

Beispiel 2.22 Seien $Y_1, \dots, Y_T$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[Y_t] = 0$, $t \in \mathbb{T}$. $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$ und $X_t := \sum_{s=1}^{t} Y_s$. Dann ist X adaptiert, und für $t > s$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_t\,|\,\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[X_t - X_s|\mathcal{F}_s] + \mathbf{E}[X_s\,|\,\mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{r=s+1}^{t} \underbrace{\mathbf{E}[Y_r\,|\,\mathcal{F}_s]}_{=0} + X_s \\
&= X_s.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass X ein Martingal ist.

Analog impliziert $\mathbf{E}[Y_t] \geq 0$, dass X ein Submartingal ist, und $\mathbf{E}[Y_t] \leq 0$ dass X ein Supermartingal ist.

Beispiel 2.23 Wie oben, jedoch mit $\mathbf{E}[Y_t] = 1$ und $X_t = \prod_{s=1}^{t} Y_s$, $X_0 = 1$. Dann ist X adaptiert und

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{s+1}\,|\,\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[Y_{s+1}X_s\,|\,\mathcal{F}_s] \\
&= X_s\mathbf{E}[Y_{s+1}\,|\,\mathcal{F}_s] \\
&= X_s.
\end{aligned}$$

Also ist X ein Martingal.

Beispiel 2.24 Ist Y eine Zufallsvariable mit $\mathbf{E}[|Y|] < \infty$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ eine Filtration sowie

$$X_t := \mathbf{E}[Y|\mathcal{F}_t], \qquad t \in \mathbb{T}.$$

Dann ist X ein Martingal. Übung!
Tatsächlich hat jedes $\mathbb{F}$-Martingal diese Gestalt für eine gewisse Zufallsvariable X (man nehme $X := X_T$). Bei unbeschränktem Zeithorizont ($\mathbb{T} = \mathbb{N}_0$) ist diese Strukturaussage nur unter Zusatzannahmen an das Martingal gültig.

Beispiel 2.25 (Diskretes Stochastisches Integral)
Sei S ein $\mathbb{F}$-Martingal und $(\theta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ beschränkt und $\mathbb{F}$-previsibel, $\theta_0 := \theta_1$. Definiere den stochastischen Prozess $\theta \bullet S$ durch

$$(\theta \bullet S)_t := V_t := \sum_{s=1}^{t} \theta_s (S_s - S_{s-1}).$$

Interpretation: V_t Wert des Portfolios mit Anlagestrategie θ und Kurs S.

Dann ist V an $\mathbb{F}$ adaptiert und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[V_{t+1}|\mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[V_t + \theta_{t+1}(S_{t+1} - S_t)|\mathcal{F}_t] \\ &= V_t + \mathbf{E}[\theta_{t+1}(S_{t+1} - S_t)|\mathcal{F}_t] \\ &= V_t + \theta_{t+1} \underbrace{\mathbf{E}[S_{t+1} - S_t|\mathcal{F}_t]}_{=0} \\ &= V_t. \end{aligned}$$

Also ist V ein Martingal.

Lemma 2.26 *Sei M ein previsibles Martingal. Dann ist $M_t = M_0$ für alle t.*

Beweis Da M ein Martingal ist (erste Gleichheit) und previsibel (zweite Gleichheit), gilt

$$M_t - M_{t-1} = M_t - \mathbf{E}[M_t|\mathcal{F}_{t-1}] = M_t - M_t = 0. \qquad \square$$

Satz 2.27 (Stabilitätssatz für Stochastische Integrale) *Ein adaptierter Prozess S ist genau dann ein Martingal, wenn für jeden beschränkten previsiblen Prozess θ das diskrete stochastische Integral $\theta \bullet S$ ein Martingal ist.*

Beweis „$\Longrightarrow$" Das wurde schon gezeigt.

„$\Longleftarrow$" Wähle $t_0 \in \mathbb{T}$, Setze $\theta_t = \mathbb{1}_{\{t=t_0\}}$ Dann ist

$$0 = \mathbf{E}[(\theta \bullet S)_{t_0}|\mathcal{F}_{t_0-1}] = \mathbf{E}[S_{t_0}|\mathcal{F}_{t_0-1}] - S_{t_0-1}. \qquad \square$$

Satz 2.28 *Sei X ein Martingal und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Ist $\mathbf{E}[|\varphi(X_T)|] < \infty$, dann ist $(\varphi(X_t))_{t\in\mathbb{T}}$ ein Submartingal.*

Speziell ist für jedes $p \geq 1$ $(|X_t|^p)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Submartingal, falls $\mathbf{E}[|X_T|^p] < \infty$.

Beweis Da φ konvex ist, existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) \geq \lambda \cdot x + \varphi(0)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass $\mathbf{E}[\varphi(X_t)^-] \leq |\lambda| \cdot \mathbf{E}[|X_t|] + \varphi(0)^- < \infty$. Da φ konvex ist, ist auch $\varphi^+ : x \mapsto \varphi(x)^+$ konvex, also nach der Jensen'schen Ungleichung (und nach Voraussetzung)

$$\mathbf{E}[\varphi(X_t)^+] \;\leq\; \mathbf{E}[\varphi(X_T)^+] \;\leq\; \mathbf{E}[|\varphi(X_T)|] \;<\; \infty.$$

Mithin ist $\mathbf{E}[|\varphi(X_t)|] < \infty$. Nochmaliges Anwenden der Jensen'schen Ungleichung liefert

$$\mathbf{E}[\varphi(X_{t+1})|\mathcal{F}_t] \;\geq\; \varphi(\mathbf{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t]) = \varphi(X_t). \qquad \square$$

2.4 Doob'sche Zerlegung

Sei X ein adaptierter Prozess mit $\mathbf{E}[|X_t|] < \infty$ für jedes $t \in \mathbb{T}$. Definiere für $t \in \mathbb{T}$

$$M_t := X_0 + \sum_{s=1}^{t} (X_s - \mathbf{E}[X_s \,|\, \mathcal{F}_{s-1}])$$

und

$$A_t := \sum_{s=1}^{t} (\mathbf{E}[X_s \,|\, \mathcal{F}_{s-1}] - X_{s-1}) .$$

Dann ist

$$X_t = M_t + A_t, \qquad\qquad \textbf{(Doob Zerlegung)}$$

wobei M ein Martingal und A previsibel ist mit $A_0 = 0$. Durch diese Eigenschaften ist die Zerlegung schon eindeutig charakterisiert. Probe (dafür, dass M ein Martingal ist):

$$\mathbf{E}[M_t - M_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E}\big[X_t - \mathbf{E}[X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \,\big|\, \mathcal{F}_{t-1}\big] = 0,$$

Also ist M ein Martingal.

Sind $X = M + A = M' + A'$ zwei Zerlegungen, so ist $M - M' = A - A'$ ein previsibles Martingal und daher konstant nach Lemma 2.26. Es folgt $M = M'$ und $A = A'$.

X ist genau dann ein Submartingal, wenn A monoton wachsend ist, genau dann ein Supermartingal, wenn A monoton fallend ist, und genau dann ein Martingal, wenn $A_t = 0$ für jedes $t \in \mathbb{T}$.

Beispiel 2.29 Sei Y ein Martingal mit $\mathbf{E}[Y_T^2] < \infty$. Nach Satz 2.28 ist

$$X = (Y_t^2)_{t \in \mathbb{T}}$$

ein Submartingal. Es ist

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{s=1}^{t} \mathbf{E}[Y_s^2 | \mathcal{F}_{s-1}] - Y_{s-1}^2 \\ &= \sum_{s=1}^{t} \mathbf{E}[(Y_s - Y_{s-1})^2 | \mathcal{F}_{s-1}] - 2Y_{s-1}^2 + 2 \underbrace{\mathbf{E}[Y_{s-1} Y_s | \mathcal{F}_{s-1}]}_{=Y_{s-1}\mathbf{E}[Y_s|\mathcal{F}_{s-1}]=Y_{s-1}^2} \\ &= \sum_{s=1}^{t} \mathbf{E}[(Y_s - Y_{s-1})^2 | \mathcal{F}_{s-1}]. \end{aligned}$$

Bezeichnung: $\langle Y \rangle_t := A_t$ heißt **quadratischer Variationsprozess** von Y.

2.5 Stoppzeiten und Optional Sampling

Sei $\mathbb{T} = \{0, 1 \ldots, T\}$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ eine Filtration auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Definition 2.30 *Eine Abbildung*

$$\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$$

*heißt **Stoppzeit**, falls* $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ *für jedes* $t \in \mathbb{T}$.

Beispiel 2.31 Sei X an $\mathbb{F}$ adaptiert und $K > 0$. Dann ist

$$\tau := \inf\{t \in \mathbb{T} : X_t \geq K\}$$

eine Stoppzeit, denn

$$\{\tau \leq t\} \;=\; \bigcup_{s=1}^{t} \{X_s \geq K\} \;\in\; \mathcal{F}_t.$$

Lemma 2.32 *Sind σ, τ Stoppzeiten, dann auch*

$$\sigma \vee \tau, \qquad \sigma \wedge \tau, \qquad \textit{und } \sigma + \tau.$$

Beweis Exemplarisch für $\sigma \vee \tau$:

$$\{\sigma \vee \tau \leq t\} \;=\; \underbrace{\{\sigma \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \;\in\; \mathcal{F}_t.$$

Andere Aussagen ähnlich. □

Achtung: Mit τ ist zwar auch $\tau + 1$, nicht aber $\tau - 1$ wieder eine Stoppzeit.

Definition 2.33 *Ist τ eine Stoppzeit, so wird mit*

$$\mathcal{F}_\tau = \big\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\, t \in \mathbb{T}\big\}$$

*die σ**–Algebra der** τ**-Vergangenheit** bezeichnet.*

Anschaulich: Die Ereignisse in $\mathcal{F}_\tau$ sind beobachtbar bis Zeit τ.

Beispiel 2.34

$$\begin{aligned} \tau &= \inf\{t : X_t \geq K\} \\ A &= \big\{\max\{X_t,\, t \in \mathbb{T}\} > K - 5\big\} \\ B &= \big\{\max\{X_t,\, t \in \mathbb{T}\} > K + 5\big\} \end{aligned}$$

Wegen $\{\tau \leq t\} \subset A \;\; \forall t \in \mathbb{T}$ ist $A \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Also ist $A \in \mathcal{F}_\tau$. Jedoch ist im Allgemeinen $B \notin \mathcal{F}_\tau$.

Definition 2.35 *Ist $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ adaptiert und $\tau < \infty$ eine Stoppzeit, so definieren wir die Zufallsvariable X_τ durch*

$$(X_\tau)(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega).$$

Lemma 2.36 *X_τ ist $\mathcal{F}_\tau$–messbar.*

Beweis Sei $B \subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{T}$. Dann ist

$$(X_\tau)^{-1}(B) = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} \big(\{\tau = t\} \cap X_t^{-1}(B)\big)$$

also

$$(X_\tau)^{-1}(B) \cap \{\tau \leq s\} \;=\; \bigcup_{t=0}^{s} \big(\underbrace{\{\tau = t\} \cap \{X_t^{-1}(B)\}}_{\in \mathcal{F}_t}\big) \;\in\; \mathcal{F}_s.$$

□

Lemma 2.37 *Sind $\sigma \le \tau$ Stoppzeiten, so ist*

$$\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau.$$

Beweis Sei $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Dann ist

$$A \cap \{\tau \le t\} \;=\; \underbrace{A \cap \{\sigma \le t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \underbrace{\{\tau \le t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \;\in\; \mathcal{F}_t,$$

also $A \in \mathcal{F}_\tau$. □

Satz 2.38 (Optional Sampling Theorem) *Sei $\tau \le T$ eine Stoppzeit und X ein Martingal. Dann gilt*

$$X_\tau = \mathbf{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_\tau].$$

Speziell ist

$$\mathbf{E}[X_\tau] = \mathbf{E}[X_0].$$

Beweis Es reicht zu zeigen, dass für jedes $A \in \mathcal{F}_\tau$ gilt

$$\mathbf{E}[X_T \, \mathbb{1}_A] = \mathbf{E}[X_\tau \, \mathbb{1}_A].$$

Nun ist für $t \in \mathbb{T}$ die Menge $\{\tau = t\} \cap A \in \mathcal{F}_t$, also

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_\tau \mathbb{1}_A] &= \sum_{t=0}^{T} \mathbf{E}[X_t \, \mathbb{1}_{\{\tau = t\} \cap A}] \\
&= \sum_{t=0}^{T} \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_T \,|\, \mathcal{F}_t] \, \mathbb{1}_{\{\tau = t\} \cap A}\big] \\
&= \sum_{t=0}^{T} \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_T \, \mathbb{1}_A \, \mathbb{1}_{\{\tau = t\}} \,|\, \mathcal{F}_t]\big] \\
&= \sum_{t=0}^{T} \mathbf{E}[X_T \, \mathbb{1}_A \, \mathbb{1}_{\{\tau = t\}}] \\
&= \mathbf{E}[X_T \mathbb{1}_A].
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.39 Das OST gilt für Martingale mit unbeschränktem Zeithorizont nur unter der zusätzlichen Annahme: $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ist gleichgradig integrierbar. Hinreichend dafür ist beispielsweise:

$$\sup_{t \in \mathbb{N}_0} \mathbf{E}\big[|X_t|^p\big] < \infty \qquad \text{für ein } p > 1.$$

Korollar 2.40 *Ist X ein Submartingal und sind $\sigma \le \tau \le T$ Stoppzeiten, so ist*

$$X_\sigma \;\le\; \mathbf{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma]$$

und speziell $\mathbf{E}[X_\sigma] \le \mathbf{E}[X_\tau]$.

Ist X ein Martingal, so gilt jeweils Gleichheit.

Beweis Sei $X = M + A$ die Doob'sche Zerlegung, also A previsibel und monoton wachsend, $A_0 = 0$, und M ein Martingal. Dann ist

$$\begin{aligned} X_\sigma &= A_\sigma + M_\sigma \\ &= \mathbf{E}[A_\sigma + M_T \,|\, \mathcal{F}_\sigma] \\ &\overset{\tau \geq \sigma}{\leq} \mathbf{E}[A_\tau + M_T \,|\, \mathcal{F}_\sigma] \\ &\overset{\mathcal{F}_\tau \supseteq \mathcal{F}_\sigma}{=} \mathbf{E}[A_\tau + \mathbf{E}[M_T \,|\, \mathcal{F}_\tau] \,\big|\, \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbf{E}[A_\tau + M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma] \\ &= \mathbf{E}[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma]. \end{aligned}$$

□

Satz 2.41 (Optional Stopping) *Sei X ein (Sub-, Super-)Martingal bezüglich $\mathbb{F}$ und $\tau \leq T$ eine Stoppzeit. Sei*

$$X^\tau := (X_{\tau \wedge t})_{t \in \mathbb{T}}$$

der gestoppte Prozess und $\mathbb{F}^\tau = (\mathcal{F}_t^\tau)_{t \in \mathbb{T}} = (\mathcal{F}_{\tau \wedge t})_{t \in \mathbb{T}}$.
Dann ist X^τ ein (Sub-, Super-)Martingal sowohl bezüglich $\mathbb{F}$ als auch $\mathbb{F}^\tau$.

Beweis Wir führen den Beweis nur für den Fall, dass X ein Submartingal ist. Die anderen Fälle ergeben sich, weil dann $-X$ ein Submartingal ist.

Sei also X ein Submartingal. Klar ist X^τ an $\mathbb{F}$ und auch an $\mathbb{F}^\tau$ adaptiert. Wegen $\{\tau > t-1\} \in \mathcal{F}_{t-1}$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{\tau \wedge t} - X_{\tau \wedge (t-1)} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbf{E}[(X_t - X_{t-1}) \mathbb{1}_{\{\tau > t-1\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t-1\}} \mathbf{E}[X_t - X_{t-1} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\ &\geq 0, \quad \text{da } X \text{ ein } \mathbb{F}\text{–Submartingal ist.} \end{aligned}$$

Also ist X^τ ein $\mathbb{F}$-Submartingal.
Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big[X_{\tau \wedge t} \,|\, \mathcal{F}_{\tau \wedge (t-1)}\big] &= \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_{\tau \wedge t} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \,\big|\, \mathcal{F}_{\tau \wedge (t-1)}\big] \\ &\geq \mathbf{E}[X_{\tau \wedge (t-1)} \,|\, \mathcal{F}_{\tau \wedge (t-1)}] = X_{\tau \wedge (t-1)}. \end{aligned}$$

Also ist X^τ auch ein $\mathbb{F}^\tau$-Submartingal. □

2.6 Die Doob'sche Ungleichung

Sei $\mathbb{T} = \{0, 1 \ldots, T\}$ und $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein stochastischer Prozess. Wir schreiben

$$X^* = \sup\{X_t,\, t \in \mathbb{T}\}$$
$$|X|^* = \sup\{|X_t|,\, t \in \mathbb{T}\}.$$

Proposition 2.42 *Ist X ein Submartingal, dann gilt für jedes $\lambda > 0$*

$$\lambda \mathbf{P}[X^* \geq \lambda] \leq \mathbf{E}[X_T \mathbb{1}_{\{X^* \geq \lambda\}}] \leq \mathbf{E}[|X_T| \mathbb{1}_{\{X^* \geq \lambda\}}].$$

Beweis Die zweite Ungleichung ist trivial. Für die erste betrachte

$$\tau := \inf\{t \in \mathbb{T} :\, X_t \geq \lambda\} \wedge T.$$

Nach Korollar 2.40 ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_T] \geq \mathbf{E}\big[X_\tau\big] &= \mathbf{E}\big[X_\tau\,\mathbb{1}_{\{X^*\geq\lambda\}}\big] + \mathbf{E}\big[X_\tau\,\mathbb{1}_{\{X^*<\lambda\}}\big] \\ &\geq \lambda\mathbf{P}\big[X^*\geq\lambda\big] + \mathbf{E}\big[X_T\,\mathbb{1}_{\{X^*<\lambda\}}\big].\end{aligned}$$

(Merke: $\tau = T$, falls $X^* < \lambda$.) Jetzt subtrahiere $\mathbf{E}\big[X_T\mathbb{1}_{\{X^*<\lambda\}}\big]$. □

Satz 2.43 (Doob'sche L^p-Ungleichung) *Sei X ein Martingal oder ein positives Submartingal. Dann gilt für jedes $p \geq 1$ und $\lambda > 0$*

$$\lambda^p\,\mathbf{P}\big[|X|^*\geq\lambda\big] \;\leq\; \mathbf{E}\big[|X_T|^p\big]$$

und für $p > 1$

$$\mathbf{E}\big[|X_T|^p\big] \;\leq\; \mathbf{E}\big[(|X|^*)^p\big] \;\leq\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}\big[|X_T|^p\big].$$

Beweis Nach Satz 2.28 ist $\big(|X_t|^p\big)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Submartingal, und es folgt die erste Ungleichung aus der Proposition.

Bei Teil 2 ist die erste Ungleichung trivial.
Für die zweite Ungleichung beachte, dass nach der Proposition gilt

$$\lambda\,\mathbf{P}[|X|^*\geq\lambda] \;\leq\; \mathbf{E}\big[|X_T|\,\mathbb{1}_{\{|X|^*\geq\lambda\}}\big].$$

Also ist für jedes $k > 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(|X|^*\wedge k)^p] &= \mathbf{E}\left[\int_0^{|X|^*\wedge k} p\lambda^{p-1}\,d\lambda\right] \\ &= p\,\mathbf{E}\left[\int_0^k \lambda^{p-1}\mathbb{1}_{\{|X|^*\geq\lambda\}}\,d\lambda\right] \\ &= p\int_0^k \lambda^{p-1}\,\mathbf{P}[|X|^*\geq\lambda]\,d\lambda \\ &\leq p\int_0^k \lambda^{p-2}\,\mathbf{E}[|X_T|\mathbb{1}_{\{|X|^*\geq\lambda\}}]\,d\lambda \\ &= p\,\mathbf{E}\left[|X_T|\int_0^{|X|^*\wedge k}\lambda^{p-2}\,d\lambda\right] \\ &= \frac{p}{p-1}\mathbf{E}\big[|X_T|\cdot(|X|^*\wedge k)^{p-1}\big].\end{aligned}$$

Die Hölder'sche Ungleichung liefert dann

$$\mathbf{E}\big[(|X|^*\wedge k)^p\big] \;\leq\; \frac{p}{p-1}\,\mathbf{E}\big[(|X|^*\wedge k)^p\big]^{(p-1)/p}\cdot\mathbf{E}\big[|X_T|^p\big]^{1/p}.$$

Hieraus folgt

$$\mathbf{E}[(|X|^*\wedge k)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}[|X_T|^p].$$

Lasse jetzt $k\to\infty$. □

Kapitel 3

Mathematische Modellbildung diskreter Märkte

3.1 Wertpapiere und Portfolio

Im folgenden ist stets

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein abzählbarer Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} = 2^\Omega$.
- Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$
- Handelstage $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$
- $S^i = (S^i_t)_{t \in \mathbb{T}},\ i = 0, 1, \ldots, d$ die Preisverläufe von $d+1$ Wertpapieren (*asset*, *security*)
  $S_t = (S^i_t,\ i = 0, \ldots, d) \in \mathbb{R}^{d+1}$
  $S := (S_t)_{t \in \mathbb{T}}$.
- Annahme: $S^0_t > 0\ \forall\, t \in \mathbb{T}$ sowie $S^i_0,\ i = 1, \ldots, d$ sind deterministisch
- $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$, wobei
  $$\mathcal{F}_t = \sigma(S^i_s,\ i = 1, \ldots, d,\ s \leq t).$$
  Annahme: $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
- S^0 heißt die **risikofreie Anlage** oder *Cash Bond*.

Definition 3.1 *Das Hexupel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ heißt ein* ***Marktmodell****, oder kurz:* ***Markt****.*

Durch $\beta_t = \frac{1}{S^0_t}$ wird der **Diskontierungsprozess** $\beta = (\beta_t)_{t \in \mathbb{T}}$ definiert. Für jeden stochastischen Prozess X definieren wir den **diskontierten Prozess** $\overline{X}$ durch

$$\overline{X}_t = \beta_t X_t \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T}.$$

ΔX ist der **Differenzenprozess**

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}.$$

Eine **Handelsstrategie** ist ein previsibler Prozess

$$\theta = (\theta_t)_{t=1,\dots,T} = \big((\theta_t^i)_{t=1,\dots,T},\ i = 0,\dots,d\big).$$

θ_t^i ist die Anzahl Wertpapiere vom Typ i, die in der Zeit $(t-1,t]$ gehalten werden. Der **Wert** des Portfolios mit Strategie θ ist

$$\begin{aligned} V_0(\theta) &= \theta_1 \cdot S_0 \\ V_t(\theta) &= \theta_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i S_t^i \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Der Zugewinnprozess ist

$$\begin{aligned} G_0(\theta) &= 0 \\ G_t(\theta) &= \sum_{s=1}^{t} \theta_s \cdot \Delta S_s = \sum_{s=1}^{t}\sum_{i=0}^{d} \theta_s^i (S_s^i - S_{s-1}^i) \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Definition 3.2 *Eine Handelsstrategie heißt* ***selbstfinanzierend*** (self–financing)*, falls*

$$V_t(\theta) = V_0(\theta) + G_t(\theta) \quad \textit{für jedes } t \in \mathbb{T}.$$

oder, äquivalent,

$$\Delta V_t(\theta) = \theta_t \cdot \Delta S_t \quad \textit{für jedes } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}.$$

Die Gesamtheit selbstfinanzierender Handelsstrategien wird mit Θ *bezeichnet. Außerdem ist*

$$\Theta^+ = \big\{\theta \in \Theta : \mathbf{P}[V_t(\theta) \geq 0] = 1 \ \ \forall\, t \in \mathbb{T}\big\}.$$

Die Wertveränderung einer selbstfinanzierenden Strategie ergibt sich also nur durch Kursveränderungen, nicht aber durch externe Quellen oder Kosten. Insbesondere entsteht keine Wertveränderung durch das Umschichten zur Zeit $t-1$:

Lemma 3.3

$$\begin{aligned} \theta \in \Theta &\iff (\Delta\theta_t) \cdot S_{t-1} = 0 \quad \textit{für jedes } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\} \\ &\iff (\Delta\theta_t) \cdot \overline{S}_{t-1} = 0 \quad \textit{für jedes } t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Beweis Übung! □

Eine selbstfinanzierende Strategie $\theta \in \Theta$ ist schon eindeutig bestimmt durch die Angabe von $\theta^1, \dots, \theta^d$. Es ist nämlich $\Delta \overline{S}_t = 0$, also

$$\overline{V}_t(\theta) = \theta_t^0 + \sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \overline{S}_t^i = \overline{V}_0(\theta) + \sum_{s=1}^{t}\sum_{i=1}^{d} \theta_s^i \Delta \overline{S}_s^i.$$

Es folgt

$$\theta_t^0 = \underbrace{\overline{V}_0(\theta)}_{\text{Startkapital}} + \underbrace{\sum_{s=1}^{t}\sum_{i=1}^{d} \theta_s^i \Delta \overline{S}_s^i}_{\text{diskontierte Gewinne}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \theta_t^i \overline{S}_t^i}_{\text{akt. Wert der Risikopapiere}}.$$

Definition 3.4 *Eine Zufallsvariable H auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ heißt* ***Claim****. H heißt* ***absicherbar*** *oder* ***replizierbar*** *(*attainable*), falls es eine selbstfinanzierende Strategie $\theta \in \Theta$ gibt mit*

$$V_T(\theta) = H.$$

θ heißt dann ein ***Hedge*** *für H.*

Definition 3.5 *Ein Markt, in dem jeder Claim absicherbar ist, heißt* ***vollständig****.*

Beispiel 3.6 Das Cox-Ross-Rubinstein Modell ist vollständig. Wir hatten in Abschnitt 1.3 für jeden Claim explizit einen Hedge angegeben.

3.2 Arbitrage

Eine Arbitrage bezeichnet die Möglichkeit, durch Handel einen risikofreien Profit zu erzielen.

Definition 3.7 *Eine* ***Arbitragemöglichkeit*** *ist eine selbstfinanzierende Strategie $\theta \in \Theta$ mit*

$$V_0(\theta) = 0, \qquad V_T(\theta) \geq 0 \quad \textit{und} \quad \mathbf{P}[V_T(\theta) > 0] > 0.$$

θ heißt ***starke Arbitragemöglichkeit****, falls zudem $\theta \in \Theta^+$ gilt.*
Ein Marktmodell heißt ***arbitragefrei****, falls es keine Arbitragemöglichkeit gibt.*

Ist H ein Claim, so heißt jeder adaptierte stochastische Prozess $(H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $H_T = H$ mit der Eigenschaft, dass der um das Risikopapier $S^{d+1} := (H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ erweiterte Markt arbitragefrei ist, ein ***Arbitragepreis-Prozess*** *für H. Speziell heißt dann jeder Wert $\pi(H) := H_0$ ein* ***Arbitragepreis*** *oder fairer Handelspreis für H.*

Lemma 3.8 *Sei $\theta \in \Theta$ und τ eine Stoppzeit. Dann wird durch*

$$\theta_t^\tau = \begin{cases} \theta_t, & \textit{falls } t \leq \tau, \\ (\overline{V}_\tau, 0, \ldots, 0), & \textit{falls } t > \tau, \end{cases}$$

eine selbstfinanzierende Strategie $\theta^\tau \in \Theta$ definiert.

Idee: Sell-and-Go, zur Zeit τ wird alles verkauft und der Erlös ins Bankkonto gebracht.

Beweis Per Konstruktion ist θ^τ previsibel. Außerdem ist θ^τ selbstfinanzierend, denn:

$$\begin{aligned} t \leq \tau: &\qquad \Delta\theta_t^\tau \cdot \overline{S}_{t-1} = \Delta\theta_t \cdot \overline{S}_{t-1} = 0, \\ t > \tau + 1: &\qquad \Delta\theta_t^\tau = 0, \\ t = \tau + 1: &\qquad \Delta\theta_{\tau+1}^\tau \cdot \overline{S}_\tau = \theta_{\tau+1}^\tau \cdot \overline{S}_\tau - \theta_\tau^\tau \cdot \overline{S}_\tau = \overline{V}_\tau(\theta) - \overline{V}_\tau(\theta) = 0. \end{aligned}$$ □

Satz 3.9 *Ist $\theta \in \Theta$ mit $V_T(\theta) \geq 0$ und $\mathbf{P}[V_t(\theta) < 0$ für ein $t \in \mathbb{T}] > 0$, so existiert eine starke Arbitragemöglichkeit.*

Beweis Sei

$$T_0 := \sup\left\{t \in \mathbb{T}:\ \mathbf{P}[V_{t-1}(\theta) < 0] > 0\right\}$$

der *späteste* Zeitpunkt, zu dem $V_t(\theta) < 0$ sein kann. Nach Voraussetzung ist $1 \le T_0 \le T$. Definiere die Stoppzeit τ durch

$$\tau = \begin{cases} T_0 - 1, & \text{falls } V_{T_0-1}(\theta) < 0, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere $\phi := \theta - \theta^\tau \in \Theta$. Dann ist $V_0(\phi) = 0$ und

$$\begin{aligned} \overline{V}_t(\phi) &= \overline{V}_t(\theta) - \overline{V}_t(\theta^\tau) \\ &= \big(\overline{V}_t(\theta) - \overline{V}_t(\theta^\tau)\big)\mathbb{1}_{\{t>\tau\}} \\ &= \big(\underbrace{\overline{V}_t(\theta)}_{\ge 0} - \underbrace{\overline{V}_t(\theta^\tau)}_{<0}\big)\mathbb{1}_{\{t \ge T_0,\, V_{T_0-1}(\theta)<0\}} \\ &\ge 0, \end{aligned}$$

sowie $\mathbf{P}[\overline{V}_T(\phi) > 0] \ge \mathbf{P}[V_{T_0-1}(\theta) < 0] > 0$. Also ist $\phi \in \Theta^+$ und ϕ eine starke Arbitragemöglichkeit. □

Korollar 3.10 *Ein Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es keine starke Arbitragemöglichkeit gibt.*

Korollar 3.11 *Ist der Markt arbitragefrei und $\theta \in \Theta$ mit $V_T(\theta) = 0$, so ist $V_t(\theta) = 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$.*

Beweis Satz 3.9 mit θ und $-\theta$ anwenden! □

Korollar 3.12 (Existenz und Eindeutigkeit des Arbitragepreises) *Ist der Markt arbitragefrei und H ein replizierbarer Claim, so ist der Arbitragepreis-Prozess $(H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ und speziell der Arbitragepreis $\pi(H)$ eindeutig und durch den Werteprozess eines jeden Hedges für H gegeben.*

Beweis Ist θ ein Hedge für H, so ist $\tilde{\theta} := (\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^d, -1)$ eine selbstfinanzierende Strategie in dem um $S^{d+1} = (H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ erweiterten arbitragefreien Markt mit $\widetilde{V}_t(\tilde{\theta}) = V_t(\theta) - H_t$. Da θ eine Hedge ist, ist $\widetilde{V}_T(\tilde{\theta}) = 0$, also $\widetilde{V}_t(\tilde{\theta}) = 0$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ und damit $V_t(\theta) = H_t$ für jedes $t \in \mathbb{T}$. □

Übung 3.1 Man zeige: Sind H^1 und H^2 Arbitragepreis-Prozesse für den Claim H, so ist für jedes $\lambda \in [0,1]$ die Konvexkombination $\lambda H^1 + (1-\lambda)H^2$ ebenfalls wieder ein Arbitragepreis-Prozess. Speziell ist die Menge der möglichen Arbitragepreise $\pi(H)$ ein Intervall. ♣

Aus technischen Gründen brauchen wir noch den Begriff der beschränkten Handelsstrategien, wobei nur der Besitz der Risikopapiere beschränkt ist, nicht jedoch das Bankkonto.

Definition 3.13 *Für $N > 0$ bezeichnen wir mit*

$$\Theta_N := \big\{\theta \in \Theta : |\theta_t^i| \le N \quad \textit{für alle } i = 1, \ldots, d;\ t \in \mathbb{T}\big\}$$

die Menge der durch N beschränkten selbstfinanzierenden Strategien und mit

$$\Theta^b := \bigcup_{N>0} \Theta_N$$

die Menge der beschränkten selbstfinanzierenden Strategien.

Satz 3.14 *Ein Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es keine beschränkte starke Arbitragemöglichkeit $\phi \in \Theta^b \cap \Theta^+$ gibt.*

Beweis Wir nehmen an, dass es eine Arbitragemöglichkeit gibt. Nach Korollar 3.10 können wir dann eine starke Arbitragemöglichkeit $\theta \in \Theta^+$ finden.

Definiere für $N > 0$

$$\tau^N := \inf\left\{t \in \mathbb{T} : \max\{|\theta^i_{t+1}|, i = 1, \ldots, d\} > N\right\}.$$

Da θ previsibel ist, ist τ^N eine Stoppzeit und wir erhalten die Sell-and-Go Strategie

$$\theta^{\tau^N} \in \Theta^N \cap \Theta^+.$$

Ferner gilt $\tau^N \uparrow \infty$ fast sicher. Also ist

$$V_0\Big(\theta^{\tau^N}\Big) = 0, \qquad V_T\Big(\theta^{\tau^N}\Big) \geq 0$$

und

$$\mathbf{P}\big[V_T\big(\theta^{\tau^N}\big) > 0\big] \;\geq\; \mathbf{P}\big[V_T(\theta) > 0\big] - \mathbf{P}\big[\tau^N < \infty\big] \;\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}\; \mathbf{P}\big[V_T(\theta) > 0\big] \;>\; 0.$$

Also existiert ein $N > 0$ mit $\mathbf{P}\big[V_T\big(\theta^{\tau^N}\big) > 0\big] > 0$ und $\phi := \theta^{\tau^N} \in \Theta^b \cap \Theta^+$ ist eine Arbitragemöglichkeit. □

3.3 Martingalpreise

Erinnerung: $\beta_t = \frac{1}{S^0_t}$ und $\overline{X}_t = \beta_t X_t$.

Definition 3.15 *(i) Seien P und Q zwei W-Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ mit der Eigenschaft*

$$\textit{für jedes } A \in \mathcal{F} \textit{ gilt}: \quad P(A) = 0 \implies Q(A) = 0.$$

*Dann heißt Q **absolutstetig** bezüglich P, symbolisch $Q \ll P$.*

*(ii) Sei $Q \ll P$. Die eindeutig bestimmte Zufallsvariable Z auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $Q[A] = \mathbf{E}^P[\mathbb{1}_A Z]$ für alle $A \in \mathcal{F}$ heißt **Dichte** von Q bezüglich P, oder Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{dQ}{dP} := Z$. Ist Ω abzählbar, so kann Z auf den Atomen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ definiert werden durch*

$$Z(\omega) = \begin{cases} \dfrac{Q(A_i)}{P(A_i)}, & \textit{falls } A_i \ni \omega \textit{ und } \mathbf{P}(A_i) > 0, \\ \quad 0, & \textit{sonst}. \end{cases}$$

*(iii) Gilt $Q \ll P$ und $P \ll Q$, so heißen P und Q **äquivalent**: : $P \approx Q$.*

Beispiel 3.16 (Münzwurf)
$\Omega = \{0,1\}^T$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Für $p \in [0,1]$ sei

$$\pi_p := \bigotimes_{i=1}^{T} \big((1-p)\delta_0 + p\delta_1\big)$$

das Produktmaß auf Ω mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, also

$$\pi_p(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{T} p^{\omega_i}(1-p)^{\omega_i}.$$

Es seien $P = \pi_p$ und $Q = \pi_q$.
Ist $p \in (0,1)$, so ist $P(\{\omega\}) > 0$ für jedes ω, also $Q \ll P$.
Ist $p \in \{0,1\}$, so ist genau dann $Q \ll P$ wenn $p = q$ ist.
Es gilt also

$$P \approx Q \quad \Longleftrightarrow \quad p, q \in (0,1) \text{ oder } p = q.$$

Für $p \in (0,1)$ ist

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \frac{Q(\{\omega\})}{P(\{\omega\})} = \prod_{i=1}^{T} \left(\frac{q}{p}\right)^{\omega_i} \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{1-\omega_i}.$$

Definition 3.17 *Ist $Q \approx \mathbf{P}$ und $(\overline{S}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Q–Martingal, also jedes $\overline{S}^i$ ein Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, Q, \mathbb{F})$, so heißt Q ein* ***äquivalentes Martingalmaß*** *(ÄMM) für den Markt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, S)$. Die Menge der äquivalenten Martingalmaße bezeichnen wir mit $\mathcal{P}^*$*

Beispiel 3.18 Im CRR Modell ist $\Omega = \{0,1\}^T$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P} = \pi_p$ für ein $p \in (0,1)$.
$S_t^0 = (1+r)^t$, $X_t(\omega) = \omega_t$ und

$$S_t^1 = \prod_{i=1}^{t} \big(1 + a + (b-a)X_t^i\big),$$

wobei $a < r < b$, $\beta = \frac{1}{1+r}$ sowie

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big(S_s^1,\, s \le t\big) = \sigma\big(X_s,\, s \le t\big).$$

Sei $q = \frac{r-a}{b-a}$ und $Q = \pi_q$. Unter Q sind also $(X_t)_{t=1,\ldots,T}$ unabhängig und Ber_q-verteilt. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^Q[\overline{S}_t^1 | \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbf{E}^Q\big[\beta\big(1 + a + (b-a)X_t\big)\overline{S}_{t-1}^1 \,\big|\, \mathcal{F}_{t-1}\big] \\
&= \frac{1}{1+r}\, \mathbf{E}^Q\big[\big(1 + a + (b-a)X_t\big) \,\big|\, \mathcal{F}_{t-1}\big]\, \overline{S}_{t-1}^1 \\
&= \frac{1 + a + (b-a)q}{1+r}\, \overline{S}_{t-1}^1 \;=\; \overline{S}_{t-1}^1.
\end{aligned}$$

Also ist $\overline{S}^1$ ein Q–Martingal. Wegen $\overline{S}^0 \equiv 1$ ist auch $\overline{S}$ ein Q–Martingal.
Die Rechnung zeigt: Q ist das einzige ÄMM

$$\mathcal{P}^* = \{Q\}.$$

Proposition 3.19 *Ist $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ und $Q \in \mathcal{P}^*$, so ist für jedes $\theta \in \Theta^b$ der diskontierte Wertprozess $\overline{V}(\theta) = (\beta_t V_t(\theta))_{t\in\mathbb{T}}$ ein Q–Martingal.*

Beweis Wegen $\Delta\overline{S}^0 \equiv 0$ ist

$$\overline{V}_t(\theta) = V_0(\theta) + \sum_{i=1}^{d} \big(\theta^i \bullet \overline{S}^i\big)_t,$$

wobei $\theta^i \bullet \overline{S}^i$ das stochastische Integral aus Beispiel 2.25 ist:

$$\big(\theta^i \bullet \overline{S}^i\big)_t = \sum_{s=1}^{t} \theta_s^i \Delta\overline{S}_s^i.$$

Da θ beschränkt ist, ist $\theta^i \bullet \overline{S}^i$ ein Q–Martingal. Also ist auch $\overline{V}(\theta)$ ein Q–Martingal. □

Satz 3.20 *Ist $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$, so ist der Markt arbitragefrei.*

Beweis Sei $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ und $Q \in \mathcal{P}^*$. Wir nehmen an, dass der Markt nicht arbitragefrei ist. Dann existiert nach Satz 3.14 eine beschränkte starke Arbitragemöglichkeit $\theta \in \Theta^b \cap \Theta^+$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[V_0(\theta) = 0] = 1 = Q[V_0(\theta) = 0] \\ \mathbf{P}[V_T(\theta) \geq 0] = 1 = Q[V_T(\theta) \geq 0] \end{aligned}$$

sowie

$$\mathbf{P}[V_T(\theta) \geq 0] > 0 \quad \Longrightarrow \quad Q[V_T(\theta) > 0] > 0.$$

Ferner ist

$$\mathbf{E}^Q[\overline{V}_T(\theta)] = \mathbf{E}^Q[V_0(\theta)] = 0,$$

also $Q[V_T(\theta) = 0] = 1$. Widerspruch! □

Satz 3.21 *Sei $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ und $H \geq 0$ ein absicherbarer Claim. Dann ist für jedes $Q \in \mathcal{P}^*$ der diskontierte Arbitragepreisprozess $\overline{H}$ ein Q-Martingal. Speziell ist*

$$\overline{H}_t = \mathbf{E}^Q[\beta_T H \,|\, \mathcal{F}_t]$$

und

$$\pi(H) = \mathbf{E}^Q[\beta_T H].$$

Beweis Sei $\theta \in \Theta$ ein Hedge für H: $V_T(\theta) = H \geq 0$. Da $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ ist, ist der Markt arbitragefrei (Satz 3.20), also ist $\theta \in \Theta^+$ (Satz 3.9). Falls $\theta \in \Theta^b$ ist, so liefert Proposition 3.19 die Aussage.

Im allgemeinen Fall müssen wir eine approximierende Folge $\theta^N \to \theta,\ N \to \infty$ in Θ^b konstruieren.

Wie im Beweis von Satz 3.14 definieren wir für $N > 0$ die Stoppzeit

$$\tau^N := \inf\left\{t \in \mathbb{T} :\, \max\{|\theta^i_{t+1}|,\, i = 1, \ldots, d\} > N\right\}.$$

und $\theta^{\tau^N} \in \Theta^b \cap \Theta^+$ die entsprechende Sell-and-Go Strategie.
Wegen $\tau^N \uparrow \infty$ und $\{\theta^{\tau^N} \neq \theta\} \subset \{\tau^N \leq T\}$ gilt $V_t(\theta^{\tau^N}) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} V_t(\theta)$ Q–fast sicher. Um hieraus die L^1-Konvergenz zu folgern, weisen wir im Folgenden eine integrierbare Majorante Y nach und verwenden den Lebesgue'schen Konvergenzsatz.

Nach dem Lemma von Fatou ist gilt für jedes $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^Q[\overline{V}_t(\theta)] \leq \liminf_{N\to\infty} \mathbf{E}^Q\big[\,\overline{V}_t\big(\theta^{\tau^N}\big)\big] &= \liminf_{N\to\infty} \underbrace{\mathbf{E}^Q\big[V_0\big(\theta^{\tau^N}\big)\big]}_{=V_0(\theta)} \\ &= V_0(\theta) < \infty. \end{aligned}$$

Klar ist

$$0 \leq \overline{V}_t(\theta^{\tau^N}) = \overline{V}_{\tau^N \wedge t}(\theta) \leq \sum_{s=0}^{T} \overline{V}_s(\theta) =: Y.$$

Nach dem eben gezeigten ist $\mathbf{E}^Q[Y] = (T+1)V_0(\theta) < \infty$. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^Q\big[|\overline{V}_t(\theta^{\tau^N}) - \overline{V}_t(\theta)|\big] &= \mathbf{E}^Q\big[\big|\overline{V}_{\tau^N \wedge t}(\theta) - \overline{V}_t(\theta)\big|\, \mathbb{1}_{\{\tau^N \leq T\}}\big] \\ &\leq \mathbf{E}^Q\big[(Y + \overline{V}_t(\theta))\, \mathbb{1}_{\{\tau^N \leq T\}}\big] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(Etwas direkter geht das mit dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz und Y als Majorante.) Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^Q\left[\left|\mathbf{E}^Q\left[\overline{V}_t(\theta)-\overline{V}_{t-1}(\theta)\,\middle|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]\right|\right] \le \mathbf{E}^Q\Big[\Big|\ &\underbrace{\mathbf{E}^Q\left[\overline{V}_t(\theta^{\tau^N})-\overline{V}_{t-1}(\theta^{\tau^N})\,\middle|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]}_{=0,\text{ da } \overline{V}(\theta^{\tau^N}) \text{ ein } Q\text{-Martingal ist}}\ \Big|\Big]\\ &+\mathbf{E}^Q\left[\left|\overline{V}_t(\theta^{\tau^N})-\overline{V}_t(\theta)\right|\right] + \mathbf{E}^Q\left[\left|\overline{V}_{t-1}(\theta^{\tau^N})-\overline{V}_{t-1}(\theta)\right|\right]\\ &\xrightarrow{N\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Es folgt $\mathbf{E}^Q\left[\overline{V}_t(\theta)\,\middle|\,\mathcal{F}_{t-1}\right] = \overline{V}_{t-1}(\theta)$ Q-f.s. Also ist $\overline{V}(\theta)$ ein Q–Martingal. □

Satz 3.22 *Ist der Markt vollständig, so ist $|\mathcal{P}^*| \le 1$.*

Beweis Sei der Markt vollständig. Ist $\mathcal{P}^* = \emptyset$, so sind wir fertig. Sei nun $\mathcal{P}^* \ne \emptyset$ angenommen und $Q, Q' \in \mathcal{P}^*$. Ist $A \in \mathcal{F}$, so ist $H = \mathbb{1}_A \ge 0$ ein absicherbarer Claim. Nach Satz 3.21 ist

$$Q[A] = \mathbf{E}^Q[\mathbb{1}_A] = \pi(H) = \mathbf{E}^{Q'}[\mathbb{1}_A] = Q'[A].$$ □

3.4 Fundamentalsatz der Preistheorie (für endliche Märkte)

Ein Markt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{T}, \mathbb{F}, S)$ heißt endlich, falls $|\Omega| < \infty$. Ohne Einschränkung können wir dann $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $\mathbf{P}[\{\omega\}] > 0$ für jedes $\omega \in \Omega$ annehmen.

Lemma 3.23 (Trennsatz) *Sei $(V, \langle\,,\,\rangle)$ ein euklidischer endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein linearer Unterraum sowie $C \subset V$ konvex und kompakt mit $C \cap U = \emptyset$.*

Dann existiert ein $x \in V$ mit

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= 0 \quad \textit{für alle } y \in U\\ \langle x, y\rangle &> 0 \quad \textit{für alle } y \in C.\end{aligned}$$

Beweis Sei $\pi_U : V \to U$ die orthogonale Projektion. Dann ist $\pi_U(C)$ kompakt, und das Infimum

$$\begin{aligned}d(U,C) :&= \inf\{|u-c| :\ u \in U,\ c \in C\}\\ &= \inf\{|u-c| :\ u \in \pi_U(C),\ c \in C\}\end{aligned}$$

wird angenommen für ein $u_0 \in U$ und $c_0 \in C$. Speziell ist $d(U,C) = |u_0 - c_0| > 0$.

Klar ist $u_0 = \pi_U(c_0)$, also mit $x := c_0 - u_0$

$$\langle x, u\rangle = \langle c_0 - \pi_U(c_0), u\rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U.$$

Außerdem gilt für jedes $c \in C$ und $\lambda \in [0,1]$ aufgrund der Konvexität von C

$$c_0 + \lambda(c - c_0) \in C \quad \text{und} \quad |u_0 - (c_0 + \lambda(c - c_0))| \ge |u_0 - c_0| > 0.$$

Also ist

$$\begin{aligned}0 \le \frac{d}{d\lambda}|u_0 - c_0 - \lambda(c-c_0)|^2_{|\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda}\Big(\lambda^2\langle c-c_0, c-c_0\rangle + 2\lambda\langle c-c_0, c_0-u_0\rangle\Big)_{|\lambda=0}\\ &= 2\langle c-c_0, x\rangle.\end{aligned}$$

Es folgt $\langle c, x\rangle \ge \langle c_0, x\rangle = \langle c_0 - u_0, x\rangle = |x|^2 > 0$. □

Satz 3.24 (Fundamentalsatz der Preistheorie) *Ein endlicher Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es ein äquivalentes Martingalmaß gibt.*

Beweis „$\Longleftarrow$“ Sei $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$. Nach Satz 3.20 ist der Markt arbitragefrei.

„$\Longrightarrow$“ Sei nun der Markt arbitragefrei. Bezeichne $V = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ den Raum der Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle = \mathbf{E}[X \cdot Y]$.

Es sei

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^{d} \big(\theta^i \bullet \overline{S}^i\big)_T : \theta \in \Theta \right\} \subset V$$

die Menge der möglichen Zugewinnprozesse selbstfinanzierender Handelsstrategien. U ist linear, weil Θ linear ist. Schließlich sei

$$C = \big\{ X \in V : X \geq 0, \mathbf{E}[X] = 1 \big\}.$$

C ist konvex und abgeschlossen. Für jedes $X \in C$ und $\omega \in \Omega$ ist $0 \leq X(\omega)\mathbf{P}[\{\omega\}] \leq \mathbf{E}[X]$. Also ist C eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge

$$\prod_{\omega \in \Omega} [0, 1/\mathbf{P}[\{\omega\}]].$$

Daher ist C auch kompakt.

Offenbar gilt

$$\text{Markt ist arbitragefrei} \quad \Longleftrightarrow \quad C \cap U = \emptyset.$$

Nach Lemma 3.23 gibt es ein $X \in V$ mit

$$\begin{aligned} \langle X, H \rangle &= 0 \quad \text{für alle } H \in U \\ \langle X, Y \rangle &> 0 \quad \text{für alle } Y \in C. \end{aligned}$$

Für $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \emptyset$ ist $Y_A := \frac{\mathbb{1}_A}{\mathbf{P}[A]} \in C$. Also ist $\mathbf{E}[X \mathbb{1}_A] > 0$ und damit $X(\omega) > 0$ für jedes ω. Setze nun

$$Q[A] = \frac{\mathbf{E}[X \mathbb{1}_A]}{\mathbf{E}[X]} \quad \text{für } A \in \mathcal{F}.$$

Dann ist $Q[A] > 0$ für $A \neq \emptyset$ und $Q[\Omega] = 1$, also $Q \approx \mathbf{P}$ ein W-Maß. Sei $i \in \{1, \ldots, d\}$, $t \in \mathbb{T}$, $A \in \mathcal{F}_t$. Definiere $\theta \in \Theta$ durch $\theta^j = 0$, falls $j \notin \{0, i\}$ und

$$\theta^i_s = \mathbb{1}_A \, \mathbb{1}_{\{s > t\}}.$$

Das heißt, bei Eintritt von A wird zur Zeit t ein Papier vom Typ i gekauft und gehalten. Dann ist

$$\overline{V}_T(\theta) - \overline{V}_t(\theta) = (\overline{S}^i_T - \overline{S}^i_t)\mathbb{1}_A \in U,$$

also

$$\begin{aligned} 0 = \big\langle X, \overline{V}_T(\theta) - \overline{V}_t(\theta) \big\rangle &= \mathbf{E}\big[X \cdot (\overline{V}_T(\theta) - \overline{V}_t(\theta))\big] \\ &= \mathbf{E}^Q\big[\overline{V}_T(\theta) - \overline{V}_t(\theta)\big] \cdot \mathbf{E}[X] \\ &= \mathbf{E}^Q\big[(\overline{S}^i_T - \overline{S}^i_t)\, \mathbb{1}_A\big] \cdot \mathbf{E}[X]. \end{aligned}$$

Da $A \in \mathcal{F}_t$ beliebig war, folgt nach Definition der bedingten Erwartung, dass $\mathbf{E}^Q[\overline{S}^i_T | \mathcal{F}_t] = \overline{S}^i_t$. Also ist $\overline{S}^i$ ein Q–Martingal, und damit ist $Q \in \mathcal{P}^*$. □

Satz 3.25 *In einem endlichen Markt gelten:*

(i)	*Markt ist arbitragefrei*	$\iff$	$\lvert\mathcal{P}^*\rvert \geq 1$
(ii)	*Markt ist vollständig und arbitragefrei*	$\iff$	$\lvert\mathcal{P}^*\rvert = 1$

Speziell ist ein arbitragefreier endlicher Markt genau dann vollständig, wenn es ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß gibt.

Beweis Zu zeigen ist nur (ii).

„$\Longrightarrow$“ Ist der Markt arbitragefrei, so ist $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ nach Satz 3.24. Ist er zudem vollständig, so ist $|\mathcal{P}^*| = 1$ nach Satz 3.22.

„$\Longleftarrow$“ Der Markt sei arbitragefrei, aber unvollständig. Zu zeigen ist: $|\mathcal{P}^*| \geq 2$.
Nach Satz 3.24 ist $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$. Sei also $Q \in \mathcal{P}^*$ und X ein nicht absicherbarer Claim. Seien

$$\begin{aligned} V &:= L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q) \quad \text{mit } \langle X, Y\rangle = \mathbf{E}^Q[XY], \\ U &:= \big\{V_T(\theta) : \theta \in \Theta\big\} \subset V. \end{aligned}$$

Dann ist $X \notin U$ und

$$X = X^a + X^\perp,$$

wobei $X^a \in U$ replizierbar ist („a“ für attainable) und $\langle X^\perp, Y\rangle = 0$ für alle $Y \in U$, und nach Voraussetzung $X^\perp \neq 0$.
Sei $0 < \varepsilon < 1/\sup\big\{|X^\perp(\omega)| : \omega \in \Omega\big\}$ und

$$Q_\varepsilon[A] = \mathbf{E}^Q\big[(1 + \varepsilon X^\perp)\mathbb{1}_A\big] \qquad \text{für jedes } A \in \mathcal{F}.$$

Wegen $1 \in U$ ist $\mathbf{E}^Q[X^\perp] = \langle X^\perp, 1\rangle = 0$ und

$$Q_\varepsilon[\Omega] = \mathbf{E}^Q[1] + \varepsilon \mathbf{E}^Q[X^\perp] = 1.$$

Also ist Q_ε ein W-Maß. Außerdem ist

$$\mathbf{E}^{Q_\varepsilon}[X^\perp] = \varepsilon \mathbf{E}^Q\big[(X^\perp)^2\big] \neq 0 = \mathbf{E}^Q\big[X^\perp\big],$$

also $Q_\varepsilon \neq Q$.
Wie im Beweis von Satz 3.24 ist für $i = 1, \ldots, d,\ t \in \mathbb{T}$ und $A \in \mathcal{F}_t$ dann $(\overline{S}^i_T - \overline{S}^i_t)\mathbb{1}_A \in U$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{Q_\varepsilon}\big[(\overline{S}^i_T - \overline{S}^i_t)\,\mathbb{1}_A\big] &= \underbrace{\mathbf{E}^Q\big[\big(\overline{S}^i_T - \overline{S}^i_t\big)\,\mathbb{1}_A\big]}_{=0 \text{ da } \overline{S}^i\ Q-\text{Mart.}} + \varepsilon\,\underbrace{\mathbf{E}^Q\big[X^\perp\big(\overline{S}^i_T - \overline{S}^i_t\big)\,\mathbb{1}_A\big]}_{\substack{=0 \text{ da } X^\perp \in U^\perp \\ \text{und } (\overline{S}^i_T - \overline{S}^i_t)\mathbb{1}_A \in U}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\overline{S}^i$ ein Q_ε–Martingal ist, also ist $Q_\varepsilon \in \mathcal{P}^*$. Insbesondere ist also $|\mathcal{P}^*| \geq 2$. □

Wir wollen nun die Wirksamkeit der beiden vorangehenden Sätze an zwei uns schon bekannten Beispielen nachprüfen: dem Cox-Ross-Rubinstein Modell und einem Modell mit dreifacher Verzweigung im Preisprozess. Entgegen der früheren ökonomischen Argumentation können wir nun ganz formal die Bedingungen für Existenz und Eindeutigkeit eines ÄMM prüfen, um den Markt auf Vollständigkeit und Arbitragefreiheit hin zu untersuchen.

Beispiel 3.26 (Cox-Ross-Rubinstein Modell) Im Cox-Ross-Rubinstein Modell ist $\Omega = \{0,1\}^T$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ und $\mathbf{P} = \pi_p$ für ein $p \in (0,1)$. Wir definieren die Zufallsvariablen $X_t(\omega) = \omega_t$ für $t = 1, \ldots, T$ und den Preisprozess des Risikopapiers S^1 durch

$$S_t^1(\omega) = \prod_{s=1}^{t} \big(1 + a + (b-a)X_s(\omega)\big) \qquad \text{für } t \in \mathbb{T},$$

wobei $a < b$ Parameter des Modells sind. Schließlich definieren wir den Cash-Bond S^0 durch $S_t^0 = (1+r)^t$, wobei $r \geq 0$ die konstante Zinsrate ist.

Ist Q nun ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß, so ist der diskontierte Werteprozess des Risikopapiers $\overline{S}^1 = ((1+r)^{-t} S_t^1)_{t \in \mathbb{T}}$ genau dann ein Q–Martingal, wenn

$$\begin{aligned} 1 \overset{!}{=} (1+r)^{-1}\mathbf{E}^Q[(1+a+(b-a)X_t)\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] &= \frac{1 + bQ[X_t = 1\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] + aQ[X_t = 0\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]}{1+r} \\ &= \frac{1 + a + (b-a)Q[X_t = 1\,|\,\mathcal{F}_{t-1}]}{1+r}. \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist aber äquivalent dazu, dass $Q[X_t = 1\,|\,\mathcal{F}_{t-1}] = q$ für jedes $t = 1, \ldots, T$, wobei $q := \frac{r-a}{b-a}$. Nun ist Q durch alle bedingten Wahrscheinlichkeiten bereits festgelegt (wie man etwa in der Schule lernt, wenn man die Wahrscheinlichkeitsbäume malt), also ist $Q = \pi_q$. Ohne dass wir die Existenz von Q explizit voraussetzen, können wir schließen, dass ein äquivalentes Martingalmaß Q stets eindeutig ist, was wiederum äquivalent dazu ist, dass der Markt vollständig ist.

Damit das Maß $Q = \pi_q$ ein W-Maß ist und äquivalent zu $\mathbf{P}$ ist, ist notwendig und hinreichend, dass

$$q \in (0,1) \quad \Longleftrightarrow \quad a < r < b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{der Markt ist arbitragefrei.}$$

Ist der Markt nun also vollständig und arbitragefrei, so erhalten wir den Arbitragepreis eines Claims als den Martingalpreis bezüglich des eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes. Im Falle des europäischen Calls $C = (S_T^1 - K)^+$ ist ist

$$\begin{aligned} \pi(C) &= \mathbf{E}^Q\left[(1+r)^{-T}(S_T^1 - K)^+\right] \\ &= (1+r)^{-T} \sum_{l=0}^{T} \binom{T}{l} q^l (1-q)^{T-l} \left[(1+b)^l (1+a)^{T-l} - K\right]^+ \end{aligned}$$

wie in Abschnitt 1.3.

Beispiel 3.27 Sei $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}[\{\omega\}] > 0$ für jedes ω, und $\mathbb{T} = \{0,1\}$. Ferner gebe es den Cash-Bond $S^0 \equiv 1$ (keine Verzinsung) und das Risikopapier S^1 mit

$$S_0^1 = 1 \quad \text{und} \quad S_1^1(\omega) = s_\omega,$$

wobei $s_1 < s_2 < s_3$.

Ist $s_1 > 1$, so ist $\mathbf{E}^Q[S_1^1] \geq s_1 > 1$ für jedes Q, also $\mathcal{P}^* = \emptyset$, und der Markt ist nicht arbitragefrei. Ebenso, falls $s_3 < 1$.

Sei nun $s_1 < 1 < s_3$ und z.B. $s_2 > 1$ sowie

$$\begin{aligned} q_1 &\in \left(\frac{s_2 - 1}{s_2 - s_1}, \frac{s_3 - 1}{s_3 - s_1}\right) \\ q_2 &= \frac{s_3 - 1 - q_1(s_3 - s_1)}{s_3 - s_2} \\ q_3 &= 1 - q_2 - q_1. \end{aligned}$$

Dann definiert $Q[\{\omega\}] := q_\omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q, das ein ÄMM ist (Nachrechnen!). Speziell ist $|\mathcal{P}^*| = \infty$, also ist der Markt nicht vollständig.

Kapitel 4

Amerikanische Claims

Amerikanische Claims unterscheiden sich grundsätzlich von europäischen Claims dadurch, dass der Käufer bis zum letztmöglichen Fälligkeitstermin der Option den Ausübungszeitpunkt der Option selber bestimmt. Dabei muss sich der Käufer nicht vorher festlegen, wann er die Option ausübt, sondern kann dies nach Beobachtung des Marktes dynamisch entscheiden. Das wesentliche neue Problem (für den Käufer) in diesem Zusammenhang ist es, einen optimalen Ausübungszeitpunkt zu finden. Der Verkäufer muss hingegen für die Preisgestaltung die optimalen Strategien kennen.

Wir werden das auftretende Problem zunächst in einem konkreten Zusammenhang betrachten. Es folgt ein Abschnitt über die allgemeine Theorie des optimalen Stoppens. Schließlich wenden wir die Ergebnisse an, um Hedges und Arbitragepreis für amerikanische Claims zu bestimmen.

4.1 Einführung

Wir betrachten einen vollständigen arbitragefreien Markt mit einem Wertpapier S^1 und mit ÄMM Q.

Definition 4.1 *Sei $(f_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein adaptierter nichtnegativer Prozess. Ein **amerikanischer Claim** C^f mit Auszahlungsfunktion $(f_t)_{t\in\mathbb{T}}$ gibt dem Käufer zur Zeit τ die Auszahlung f_τ, wobei $\tau \le T$ eine vom Käufer frei gewählte Stoppzeit ist.*

Beispiel 4.2 Amerikanischer Call mit Ausführungspreis K: $f_t = (S_t^1 - K)^+$.
Amerikanischer Put mit Ausführungspreis K: $f_t = (K - S_t^1)^+$.

Definition 4.3 *Für $t \in \mathbb{T}$ sei*

$$\mathcal{T}_t = \big\{\tau \text{ ist Stoppzeit: } t \le \tau \le T\big\}$$

und $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

Lemma 4.4

$$\pi(C^f) \ge \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbf{E}^Q[\beta_\tau f_\tau].$$

Beweis Annahme: $\pi(C^f) < \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbf{E}^Q[\beta_\tau f_\tau]$. Wähle $\tau \in \mathcal{T}$ mit $\mathbf{E}^Q[\beta_\tau f_\tau] > \pi(C^f)$. Kaufe C^f und verkaufe den (europäischen) Claim $\beta_T^{-1}\beta_\tau f_\tau$ für $\mathbf{E}^Q[\beta_\tau f_\tau]$ mit sicherem Gewinn. □

Definition 4.5 *Ein* ***Hedge*** *für* C^f *ist eine selbstfinanzierende Strategie* $\theta \in \Theta$ *mit*

$$V_t(\theta) \geq f_t \quad \textit{für jedes } t \in \mathbb{T}.$$

Ein Hedge heißt ***minimal****, falls es eine Stoppzeit* $\tau \in \mathcal{T}$ *gibt mit* $V_\tau(\theta) = f_\tau$*.*

Satz 4.6 *Gibt es ein* $\tau^* \in \mathcal{T}$ *mit*

$$\mathbf{E}^Q[\beta_{\tau^*} f_{\tau^*}] = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{E}^Q[\beta_\tau f_\tau],$$

und gibt es einen minimalen Hedge θ*, so gilt* $V_{\tau^*}(\theta) = f_{\tau^*}$ *und*

$$\pi(C^f) = \mathbf{E}^Q[\beta_{\tau^*} f_{\tau^*}] = V_0(\theta).$$

Beweis Da θ minimal ist, existiert eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft $V_\tau(\theta) = f_\tau$. Da θ ein Hedge ist, ist zudem $\beta_{\tau^*} V_{\tau^*}(\theta) \geq \beta_{\tau^*} f_{\tau^*}$. Also gilt

$$\mathbf{E}^Q[\beta_\tau f_\tau] = \mathbf{E}^Q[\beta_\tau V_\tau(\theta)] = V_0 = \mathbf{E}^Q[\beta_{\tau^*} V_{\tau^*}(\theta)] \geq \mathbf{E}^Q[\beta_{\tau^*} f_{\tau^*}] \geq \mathbf{E}^Q[\beta_\tau f_\tau].$$

Da überall in der Kette Gleichheit herrscht, folgt $f_{\tau^*} = V_{\tau^*}$. □

Aus den bisherigen Betrachtungen erkennen wir die Notwendigkeit, die Stoppprobleme besser zu verstehen. Dies passiert im folgenden Abschnitt.

4.2 Optimales Stoppen

4.2.1 Existenz optimaler Stoppzeiten

Wir beginnen mit einem technischen Begriff. Bekanntlich ist das Infimum (wie auch das Supremum) von abzählbar vielen Zufallsvariablen wieder eine Zufallsvariable. Dies gilt so nicht mehr, wenn wir das Infimum von überabzählbar vielen Zufallsvariablen bilden. Da wir es mit Optimierungsproblemen über die Klasse aller Stoppzeiten zu tun haben (die im Allgemeinen überabzählbar groß ist), müssen wir hier einen geeigneten Begriff finden.

Definition 4.7 (Essenzielles Infimum) *Sei* $I \neq \emptyset$ *und* $(U^i,\, i \in I)$ *eine Familie von Zufallsvariablen auf einem beliebigen W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$*. Eine Zufallsvariable* $X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *heißt* ***essenzielles Infimum***

$$X = \operatorname*{ess\,inf}_{i \in I} U^i := \operatorname{ess\,inf}\{U^i,\, i \in I\},$$

falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\mathbf{P}[X \leq U^i] = 1$ *für alle* $i \in I$*.*

(ii) Ist Y *eine Zufallsvariable mit* $\mathbf{P}[Y \leq U^i] = 1$ *für alle* $i \in I$*, so ist* $\mathbf{P}[Y \leq X] = 1$*.*

Analog definieren wir das essenzielle Supremum durch $\operatorname{ess\,sup}_{i \in I} U^i = -\operatorname{ess\,inf}_{i \in I} -U^i$*.*

Satz 4.8 *Das essenzielle Infimum existiert stets, und es gibt eine abzählbare Teilmenge* $J \subset I$ *mit*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{i \in I} U^i = \inf_{i \in J} U^i.$$

Speziell ist für abzählbares I *das essenzielle Infimum gleich dem Infimum der* U^i*.*

Beweis Indem wir gegebenenfalls zu $\widetilde{U}^i := \frac{2}{\pi} \arctan U^i$ übergehen, können wir annehmen, dass $|U^i| \leq 1$ gilt.

Setze

$$b := \inf_{\substack{J \subset I \\ |J| \leq |\mathbb{N}|}} \mathbf{E}\left[\inf_{i \in J} U^i\right].$$

Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $J_n \subset I,\ |J_n| \leq |\mathbb{N}|$ mit

$$\mathbf{E}\left[\inf_{i \in J_n} U^i\right] \leq b + \frac{1}{n}.$$

Setze $J := \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ und $X := \inf_{i \in J} U^i$. Für jedes $i \in I$ ist also

$$\mathbf{E}[(X - U^i)^+] = \mathbf{E}[X - X \wedge U^i] = \underbrace{\mathbf{E}[X]}_{=b} - \underbrace{\mathbf{E}\left[\inf_{j \in J \cup \{i\}} U^j\right]}_{\geq b} \leq 0.$$

Hieraus folgt aber, dass $\mathbf{P}[X \leq U^i] = 1$.

Ist nun Y eine weitere Zufallsvariable mit $\mathbf{P}[\,Y \leq U^i] = 1$ für alle $i \in I$, so ist fast sicher $Y \leq \inf_{i \in J} U^i = X$. Damit ist X das essenzielle Infimum von $(U^i,\, i \in I)$. $\square$

Anstelle der im einleitenden Abschnitt betrachteten diskontierten Auszahlungsfunktion $(\beta_t f_t)$ wollen wir die diskontierte Auszahlung nun X nennen. Sei also $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein adaptierter Prozess mit $\mathbf{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Definition 4.9 *Eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}$ heißt **optimal**, falls*

$$\mathbf{E}[X_\tau] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}} \mathbf{E}[X_\sigma].$$

Durch ein einfaches (Rückwärts-)Rekursionsschema wollen wir uns optimale Stoppzeiten verschaffen. Dazu definieren wir den Prozess $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{T}}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} Z_T &:= X_T \\ Z_{t-1} &:= X_{t-1} \vee \mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \qquad \text{für } t = 1, \ldots, T. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Setze nun

$$\begin{aligned} \tau^* &:= \inf\{s \geq 0 :\ Z_s = X_s\} \\ \tau_t^* &:= \inf\{s \geq t :\ Z_s = X_s\}. \end{aligned}$$

Satz 4.10 *Es gilt*

(i) $\tau^* \in \mathcal{T}$ *und* $\tau_t^* \in \mathcal{T}_t$.

(ii) $Z_t = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[X_{\tau_t^*} \,|\, \mathcal{F}_t]$ *für jedes* $t \in \mathbb{T}$.

Insbesondere ist τ^* optimal.

Beweis (i) X und Z sind adaptiert, also ist $\tau_t \in \mathcal{T}_t$.
(ii) Für $t = T$ ist die Aussage trivial.
Sei nun (ii) für t schon gezeigt. Sei $\tau \in \mathcal{T}_{t-1}$ beliebig. Dann ist $\tau \vee t \in \mathcal{T}_t$, also

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_\tau \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] &= X_{t-1}\mathbb{1}_{\{\tau=t-1\}} + \mathbf{E}[X_{\tau\vee t}\mathbb{1}_{\{\tau\geq t\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= X_{t-1}\mathbb{1}_{\{\tau=t-1\}} + \mathbb{1}_{\{\tau\geq t\}}\mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X_{\tau\vee t} \,|\, \mathcal{F}_t] \,|\, \mathcal{F}_{t-1}\big] \\
&\overset{\text{I.V.}}{\leq} X_{t-1}\mathbb{1}_{\{\tau=t-1\}} + \mathbb{1}_{\{\tau\geq t\}}\mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\
&\leq X_{t-1} \vee \mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = Z_{t-1}.
\end{aligned}$$

Wegen $\{\tau^*_{t-1} = t-1\} = \{X_{t-1} \geq \mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\}$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_{\tau^*_{t-1}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbb{1}_{\{X_{t-1}\geq \mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\}}X_{t-1} + \mathbb{1}_{\{X_{t-1}< \mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\}}\mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\
&= X_{t-1} \vee \mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] = Z_{t-1}.
\end{aligned}$$

□

4.2.2 Die Snell'sche Einhüllende

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, den oben explizit hergestellten Prozess Z zu charakterisieren als kleinstes Supermartingal, das nicht kleiner als X ist. Hierzu müssen wir zunächst zeigen, dass Infima von Supermartingalen wieder Supermartingale sind.

Lemma 4.11 *Sei $I \neq \emptyset$ und $\{Y^i,\, i \in I\}$ eine Familie von Supermartingalen. Es gebe einen stochastischen Prozess X mit $X_t \leq Y^i_t$ f.s. und $\mathbf{E}[|X_t|] < \infty$ für jedes $i \in I$ und $t \in \mathbb{T}$. Dann ist*

$$Y := \left(\operatorname*{ess\,inf}_{i\in I} Y^i_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

ein Supermartingal mit $Y \geq X$ f.s.

Beweis Nach Voraussetzung ist (für beliebiges $i \in I$)

$$X_t \leq Y_t \leq Y^i_t \quad \text{f.s.},$$

also

$$|Y_t| \leq |X_t| \vee |Y^i_t| \leq |X_t| + |Y^i_i|.$$

Es folgt

$$\mathbf{E}[|Y_t|] \leq \mathbf{E}[|Y^i_t|] + \mathbf{E}[|X_t|] < \infty \qquad \text{für jedes } t \in \mathbb{T},$$

also ist Y integrierbar.
Für jedes $i \in I$ ist

$$\mathbf{E}[Y_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \leq \mathbf{E}[Y^i_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \leq Y^i_{t-1}.$$

Also ist

$$\mathbf{E}[Y_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \leq \operatorname*{ess\,inf}_{i\in I} Y^i_{t-1} = Y_{t-1},$$

und damit ist Y ein Supermartingal. □

Proposition 4.12 *Sei* $X = (X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *an* $\mathbb{F}$ *adaptiert mit* $\mathbf{E}[|X_t|] < \infty$ *für alle* t*, und sei*

$$SM_X := \{Y \geq X : Y \textit{ ist } \mathbb{F}\textit{–Supermartingal}\}.$$

Dann ist $SM_X \neq \emptyset$ *und* $\operatorname{ess\,inf}(SM_X) \in SM_X$.

Beweis Setze $Y_t := \mathbf{E}[X_t^+ + X_{t+1}^+ + \ldots + X_T^+ | \mathcal{F}_t]$. Dann ist $Y_t \geq X_t$ und

$$\mathbf{E}[Y_t - Y_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = -X_{t-1}^+ \leq 0.$$

Also ist $Y \in SM_X$. Nach Lemma 4.11 ist dann $\operatorname{ess\,inf}(SM_X) \in SM_X$. □

Definition 4.13 *Wir nennen* $\operatorname{ess\,inf}(SM_X)$ *die* ***Snell'sche Einhüllende*** *von* X.

Satz 4.14 *Sei* X *wie oben und* Z *aus Satz 4.10. Dann gilt*

$$Z = \operatorname{ess\,inf}(SM_X).$$

Beweis Klar ist $Z \geq X$. Qua definitionem ist

$$Z_{t-1} \leq \mathbf{E}[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}]$$

und

$$\mathbf{E}[|Z_t|] \leq \mathbf{E}\left[\sum_{t \in \mathbb{T}} |X_t|\right] < \infty.$$

Es folgt, dass $Z \in SM_X$.

Um zu zeigen, dass Z minimal in SM_X ist, betrachten wir ein weiteres $Y \in SM_X$ und zeigen per (Rückwärts-)Induktion, dass $Y_t \geq Z_t$ für jedes $t \in \mathbb{T}$. Klar ist $Y_T \geq X_T = Z_T$. Sei nun für $t \in \mathbb{T}$ die Aussage $Y_t \geq Z_t$ schon gezeigt. Dann ist

$$\begin{aligned} Y_{t-1} &\geq \mathbf{E}[Y_t | \mathcal{F}_{t-1}] \vee X_{t-1} \\ &\geq \mathbf{E}[Z_t | \mathcal{F}_{t-1}] \vee X_{t-1} = Z_{t-1}. \end{aligned}$$

Also ist tatsächlich $Y \geq Z$ und damit $Z = \operatorname{ess\,inf}(SM_X)$. □

Satz 4.15 *Ist* X *ein Submartingal, so ist die Snell'sche Einhüllende* $Z_t = \mathbf{E}[X_T | \mathcal{F}_t]$ *ein Martingal. Dies ist klar, weil* $Z_T = X_T$ *und*

$$Z_{t-1} = X_{t-1} \vee \mathbf{E}[X_T | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E}[X_T | \mathcal{F}_{t-1}] \quad \textit{für jedes } t = 1, \ldots, T.$$

4.2.3 Charakterisierung optimaler Stoppzeiten

Lemma 4.16 *Sei* Y *ein Supermartingal und* $\sigma \leq T$ *eine Stoppzeit. Dann sind äquivalent*

(i) $\mathbf{E}[Y_0] = \mathbf{E}[Y_\sigma]$.

(ii) $\mathbf{E}[Y_0] \leq \mathbf{E}[Y_\sigma]$

(iii) $Y^\sigma = (Y_{\sigma \wedge t})_{t \in \mathbb{T}}$ *ist ein Martingal.*

Beweis (i) $\Longrightarrow$ (ii) klar.
(iii) $\Longrightarrow$ (i): $\mathbf{E}[Y_0] = \mathbf{E}[Y_0^\sigma] = \mathbf{E}[Y_T^\sigma] = \mathbf{E}[Y_\sigma]$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $\mathbf{E}[Y_0] \le \mathbf{E}[Y_\sigma]$. Nach dem Optional Stopping Theorem ist Y^σ ein Supermartingal, also

$$Y_t^\sigma \ge \mathbf{E}[Y_T^\sigma \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[Y_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t].$$

Also ist

$$\mathbf{E}[Y_0] \ge \mathbf{E}[Y_t^\sigma] \ge \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t]] = \mathbf{E}[Y_\sigma] \ge \mathbf{E}[Y_0].$$

Hieraus folgt $Y_t^\sigma = \mathbf{E}[Y_\sigma \,|\, \mathcal{F}_t]$ und damit ist Y^σ ein Martingal. □

Lemma 4.17 *Z^{τ^*} ist ein Martingal.*

Beweis Wegen

$$\{\tau^* > t-1\} \subset \{Z_{t-1} > X_{t-1}\} = \{Z_{t-1} = \mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}]\}$$

ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z_t^{\tau^*} - Z_{t-1}^{\tau^*} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] &= \mathbf{E}[(Z_t - Z_{t-1})\mathbb{1}_{\{\tau^* > t-1\}} \,|\, \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= (\mathbf{E}[Z_t \,|\, \mathcal{F}_t] - Z_{t-1})\, \mathbb{1}_{\{\tau^* > t-1\}} = 0.\end{aligned}$$

□

Satz 4.18 *Eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}$ ist genau dann optimal, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten*

(i) $Z_\tau = X_\tau$

(ii) *Z^τ ist ein Martingal.*

Speziell ist τ^* die kleinste optimale Stoppzeit.

Beweis Der Zusatz folgt direkt aus Satz 4.10 und der Definition von Z (siehe (4.1)).
„$\Longleftarrow$“ Gelte (i) und (ii). Nach Lemma 4.16 ist $\mathbf{E}[Z_0] = \mathbf{E}[Z_{\tau^*}]$. Also ist nach Lemma 4.16

$$\mathbf{E}[X_\tau] = \mathbf{E}[Z_\tau] = \mathbf{E}[Z_0] = \mathbf{E}[Z_{\tau^*}] = \mathbf{E}[X_{\tau^*}].$$

Es folgt, dass τ optimal ist.

„$\Longrightarrow$“ Sei τ optimal. Wegen $Z_\tau \ge X_\tau$ ist

$$\mathbf{E}[Z_0] = \mathbf{E}[X_{\tau^*}] = \mathbf{E}[X_\tau] \le \mathbf{E}[Z_\tau] \le \mathbf{E}[Z_0].$$

Also ist $X_\tau = Z_\tau$, und nach Lemma 4.16 ist Z^τ ein Martingal. □

Ziel: Wir wollen aus allen optimalen Stoppzeiten die maximale auswählen.

Lemma 4.19 *Sei $Z = M - C$ die Doob'sche Zerlegung des Supermartingals Z, also C previsibel und monoton wachsend mit $C_0 = 0$, sowie M ein Martingal. Sei*

$$\nu = \inf\{t \le T-1 : \, C_{t+1} > 0\} \wedge T. \tag{4.2}$$

Dann ist $\nu \in \mathcal{T}$, und für jede Stoppzeit τ sind äquivalent

(i) $\tau \le \nu$,

(ii) Z^τ *ist ein Martingal.*

Beweis Da C previsibel ist, gilt für jedes $t \in \mathbb{T}$, dass $\{\nu \le t\} = \{C_{t+1} > 0\} \in \mathcal{F}_t$. Also ist $\nu \in \mathcal{T}$.

Gelte (i). Dann ist

$$Z_t^\tau = M_{\tau\wedge t} - C_{\tau\wedge t} = M_t^\tau, \text{ also } Z^\tau = M^\tau.$$

Gelte (ii). Dann ist $C_\tau \ge 0$ und

$$\mathbf{E}[C_\tau] = \mathbf{E}[Y_\tau - M_\tau] = \mathbf{E}[Y_0 - M_0] = 0.$$

Also ist $C_\tau = 0$ und damit $\tau \le \nu$. □

Satz 4.20 *Sei* $Z = \operatorname{ess\,inf}(SM_X)$ *die Snell'sche Einhüllende von* X. *Dann ist* ν *die maximale optimale Stoppzeit für* X.

Beweis Nach Satz 4.18 und Lemma 4.19 reicht es zu zeigen, dass $Z_\nu = X_\nu$ ist.

Auf $\{\nu = T\}$ ist dies klar.
Für $t < T$ und $\nu = t$ ist $C_t = 0$ und $C_{t+1} > 0$, also

$$Z_t > \mathbf{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t] \text{ auf } \{\nu = t\}.$$

Es folgt $Z_t = X_t$. □

4.3 Hedges und Preise Amerikanischer Claims

Wir betrachten einen Claim A^f mit Auszahlungsfunktion $(f_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Weiter nehmen wir an, dass es ein eindeutiges ÄMM gibt, das wir mit Q bezeichnen.

Sei $\overline{f}_t = \beta_t f_t$ und $\overline{Z} \ge \overline{f}$ die Snell'sche Einhüllende von $\overline{f}$ bezüglich Q. Dann ist

$$\begin{aligned} \overline{Z}_T &= \overline{f}_T \\ \overline{Z}_{t-1} &= \overline{f}_{t-1} \vee \mathbf{E}^Q[\overline{Z}_t|\mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

Es sei

$$\tau^* = \inf\{t \in \mathbb{T} : \overline{Z}_t = \overline{f}_t\}.$$

und

$$\overline{Z} = \overline{M} - \overline{C}$$

die Doob'sche Zerlegung von $\overline{Z}$ in ein Q-Martingal $\overline{M}$ und einen previsiblen wachsenden Prozess $\overline{C}$ mit $C_0 = 0$.

Da der Markt nach Voraussetzung vollständig ist, existiert ein Hedge θ für M_T. Klar ist dann $\overline{M} = \overline{V}(\theta)$. Klar ist $\overline{V}_t(\theta) \ge \overline{f}_t$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Wegen $C_{\tau^*} = 0$ ist

$$\overline{f}_{\tau^*} = \overline{Z}_{\tau^*} = \overline{M}_{\tau^*} = \overline{V}_{\tau^*}(\theta).$$

Also ist θ ein minimaler Hedge für A^f, und A^f besitzt nach Satz 4.6 den Arbitragepreis

$$\pi(A^f) = \mathbf{E}^Q[\overline{f}_{\tau^*}] = \overline{V}_0(\theta) = Z_0.$$

Bezeichnet

$$\nu = \inf\big\{t \le T-1 : C_{t+1} > 0\big\} \wedge T,$$

so ist ν die maximale optimale Stoppzeit und

$$\overline{V}_\nu(\theta) = \overline{Z}_\nu.$$

Da $\overline{Z}^\nu$ ein Martingal ist, ist

$$\overline{V}_{\nu\wedge t}(\theta) = \overline{Z}_{\nu\wedge t} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Andererseits ist für $t \in \mathbb{T}$

$$\{\nu < t\} = \big\{\overline{V}_t(\theta) > \overline{Z}_t\big\}.$$

Zur Zeit t muss Z_t vorrätig gehalten werden, um A^f abzusichern. Nach Zeit ν kann dem Hedge-Portfolio sukzessive Geld entnommen werden, nämlich jeweils ΔC_t.

Aus diesen Betrachtungen sehen wir, dass es sinnvoll ist, Verallgemeinerung der bisher betrachteten Handelsstrategien zuzulassen. Genauer gesagt wollen wir von der Bedingung der Selbstfinanzierung abrücken.

Definition 4.21 *Eine **Handels– und Konsumstrategie** ist ein Paar $(\tilde\theta, C)$ von previsiblen Prozessen mit Werten in $\mathbb{R}^{d+1}$ und $\mathbb{R}$, wobei C monoton wachsend ist, $C_0 = 0$, und sodass*

$$(\Delta\tilde\theta_t)\cdot S_t + \Delta C_t = 0 \quad \textit{für jedes } t \in \mathbb{T}\setminus\{0\}. \tag{4.3}$$

*gilt. C heißt der **Entnahmeprozess** oder **Konsumprozess**. Der Wert des Portfolios beträgt*

$$V_t(\tilde\theta, C) = \tilde\theta_t \cdot S_t.$$

Die Menge der Handels- und Konsumstrategien bezeichnen wir mit Θ_Γ.

Lemma 4.22 *Definiere θ durch*

$$\theta_t := \begin{cases} \tilde\theta^0_t + \overline{C}_t, & \textit{falls } i = 0,\\ \tilde\theta^i_t, & \textit{falls } i = 1,\dots,d. \end{cases}$$

Dann ist

$$(\tilde\theta, C) \in \Theta_\Gamma \iff \left\{ \begin{array}{l} \theta \in \Theta \\ C_0 = 0,\ C \textit{ ist monoton wachsend und previsibel.} \end{array} \right\}.$$

Beweis Klar. □

Beispiel 4.23 θ Hedge für A^f und $\overline{Z} = \overline{M} - \overline{C}$. Dann ist $V(\theta) \ge V(\tilde\theta, C) = Z$.

Beispiel 4.24 Amerikanische Call–Option C^K_A

$$f_t = (S^1_t - K)^+.$$

Wir nehmen an, dass die Zinsrate nichtnegativ ist (was durchaus der Erfahrung entspricht), also dass S^0 monoton wachsend ist. Dies ist natürlich äquivalent dazu, dass $(\beta_t)_{t\in\mathbb{T}}$ monoton fallend ist.

Es ist daher

$$\begin{aligned} \overline{f}_t &= \beta_t(S^1_t - K)^+ \\ &= \big(\overline{S}^1_t - \beta_{t-1}K\big)^+ + \big(\overline{S}^1_t - \beta_t K\big)^+ \wedge \big(\beta_{t-1} - \beta_t\big)K \\ &\ge \big(\overline{S}^1_t - \beta_{t-1}K\big)^+ \end{aligned}$$

Die Abbildung $x \mapsto (x - \beta_{t-1}K)^+$ ist konvex, also liefert die Jensen'sche Ungleichung

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^Q[\overline{f}_t|\mathcal{F}_{t-1}] &\geq \mathbf{E}^Q\big[\big(\overline{S}_t^1 - \beta_{t-1}K\big)^+ \,\big|\, \mathcal{F}_{t-1}\big] \\ &\geq \big(\mathbf{E}^Q\big[\overline{S}_t^1|\mathcal{F}_{t-1}\big] - \beta_{t-1}K\big)^+ \\ &= \big(\overline{S}_{t-1}^1 - \beta_{t-1}K\big)^+ = \overline{f}_{t-1}.\end{aligned}$$

Also ist $\overline{f}$ ein Q–Submartingal. Nach Satz 4.15 ist daher

$$\overline{Z}_t = \mathbf{E}^Q[\beta_t(S_T^1 - K)^+|\mathcal{F}_t],$$

also $\overline{Z}$ ein Q–Martingal. Die maximale optimale Stoppzeit ist $\nu = T$.

Wir halten fest, dass wir keinen Vorteil durch frühzeitiges Ausüben der Option erzielen können.

Der Konsumprozess ist $C_t \equiv 0$, der Wertprozess

$$\overline{V}_t(\theta) = \mathbf{E}^Q\big[\beta_T(S_T^1 - K)^+|\mathcal{F}_t\big],$$

sowie der Preis zur Zeit 0

$$\boxed{\pi\big(C_A^K\big) = \mathbf{E}^Q\big[\beta_T\,(S_T^1 - K)^+\big]. \qquad (4.4)}$$

Wertprozess und Preis sind genau wie beim europäischen Call. Also ist auch der Hedge der gleiche wie beim europäischen Call.

Beispiel 4.25 Amerikanische Put Option P_A^K

$$f_t = (K - S_t^1)^+.$$

Wir nehmen wiederum nichtnegative Zinsen an. Bei europäischen Optionen konnten wir den Put durch die Parität (Gleichung (1.2) auf Seite 11) mit der Calloption berechnen. Für amerikanische Optionen gibt es diese Call–Put Parität nicht. Wir müssen daher explizit rechnen.

Wie oben für den Call ist

$$\begin{aligned}\overline{f}_t &= \beta_t(K - S_t^1)^+ \\ &= (\beta_{t-1}K - \overline{S}_t^1)^+ - (\beta_{t-1}K - \overline{S}_t^1)^+ \wedge (\beta_{t-1} - \beta_t)K.\end{aligned}$$

Wegen des Minuszeichens ist aber diesmal $\overline{f}$ kein Q–Submartingal. Es folgt, dass wir in für die amerikanische Put-Option keine einfache Lösung angeben können.

Kapitel 5

Itô-Kalkül

5.1 Prozesse in stetiger Zeit

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ W-Raum. Bisher: Ω abzählbar. Das war keine große Einschränkung, da Märkte mit endlich vielen Handelszeitpunkten und endlich vielen Risikopapieren sonst ohnehin nicht vollständig sind. Wir zielen jetzt auf Märkte, bei denen der Handel kontinuierlich möglich ist. Daher ist jetzt Ω im Allgemeinen nicht mehr abzählbar. Das zwingt zu einer kleinen Modifikation der Begriffe 'messbar', 'erzeugte σ-Algebra' und so weiter.

Eine Abbildung $Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ heißt $\mathcal{F}$–**messbar**, falls

$$\{Y^{-1}(B) : B \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\} \subset \mathcal{F}.$$

Äquivalent dazu wäre B abgeschlossen, oder kompakt zu fordern. Für $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$ schreiben wir $\sigma(\mathcal{E})$ für die kleinste σ–Algebra, die jedes $E \in \mathcal{E}$ enthält und nennen $\sigma(\mathcal{E})$ die von $\mathcal{E}$ **erzeugte** σ**-Algebra**. Wir nennen die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra

$$\mathcal{B} := \sigma(\{B \subset \mathbb{R}^d : \quad B \text{ ist offen}\}) \subset 2^{\mathbb{R}^d}$$

die **Borel'sche** σ**–Algebra**. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &:= \{Y^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} \\ &= \sigma(\{Y^{-1}(B) : B \subset \mathbb{R}^d \text{ offen}\}). \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu der Definition für abzählbares Ω können wir jetzt nicht mehr alle Teilmengen aus $\mathbb{R}^d$ betrachten. Das hat technische Gründe, die uns hier nicht beschäftigen oder beunruhigen sollen. Wichtig ist nur, dass eine Kompatibilität der Begriffe 'stetig' und 'messbar' hergestellt wird, die im Folgenden nützlich ist und von der wir stillschweigend Gebrauch machen.

Handelszeitpunkte $\mathbb{T} = [0, T]$ oder $\mathbb{T} = [0, \infty)$. $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ Filtration, falls

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \; s < t.$$

Weitere Filtration $\mathbb{F}^+ = (\mathcal{F}_{t+})_{t \in \mathbb{T}}$ definieren durch

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s.$$

$\mathbb{F}$ heißt **rechtsstetig**, $\mathbb{F}^+ = \mathbb{F}$. Im allgemeinen ist jedoch $\mathbb{F}^+ \supsetneqq \mathbb{F}$.

Beispiel 5.1 Sei Z Bernoulli und $t_0 > 0$ sowie

$$X_t = (t - t_0)^+(2Z - 1).$$

Die natürliche Filtration ist

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t) = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\}, & \text{für } t \le t_0, \\ \sigma(Z), & \text{für } t > t_0. \end{cases}$$

Also ist

$$\mathcal{F}_{t+} = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\}, & \text{für } t < t_0, \\ \sigma(Z), & \text{für } t \ge t_0. \end{cases}$$

Speziell ist $\mathcal{F}_{t+} \supsetneqq \mathcal{F}_t$. Also ist $\mathbb{F}$ nicht rechtsstetig.

Analog zur diskreten Situation sind die Begriffe: stochastischer Prozess, adaptiert, Stoppzeit (wobei $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ gefordert wird), τ–Vergangenheit, Martingal.

Definition 5.2 *Ein stochastischer Prozess X heißt* ***stetig****, falls die Abbildung $\mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$, $t \mapsto X_t(\omega)$ für $\mathbf{P}$–fast alle $\omega \in \Omega$ stetig ist. X heißt* ***càdlàg*** *(continu à droite, (et pourvu de) limites à gauche) oder* ***RCLL*** *(right continuous, left limits), falls fast sicher die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ rechtsstetig ist und die Limiten $X_{t-}(\omega) := \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega)$ existieren.*

Wir brauchen die Einschränkung auf RCLL Prozesse, da sonst Ausdrücke wie X_τ im Allgemeinen nicht messbar sind.

Definition 5.3 *Sei X adaptiert und RCLL sowie τ eine Stoppzeit. Dann definieren wir*

$$X_\tau(\omega) := X_{\tau(\omega)}(\omega) \qquad \textit{für } \omega \in \Omega.$$

Bemerkung 5.4 X_τ ist $\mathcal{F}_\tau$–messbar (also insbesondere eine Zufallsvariable), weil X RCLL ist.

Beispiel 5.5 Typische Stoppzeiten sind Eintrittszeiten in Mengen

$$\tau_A := \inf\{t \in \mathbb{T} : X_t \in A\} \qquad \text{für } A \subset \mathbb{R}^d.$$

Ist X stetig und A abgeschlossen, so ist τ_A eine Stoppzeit, denn

$$\begin{aligned} \{\tau \le t\} &= \Big\{ \inf\{d(X_s, A) : s \le t\} = 0 \Big\} \\ &\overset{\text{stetig}}{=} \Big\{ \inf\{d(X_s, A) : s \le t, s \in \mathbb{Q}\} = 0 \Big\} \\ &= \bigcup_{s \le t,\, s \in \mathbb{Q}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ d(X_s, A) < \frac{1}{n} \right\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Ist X RCLL und A offen, so ist τ_A im Allgemeinen keine $\mathbb{F}$-Stoppzeit, jedoch eine $\mathbb{F}^+$–Stoppzeit.

Beispiel 5.6 Sei X wie ein Beispiel 5.1 und $A = (0, \infty)$. Dann ist

$$\tau_A = \begin{cases} t_0, & \text{für } Z = 1, \\ \infty, & \text{für } Z = 0. \end{cases}$$

Also ist $\{\tau_A \le t_0\} = \{Z = 1\} \in \mathcal{F}_{t_0+}$, nicht aber in $\mathcal{F}_{t_0}$.

Für RCLL Martingale gelten die aus dem Diskreten bekannten Sätze:

- Optional Sampling mit beschränkten Stoppzeiten $\tau \leq T$,
- Optional Stopping mit beschränkten Stoppzeiten $\tau \leq T$,
- Doob'sche L^p–Ungleichung.

Definition 5.7 *Ein adaptierter RCLL Prozess X (mit Werten in $\mathbb{R}^d$) heißt **Markovprozess**, falls für alle $t > s$ und $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gilt*

$$\mathbf{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[f(X_t)|X_s] =: P_{s,t}f(X_s).$$

$(P_{s,t})_{s<t}$ heißt die Familie der Übergangskerne.

Beispiel 5.8 Seien $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ unabhängig exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, also

$$\mathbf{P}[Z_1 \leq x] = e^{-\lambda} \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt, \qquad x \geq 0.$$

Wir definieren

$$X_t := \inf\left\{ n \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^{n+1} Z_i > t \right\}.$$

X heißt **Poissonprozess**. Sei $\mathbb{F}$ die von X erzeugte Filtration. Dann ist

$$\mathbf{P}[X_t = k|\mathcal{F}_s] = \mathbb{1}_{\{X_s \leq k\}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-X_s}}{(k-X_s)!}.$$

Nachrechnen!

Brown'sche Bewegung

Sei $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

Definition 5.9 (Brown'sche Bewegung)
*Ein stetiger reellwertiger stochastischer Prozess B heißt **Brown'sche Bewegung**, falls*

- $B_0 = 0$,
- *Für $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sind die Inkremente $\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)_{i=1,\ldots,n}$ unabhängig und $\mathcal{N}_{0,t_{i+1}-t_i}$ verteilt.*

Aus der Definition folgt sofort, dass B ein Markovprozess ist. Aufgrund der Zentriertheit der Zuwächse haben B und einfache Transformierte die Martingaleigenschaft.

Satz 5.10 *Ist B eine Brown'sche Bewegung mit erzeugter Filtration $\mathbb{F}$, dann sind $\mathbb{F}$-Martingale*

(i) B

(ii) $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{T}}$

(iii) $(\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t))_{t\in\mathbb{T}},\ \sigma \geq 0.$

Beweis (i) $\mathbf{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] = \mathbf{E}[B_t - B_s] = 0.$

(ii)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(B_t^2 - t) - (B_s^2 - s) | \mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}[B_t^2 - B_s^2 - (t-s)) | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2 - (t-s)) | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbf{E}[(B_t - B_s)^2 - (t-s))] \\ &= \mathbf{E}[B_{t-s}^2] - (t-s) = 0.\end{aligned}$$

(iii) Sei $Z \sim \mathcal{N}_{0,t-s}$. Dann ist

$$\mathbf{E}[e^{\sigma Z}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}\, dx = e^{\sigma^2(t-s)}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t} | \mathcal{F}_s] &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t} \mathbf{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s] \\ &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}t} \underbrace{\mathbf{E}[e^{\sigma(B_t - B_s)}]}_{e^{\sigma^2(t-s)}} \\ &= e^{\sigma B_s - \frac{\sigma^2}{2}s}.\end{aligned}$$

□

5.2 Integrale

Wir machen einen kleinen Rückblick auf das Lebesgue-Stieltjes-Integral.

Sei $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton wachsend mit $G(0) = 0$. Sei $t > 0$ fest gewählt und für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung τ_n von $[0, t]$ gegeben durch

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n = t.$$

Wir nehmen an, dass die Feinheit der Zerlegungen immer besser wird

$$|\tau_n| := \sup_{i<n} |t_{i+1}^n - t_i^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Für stetiges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definieren wir

$$I_n(f) := \sum_{i<n} f(t_i^n)(G(t_{i+1}^n) - G(t_i^n)).$$

Das **Lebesgue-Stieltjes Integral** ist definiert durch

$$\int_0^t f(x)\, dG(x) := \lim_{n\to\infty} I_n(f).$$

Dabei ist leicht einzusehen, dass der Limes existiert: Ist $\mu_n := \sum_{i<n} G(t_{i+1}^n - G(t_i^n))\delta_{t_i^n}$ und μ das Maß auf $\mathbb{R}^+$ mit Verteilungsfunktion G, so gilt $\mu_n \to \mu$ schwach, also

$$I_n(f) = \int f d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f\, d\mu.$$

Das LS-Integral lässt sich für Funktionen G mit beschränkter Variation ausdehnen

$$\|G_{\big|[0,t]}\|_{TV} := \lim_{n\to\infty} \sum_{i<n} |G(t_{i+1}^n) - G(t_i^n)| < \infty.$$

(Mit der Jordan Zerlegung lässt sich solches G nämlich als Differenz zweier monotoner Funktionen schreiben.)

Für die Brown'sche Bewegung ist aber

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} |B_{(i+1)/n} - B_{i/n}|\right] = n \cdot \sqrt{2/\pi}\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Mit einem geeigneten Gesetz der großen Zahl erhält man sogar

$$\mathbf{P}\left[\sum_{i=0}^{n-1} |B_{(i+1)/n} - B_{i/n}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\right] = 1.$$

Speziell ist also fast jeder Pfad $t \mapsto B_t$ von unendlicher Variation. Für Brown'sche Bewegungen lässt sich mithin kein Lebesgue-Stieltjes Integral $\int f\,dB$ definieren.

Um nun Integrale auch für so irreguläre Integranden wie die Brown'sche Bewegung zu definieren, brauchen wir einen neuen Begriff.

5.3 Das pfadweise Itô-Integral

Definition 5.11 *Für stetiges $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\langle G\rangle_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{i<n} (G(t_{i+1}^n) - G(t_i^n))^2,$$

*falls der Limes existiert. Wir nennen $\langle G\rangle$ die **quadratische Variation** von G. G heißt von stetiger quadratischer Variation, falls $t \mapsto \langle G\rangle_t$ stetig ist.*

Bemerkung 5.12 $\langle G\rangle$ ist stets monoton wachsend.

Beispiel 5.13 Ist G stetig und von endlicher Variation, so ist $\langle G\rangle \equiv 0$, denn

$$\sum_{i<n} (G(t_{i+1}^n) - G(t_i^n))^2 \le \underbrace{\sup_{i<n} |G(t_{i+1}^n) - G(t_i^n)|}_{\to 0,\text{ da } G \text{ glm. ste. auf Kpkt.}} \cdot \underbrace{\sum_{i<n} |G(t_{i+1}^n) - G(t_i^n)|}_{\le \|G_{\big|[0,t]}\|_{TV} < \infty}.$$

Wir haben gesehen, dass Brown'sche Pfade nicht von endlicher Variation sind, also eine Chance haben, eine nicht-triviale quadratische Variation zu besitzen. Es gilt der folgende Satz von Paul Lévy.

Satz 5.14 (Lévy) *Für die Brown'sche Bewegung gilt*

$$\mathbf{P}\big[\langle B\rangle_t = t \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}^+\big] = 1.$$

Beweis Da $\langle B\rangle$ monoton ist, reicht es $t \in \mathbb{Q}^+$ zu betrachten, also zu zeigen, dass

$$\mathbf{P}\big[\langle B\rangle_t = t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Q}^+\big] = 1.$$

Dafür ist notwendig und hinreichend, dass

$$\mathbf{P}\big[\langle B\rangle_t = t\big] = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{Q}^+.$$

Aufgrund der Skalierungseigenschaft der Brown'schen Bewegung

$$(B_t)_{t\geq 0} = (\sqrt{K} B_{t/K})_{t\geq 0} \quad \text{für alle } K > 0$$

reicht es zu zeigen, dass

$$\mathbf{P}[\langle B\rangle_1 = 1] = 1.$$

Wir zeigen hier

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}})^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{fast sicher.}$$

Wir betrachten also nur die Zerlegungsfolge $\tau_n = \{k2^{-n}, k = 0, \ldots, 2^n\}$. Für allgemeinere Zerlegungsfolgen ist das Argument etwas schwieriger.

Zunächst ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}})^2\right] &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{E}[(B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}})^2] \\ &= 2^n \cdot 2^{-n} = 1.\end{aligned}$$

Außerdem ist die Varianz

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}})^2\right] &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{Var}[(B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}})^2] \\ &= 2^n(\mathbf{E}[(B_{2^{-n}})^4] - \mathbf{E}[(B_{2^{-n}})^2]^2) \\ &= 2^n \cdot 2 \cdot 2^{-2n} = 2 \cdot 2^{-n}.\end{aligned}$$

Es ist also sogar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{Var}\left[\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}})^2\right] = 1 < \infty.$$

Mit dem Borel-Cantelli Lemma folgt also das starke Gesetz der großen Zahl

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} (B_{(i+1)2^{-n}} - B_{i2^{-n}})^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{fast sicher.} \qquad \square$$

Ist $t \mapsto X_t$ stetig und von endlicher quadratischer Variation $\langle X\rangle$, so können wir das Lebesgue-Stieltjes Integral bezüglich $\langle X\rangle$ durch Summen approximieren.

Lemma 5.15 *Für* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *stetig gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i<n} f(t_i^n) \left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)^2 = \int_0^t f(s)\, d\langle X\rangle_s.$$

Beweis Wie für die Variation setzen wir

$$\mu_n := \sum_{i<n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \delta_{t_i^n}$$

und

$$\mu([0,s]) := \langle X \rangle_s, \quad s \geq 0.$$

Dann gilt $\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ schwach, also $\int f\, d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f\, d\mu$. □

Satz 5.16 (Itô-Formel) *Sei $t \mapsto X_t$ stetig und von endlicher quadratischer Variation $\langle X \rangle$ sowie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für $t \geq 0$ die* ***Itô-Formel****:*

$$F(X_t) - F(X_0) = \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X \rangle_s, \tag{5.1}$$

wobei wir das ***Itô-Integral*** *definieren durch*

$$\int_0^t F'(X_s)\, dX_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{i<n} F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}). \tag{5.2}$$

Beweis Wir müssen zeigen, dass der Limes in (5.2) existiert und dass (5.1) gilt. Die Existenz des Limes gilt natürlich nur, weil F zweimal stetig differenzierbar ist.

Wir kürzen ab $\Delta_i^n := X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}$. Die Taylor-Formel liefert

$$F(X_{t_{i+1}^n}) \;-\; F(X_{t_i^n}) \;=\; F'(X_{t_i^n})\Delta_i^n \;+\; \frac{1}{2} F''(X_{t_i^n}) \cdot (\Delta_i^n)^2 \;+\; R_i^n, \tag{5.3}$$

wobei wir das Restglied

$$R_i^n \;=\; \big(F''(\xi) - F''(X_{t_i^n})\big) \cdot \frac{1}{2} (\Delta_i^n)^2$$

(für eine geeignete Zwischenstelle $\xi \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$) wie folgt abschätzen. Da X stetig ist, ist $C := \{X_t : t \in [0,T]\}$ kompakt und $F''\big|_C$ gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ mit

$$|F''(X_s) - F''(X_{s'})| \;<\; \varepsilon \quad \text{falls } s, s' \in [0,t] \text{ mit } |X_s - X_{s'}| < \delta.$$

Da auch X gleichmäßig stetig ist auf $[0,t]$ und $|\tau_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, gibt es (zu jedem $\delta > 0$) ein N_δ, sodass

$$\sup_{n \geq N_\delta} \sup_{i<n} |\Delta_i^n| < \delta.$$

Also ist für $n \geq N_\delta$ und $i < n$

$$|R_i^n| \;\leq\; \frac{1}{2} \varepsilon\, (\Delta_i^n)^2.$$

Summieren wir nun in (5.3) über i, so erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Big(F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) \Big) \;=\; F(X_t) - F(X_0).$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |R_i^n| \;\le\; \varepsilon \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle X\rangle_t < \infty},$$

da $\varepsilon > 0$ beliebig war, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} |R_i^n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Weiter ist nach Lemma 5.15

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} F''(X_{t_i^n}) \Delta_i^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s)\, d\langle X\rangle_s.$$

Daher existiert dann auch der Limes in (5.2). □

Korollar 5.17 *Im klassischen Fall, wo X beschränkte Variation hat, gilt $\langle X\rangle \equiv 0$, also*

$$F(X_t) - F(X_0) \;=\; \int_0^t F'(X_s)\, dX_s.$$

Differentielle Schreibweise

$$dF(X) \;=\; F'(X)\, dX \;+\; \frac{1}{2} F''(X)\, d\langle X\rangle \qquad \text{Itô-Kalkül.}$$

Lemma 5.18 *Für $F \in C^1(\mathbb{R})$ hat $t \mapsto F(X_t)$ die quadratische Variation*

$$\langle F(X)\rangle_t = \int_0^t (F'(X_s))^2\, d\langle X\rangle_s.$$

Beweis Da F' gleichmäßig stetig ist auf kompakten Mengen, ist

$$\sup_{i<n} \sup_{x \in X([t_i^n, t_{i+1}^n])} |F'(x) - F'(X_{t_i^n})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist nach Lemma 5.15

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}))^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} F'(X_{t_i^n})^2 \cdot (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 = \int_0^t F'(X_s)^2\, d\langle X\rangle_s. \quad \square$$

Lemma 5.19 *Sei $X_t = M_t + A_t$, wobei $t \mapsto A_t$ stetig ist mit $\langle A\rangle \equiv 0$. Dann ist*

$$\langle X\rangle = \langle M\rangle.$$

Beweis Es ist nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}
|\langle X\rangle_t - \langle M\rangle_t| \;&=\; 2 \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})(A_{t_{i+1}^n} - A_{t_i^n}) \right| \\
&\le\; 2 \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2}}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (A_{t_{i+1}^n} - A_{t_i^n})^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \\
&=\; 0.
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.20 *Sei* $f \in C^1(\mathbb{R})$. *Das Itô-Integral* $M_t := \int_0^t f(X_s)\,dX_s$ *hat die quadratische Variation*

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t f^2(X_s)\,d\langle X \rangle_s.$$

Beweis Sei $F' = f$, also F eine Stammfunktion von f. Dann ist

$$M_t \;=\; F(X_t) \;-\; F(X_0) \;-\; \frac{1}{2}\int_0^t f'(X_s)\,d\langle X \rangle_s.$$

Es hat $t \mapsto \int_0^t f(X_s)\,d\langle X \rangle_s$ beschränkte Variation und ist stetig. Nach Lemma 5.18 und Lemma 5.19 gilt daher

$$\langle M \rangle_t \;=\; \langle F(X) \rangle_t \;=\; \int_0^t f^2(X_s)\,d\langle X \rangle_s. \qquad \square$$

5.4 Das Itô-Integral der Brown'schen Bewegung

Definition 5.21 *Sei* B *eine Brown'sche Bewegung. Mit* $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H}^2(T)$ *bezeichnen wir den Hilbertraum der messbaren quadratintegrierbaren Funktionen*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2}^2 := \int_0^T \mathbf{E}[f(B_t)^2]\,dt < \infty.$$

Satz 5.22 *Sei* B *eine Brown'sche Bewegung und* $\mathbb{F} = \sigma(B)$ *die erzeugte Filtration. Ferner sei* $f \in \mathcal{H}^2 \cap C^1([0,T])$. *Dann ist das Itô-Integral*

$$M_t^f := \int_0^t f(B_s)\,dB_s$$

ein quadratintegrierbares $\mathbb{F}$*–Martingal mit*

$$\langle M^f \rangle_t = \int_0^t f^2(B_s)\,ds$$

und

$$\mathbf{E}[(M^f)^2] \;=\; \mathbf{E}[\langle M^f \rangle_t] \;=\; \int_0^t \mathbf{E}[f(B_s)^2]\,ds.$$

Beweis Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zerlegungsfolge von $[s,t]$ mit verschwindender Feinheit. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[M_t^f - M_s^f\,|\,\mathcal{F}_s] &= \mathbf{E}\left[\int_s^t f(B_r)\,dB_r\,|\,\mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbf{E}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})\,\big|\,\mathcal{F}_s\right]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Wir sind fertig, wenn wir rechtfertigen können, dass Erwartungswert und Limes vertauschbar sind. Zu dem Zweck reicht es zu zeigen, dass das zweite Moment beschränkt bleibt. Um zu zeigen, dass M^f quadratintegrierbar ist, Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}\big[f(B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n})\big] &= \mathbf{E}\big[f(B_{t_i^n})^2\,(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n})^2\big]\\ &= \mathbf{E}\Big[f(B_{t_i^n})^2\,\mathbf{E}\big[\big(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\big)^2\,\big|\,\mathcal{F}_{t_i^n}\big]\Big]\\ &= (t_{i+1}^n-t_i^n)\,\mathbf{E}\big[f(B_{t_i^n})^2\big],\end{aligned}$$

und dass die Kovarianzen verschwinden. Nun ist nach Voraussetzung

$$\mathbf{Var}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f\big(B_{t_i^n}\big)\big(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\big)\right]=\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{E}\big[f^2(B_{t_i^n})\,\big(t_{i+1}^n-t_i^n\big)\big]\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_s^t f^2(B_r)\,dr<\infty.$$

Wir können also in (5.4) Grenzwert und Erwartungswert vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[M_t^f-M_s^f\,|\,\mathcal{F}_s] &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{E}\left[f\big(B_{t_i^n}\big)\,\big(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\big)\,\big|\,\mathcal{F}_s\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{E}\left[f\big(B_{t_i^n}\big)\,\underbrace{\mathbf{E}\big[B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\,|\,\mathcal{F}_{t_i^n}\big]}_{=0}\,\big|\,\mathcal{F}_s\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Also ist M^f ein Martingal.

Es ist also

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n})\right)^2\right] &= \mathbf{Var}\left[\sum_{i=0}^{n-1} f\big(B_{t_i^n}\big)\,\big(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\big)\right]\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{Var}\big[f\big(B_{t_i^n}\big)\,\big(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\big)\big]\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\big(t_{i+1}^n-t_i^n\big)\,\mathbf{E}\big[f\big(B_{t_i^n}\big)^2\big].\end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Fatou ist also

$$\mathbf{E}\big[(M_t^f)^2\big]\ \le\ \int_0^t \mathbf{E}[f(B_s)^2]\,ds.$$

Ist $\|f\|_\infty<\infty$, so gilt hier sogar Gleichheit. Um das zu zeigen, rechnen wir das vierte Moment aus. Als Vorbereitung betrachten wir zwei unabhängige Zufallsvariablen

$$X_i\sim\mathcal{N}_{0,\sigma^2},\qquad i=1,2.$$

Dann ist das gemischte vierte Moment

$$\mathbf{E}[X_i^2X_j^2]=\begin{cases}\sigma_i^2\sigma_j^2, & \text{falls } i\neq j,\\ 3\sigma_i^2, & \text{falls } i=j.\end{cases}$$

Für $i<j$ ist $(B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n})$ unabhängig von $\mathcal{F}_{t_j^n}$, also

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big[f\big(B_{i_i^n}\big)\,\big(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\big)f\big(B_{i_j^n}\big)^3\big(B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n}\big)^3\Big]\\ &\quad=\mathbf{E}\Big[f\big(B_{i_i^n}\big)\,\big(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n}\big)\,f\big(B_{i_j^n}\big)^3\Big]\,\mathbf{E}\Big[\big(B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n}\big)^3\Big]\ =\ 0.\end{aligned}$$

Analog verschwinden auch die anderen gemischten Terme und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n})\right)^4\right] &= \sum_{i,j=1}^{n-1}\mathbf{E}\left[f^2(B_{t_i^n})f^2(B_{t_j^n})(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n})^2(B_{t_{j+1}^n}-B_{t_j^n})^2\right]\\ &\le 3\|f\|_\infty^4\sum_{i,j=1}^{n-1}(t_{i+1}^n-t_i^n)(t_{j+1}^n-t_j^n)\\ &= 3\,\|f\|_\infty^4\,t^2.\end{aligned}$$

Da die vierten Momente beschränkt sind, folgt die Konvergenz der zweiten Momente aus der fast sicheren Konvergenz. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n})\right)^2\right] &= \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i^n})(B_{t_{i+1}^n}-B_{t_i^n})\right)^2\right]\\ &= \int_0^t \mathbf{E}[f^2(B_s)]\,dB_s.\end{aligned}$$

Ist nun f nicht beschränkt, so existiert eine approximierende Folge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}^2\cap C^1([0,T])$ mit $\|f_N\|_\infty\le N$ und $\|f-f_N\|_{\mathcal{H}^2}\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow}0$. Wegen $M^f=M^{f-f_N}+M^{f_N}$ ist mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}[(M_t^f)^2]-\mathbf{E}[(M_t^{f_N})^2]| &= \left|2\mathbf{E}[M_t^{f-f_N}M_t^f]+\mathbf{E}[(M_t^{f-f_N})^2]\right|\\ &\le 2\sqrt{\mathbf{E}[(M_t^{f-f_N})^2]\mathbf{E}[(M_t^f)^2]}\;+\;\mathbf{E}[(M_t^{f-f_N})^2]\\ &= 2\sqrt{\|f-f_N\|_{\mathcal{H}^2}^2\cdot\|f\|_{\mathcal{H}^2}^2}\;+\;\|f-f_N\|_{\mathcal{H}^2}\\ &\stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Speziell ist also

$$\mathbf{E}[(M_t^f)^2]\;=\;\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\big[(M_t^{f_N})^2\big]\;=\;\lim_{N\to\infty}\|f_N\|_{\mathcal{H}^2}^2\;=\;\|f\|_{\mathcal{H}^2}^2.$$ □

Korollar 5.23 *Ist $F\in C^2(\mathbb{R})$ und $\int_0^T\mathbf{E}[F'(B_s)^2]\,ds<\infty$, dann ist*

$$\left(F(B_t)\;-\;F(B_0)\;-\;\frac{1}{2}\int_0^t F''(B_s)\,ds\right)_{t\in[0,T]}$$

ein quadratintegrierbares Martingal.

Beispiel 5.24 $F(x)=x^2$. Dann ist

$$(B_t^2-t)_{t\ge 0}$$

ein Martingal.

Bemerkung 5.25 Man kann zeigen, dass das Ergebnis von Satz 5.22 auch für nur messbares f mit $\|f\|_{\mathcal{H}^2}<\infty$ gilt. Ist nämlich $\mathcal{M}^2([0,T])$ der Vektorraum der stetigen quadratintegrierbaren Martingale mit stetiger quadratischer Variation und mit der Norm $\|M\|_2=\sqrt{\mathbf{E}[M_T^2]}$, dann ist nach dem Gezeigten

$$\begin{aligned}\widetilde{I}:\;\mathcal{H}^2(T)\cap C^1([0,1]) &\to \mathcal{M}^2([0,T])\\ f &\mapsto \int_0^T f(B_s)\,dB_s,\end{aligned}\tag{5.5}$$

eine **Isometrie**. D.h.

$$\|\widetilde{I}(f)\|_2 \;=\; \|f\|_{\mathcal{H}^2}. \tag{5.6}$$

Da $\mathcal{H}^2(T) \cap C^1([0,1]) \subset \mathcal{H}^2(T)$ dicht liegt bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2}$, kann man $\widetilde{I}$ eindeutig zu einer Isometrie $I : \mathcal{H}^2(T) \to \mathcal{M}^2([0,T])$ fortsetzen.

Jetzt hat man eine größere Klasse von integrierbaren Funktionen. Als Preis hat man bezahlt, dass man das Integral nicht mehr für jede einzelne Realisierung von B angeben kann.

Beispiel 5.26 Sei $f(x) = \operatorname{sign}(x) = 2\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) - 1$. Dann ist $M_t^f = \int_0^t f(B_s)\,dB_s$ ein stetiges quadratintegrierbares Martingal mit $\langle M^f\rangle_t = t$. Wir werden später sehen, dass hieraus schon folgt, dass M^f eine Brown'sche Bewegung ist.

Der Satz 5.22 lässt sich ohne weiteres auf stetige quadratintegrierbare Martingale $(X_t)_{t\in[0,T]}$ mit stetiger quadratischer Variation $\langle X\rangle$ übertragen. Wir geben hier nur ohne Beweis das Ergebnis an.

Satz 5.27 *Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\mathbf{E}[\int_0^T f^2(X_t)\,d\langle X\rangle_t] < \infty$. Dann ist*

$$M_t^f := \int_0^t f(X_s)\,dX_s \tag{5.7}$$

ein stetiges qudratintegrierbares Martingal mit

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t f^2(X_s)\,d\langle X\rangle_s.$$

Ist f differenzierbar und F eine Stammfunktion von f, so ist

$$M_t^f \;=\; F(X_t) - F(X_0) \;-\; \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X\rangle_s.$$

Durch eine Variante der Isometrie (5.5) *lässt sich* (5.7) *auf messbare f mit $\mathbf{E}[\int_0^T f^2(X_t)\,d\langle X\rangle_t] < \infty$ fortsetzen.*

Korollar 5.28 *Sei X wie oben. Dann ist $\mathbf{E}[(X_t - X_0)^2] = \mathbf{E}[\langle X\rangle_t]$.*

Beweis Sei $F(x) = x^2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[(X_t - X_0)^2] &= \mathbf{E}\big[X_t^2 - X_0^2\big] \\
&= \mathbf{E}\big[F(X_t) - F(X_0)\big] \\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^t \frac{1}{2}F''(X_s)\,d\langle X\rangle_s\right] \\
&= \mathbf{E}[\langle X\rangle_t].
\end{aligned}$$

□

Korollar 5.29 *Ist X ein stetiges Martingal mit $\langle X\rangle \equiv 0$, so ist $X_t \equiv X_0$.*

Beweis Sei $\sigma_N := \inf\{t > 0 : |X_t| \geq N\}$. Nach dem Optional Sampling Theorem ist X^{σ_N} ein quadratintegrierbares Martingal und $\langle X^{\sigma_N}\rangle_t = \langle X\rangle_{\sigma_N\wedge t}$. Nach Korollar 5.29 ist $X_{\sigma_N\wedge t} = X_0$. Wegen $\sigma_N \uparrow \infty$ gilt auch $X_t = X_0$. □

Korollar 5.30 *Sei* $g \in \mathcal{H}^2 \cap C^1(\mathbb{R})$ *und*

$$X_t \;=\; \int_0^t g(B_s)\,dB_s.$$

Dann ist

$$F(X_t) - F(X_0) \;=\; \int_0^t F'(X_s)g(B_s)\,dB_s \,+\, \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)g^2(B_s)\,dB_s.$$

Beweis Klar, weil $d\langle X\rangle_t = g^2(B_t)\,dt$. □

Bemerkung 5.31 Hat man $\int_0^t f(X_s)\,dX_s$ etabliert, sieht man, dass man für die Martingaleigenschaft des Integrals nur braucht, dass $f(S_s)$ $\mathcal{F}_s$–messbar ist, nicht aber, dass der Integrand *nur* von X_s abhängt. Man erhält also für jeden adaptierten RCLL Prozess H mit $\mathbf{E}[\int_0^T H_s^2\,d\langle X\rangle_s] < \infty$ das Itô-Integral

$$(H.X)_t \;:=\; \int_0^t H_s\,dX_s. \tag{5.8}$$

als quadratintegrierbares Martingal mit

$$\langle H.X\rangle_t \;=\; \int_0^t H_s^2\,d\langle X\rangle_s. \tag{5.9}$$

5.5 Mehrdimensionale Itô-Formel

Im folgenden: $X, Y : [0.T] \to \mathbb{R}$ stetig mit stetiger quadratischer Variation $\langle X\rangle$ und $\langle Y\rangle$.

Definition 5.32 *Die **quadratische Kovariation** wird definiert als*

$$\langle X,Y\rangle_t := \lim_{n\to\infty}\sum_{i<n}\left(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}\right)\left(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}\right),$$

sofern der Limes existiert.

Lemma 5.33 (Polarisation) $\langle X,Y\rangle$ *existiert genau dann, wenn* $\langle X+Y\rangle$ *existiert. Es gilt dann die Polarisationsformel*

$$\langle X,Y\rangle \;=\; \frac{1}{2}\big(\langle X+Y\rangle - \langle X\rangle - \langle Y\rangle\big).$$

Speziell ist, falls $\langle Y\rangle \equiv 0$*, auch* $\langle X,Y\rangle \equiv 0$.

Beweis Übung! □

Lemma 5.34 $\langle X,Y\rangle$ *ist von endlicher Variation, und es gilt*

$$\Big\|\langle X,Y\rangle\big|_{[0,t]}\Big\|_{TV} \;\le\; \sqrt{\langle X\rangle_t\langle Y\rangle_t}.$$

Beweis Nach der Definitionsgleichung gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\begin{aligned}\langle X,Y\rangle_t \;&\le\; \limsup_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n}\right)^2\sum_{i=0}^{n-1}\left(Y_{t_{i+1}^n}-Y_{t_i^n}\right)^2}\\ &=\; \sqrt{\langle X\rangle_t\,\langle Y\rangle_t}.\end{aligned}$$

Also ist für $n\in\mathbb{N}$ und $0=t_0^n<t_1^n<\ldots<t_n^n=t$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}|\langle X,Y\rangle_{t_{i+1}^n}-\langle X,Y\rangle_{t_i^n}| &\le \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(\langle X\rangle_{t_{i+1}^n}-\langle X\rangle_{t_i^n}\right)\left(\langle Y\rangle_{t_{i+1}^n}-\langle Y\rangle_{t_i^n}\right)}\\ &= \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\left(\langle X\rangle_{t_{i+1}^n}-\langle X\rangle_{t_i^n}\right)}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\left(\langle Y\rangle_{t_{i+1}^n}-\langle Y\rangle_{t_i^n}\right)}\\ &= \sqrt{\langle X\rangle_t\,\langle Y\rangle_t}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.35 Sind B^1 und B^2 zwei unabhängige Brown'sche Bewegungen, so ist $\langle B^1,B^2\rangle\equiv 0$ fast sicher.
Klar, denn $B:=\sqrt{1/2}\,(B^1+B^2)$ ist eine Brown'sche Bewegung. Also ist $\langle B^1+B^2\rangle_t=2\langle B\rangle_t=2t$. Es folgt $\langle B^1,B^2\rangle=\frac{1}{2}(2t-t-t)=0$.

Sei nun $X:=(X^1,\ldots,X^d):[0,\infty)\to\mathbb{R}^d$ stetig mit stetigen $\langle X^k,X^l\rangle,\ k,l=1,\ldots,d$.

Satz 5.36 (Mehrdimensionale Itô-Formel) *Ist $F\in C^2(\mathbb{R}^d)$, so gilt*

$$F(X_t)-F(X_0) \;=\; \int_0^t(\nabla F(X_s),dX_s) \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t\sum_{k,l=1}^d\frac{\partial^2F}{\partial x_k\partial x_l}(X_s)\,d\langle X^k,X^l\rangle_s, \tag{5.10}$$

wobei das mehrdimensionale Itô-Integral definiert ist durch

$$\int_0^t(\nabla F(X_s),dX_s) \;:=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\langle\nabla F(X_{t_i^n}),(X_{t_{i+1}^n}-X_{t_i^n}\rangle.$$

Ferner ist

$$\int_0^t(\nabla F,dX_s) \;=\; \sum_{k=1}^d\int_0^t\frac{\partial F}{\partial x_k}(X_s)\,dX_s^k. \tag{5.11}$$

Beweis Wie für die eindimensionale Itô-Formel. Der Zusatz (5.11) folgt mit der Taylor Formel. □

Korollar 5.37 (Produktregel)

$$X_tY_t \;=\; X_0Y_0 \;+\; \int_0^t Y_s\,dX_s \;+\; \int_0^t X_s\,dY_s+\langle X,Y\rangle_t.$$

Beweis Itô-Formel mit $F(x,y)=xy$. □

Korollar 5.38 *Sei* $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *und* $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $\langle X \rangle$ *stetig. Dann gilt*

$$F\big(X_t, \langle X\rangle_t\big) \;=\; F(X_0, 0) \;+\; \int_0^t \partial_1 F(X_s, \langle X\rangle_s)\, dX_s \;+\; \int_0^t (\frac{1}{2}\partial_{11}^2 F + \partial_2 F)(X_s, \langle X\rangle_s) d\langle X\rangle_s.$$

Beweis Setze $\tilde{X} := (X_t, \langle X\rangle_t)$ und wende die Itô-Formel an. □

Satz 5.39 (Fubini für Itô-Integrale) *Sei* X *stetig mit stetiger quadratischer Variation* $\langle X\rangle$. *Sei* $g : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ *stetig mit stetiger Ableitung in der zweiten Koordinate* $\partial_2 g$. *Dann gilt*

$$\int_0^s \left(\int_0^t g(u,v)\, du\right) dX_v \;=\; \int_0^t \left(\int_0^s g(u,v)\, dX_v\right) du. \tag{5.12}$$

Beweis $G(t,v) := \int_0^t g(u,v)\, du$ hat endliche Variation und stetige Ableitung $\partial_2 G(t,v) = \int_0^t \partial_2 g(u,v)\, du$. Daher ist $\langle G(t,\,\cdot\,), X\rangle \equiv 0$. Nach der Produktformel gilt daher

$$\begin{aligned}\int_0^s \left(\int_0^t g(u,v)\, du\right) dX_v \;&=\; \int_0^s G(t,v)\, dX_v \\ &=\; G(t,s)X_s - G(t,0)X_0 - \int_0^s X_v \partial_2 G(t,v)\, dv.\end{aligned}$$

Da $v \mapsto X_v$ und $v \mapsto \partial_2 g(s,v)$ stetig sind, vertauschen die Integrale

$$\int_0^s X_v \partial_2 G(t,v)\, dv = \int_0^t \left(\int_0^s X_v \partial_2 g(u,v)\, dv\right) du.$$

So erhalten wir (wieder mit der Produktformel)

$$\begin{aligned}\int_0^s G(t,v)\, dX_v \;&= G(t,s)X_s - G(t,0)X_0 - \int_0^t \left(\int_0^s \partial_2 g(u,v) X_v\, dv\right) du \\ &=\; G(t,s)X_s - G(t,0)X_0 + \int_0^t \left(\int_0^s g(u,v)\, dX_v\right) du \\ &\qquad - \int_0^t \left(g(u,s)X_s - g(u,0)X_0\right) du \\ &= \int_0^t \left(\int_0^s g(u,v)\, dX_v\right) du.\end{aligned}$$

□

Korollar 5.40 *Seien* X *und* g *wie oben. Mit dem selben Beweis erhält man auch*

$$\int_0^s \left(\int_0^v g(u,v)\, du\right) dX_v = \int_0^s \left(\int_u^s g(u,v)\, dX_v\right) du. \tag{5.13}$$

Korollar 5.41 *Ist* $f \in C^2([0,\infty)^2)$ *und* $Y_t := \int_0^t f(t,v) dX_v$, *dann ist*

$$Y_t - Y_s \;=\; \int_s^t f(v,v)\, dX_v \;+\; \int_s^t \left(\int_0^r \partial_1 f(r,v)\, dX_v\right) dr, \tag{5.14}$$

oder formal

$$dY_t \;=\; f(t,t)\, dX_t \;+\; \left(\int_0^t \partial_1 f(t,v)\, dX_v\right) dt. \tag{5.15}$$

Beweis Nach dem Korollar 5.40 ist

$$\begin{aligned}\int_s^t \left(\int_0^r \partial_1 f(r,v)\, X_v\right) dr &= \int_0^t \left(\int_{s\vee v}^t \partial_1 f(r,v)\, dr\right) dX_v \\ &= \int_0^t (f(t,v) - f(s\vee v, v))\, dX_v \\ &= \int_0^t f(t,v)\, dX_v - \int_0^s f(s,v)\, dX_v - \int_s^t f(c,v)\, dX_v \qquad (5.16) \\ &= Y_t - Y_s - \int_s^t f(v,v)\, dX_v. \end{aligned}$$

□

Martingaltransformierte

Wie in Abschnitt 5.4 können wir Martingaltransformierte definieren. Seien $X^1,\ldots,X^d$ stetige quadratintegrierbare Martingal mit stetigen $\langle X^k, X^l\rangle,\ k,l = 1,\ldots,d$. Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^{d+1})$ mit

$$\mathbf{E}\left[\sum_{k,l=1}^d \int_0^T \partial_k F(X_s,s)\cdot \partial_l F(X_s,s)\, d\langle X^k, X^l\rangle_s\right] < \infty.$$

Wir setzen $f(x,t) = f(x^1,\ldots,x^d,t) = \nabla_x F(x,t) := (\partial_1,\ldots,\partial_d)F(x,t)$.

Satz 5.42 *Unter den angegebenen Bedingungen ist*

$$M_t^f := \int_0^t f(X_s,s)\, dX_s$$

ein stetiges quadratintegrierbares Martingal mit

$$\langle M^f\rangle_t = \sum_{k,l=1}^d \int_0^t \partial_k F(X_s,s)\cdot \partial_l F(X_s,s)\, d\langle X^k, X^l\rangle_s.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} M_t^f \;=\; & F(X_t,t) - F(X_0,0) - \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{k,l=1}^d \partial_k\partial_l F(X_s,s)\, d\langle X^k, X^l\rangle_s \\ & - \int_0^t \partial_s F(X_s,s)\, ds. \end{aligned}$$

Korollar 5.43 *Sind $B^1,\ldots,B^d$ unabhängige Brown'sche Bewegungen und $B = (B^1,\ldots,B^d)$, so ist*

$$F(B_t,t) - F(B_0,0) \;=\; \int_0^t \nabla_x F(B_s,s)\, dB_s \;+\; \int_0^t \left(\frac{1}{2}\Delta_x F + \partial_s F\right)(B_s,s)\, ds.$$

(Hier ist: $\Delta_x = \partial_1^2 + \ldots + \partial_d^2$.)

Beispiel 5.44 Ist $F(x,t) = \exp(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$, so ist

$$\frac{1}{2}\partial_x^2 F + \partial_t F \equiv 0.$$

Also ist

$$M_t := \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

ein quadratintegrierbares Martingal mit

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t (\partial_x F(B_s,s))^2\,ds = \sigma^2\int_0^t M_s^2\,ds.$$

Beispiel 5.45 Sei B eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung. Ferner sei $R > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$ mit $r = \|x\| < R$. Wir interessieren uns für die Stoppzeit

$$\tau_R := \inf\{t : \|B_t + x\| \geq R\}.$$

Wie groß ist $\mathbf{E}[\tau_R]$? Nach der Itô-Formel ist

$$\|B_t + x\|^2 - d\cdot t = 2\int_0^t (B_s + x)\,dB_s$$

ein Martingal. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist $\tau_r \wedge N$ eine beschränkte Stoppzeit. Daher liefert das Optional Stopping Theorem, dass

$$\mathbf{E}[\|B_{\tau_R\wedge N} + x\|^2 - \tau_R \wedge N] = \mathbf{E}[\|B_0 + x\|^2] = r^2.$$

Also ist

$$\mathbf{E}[\tau_R] = \lim_{N\to\infty}\mathbf{E}[\tau_R \wedge N] - r^2 = \lim_{N\to\infty}\mathbf{E}[\|B_{\tau_R\wedge N} + x\|^2 - r^2 = R^2 - r^2.$$

Beispiel 5.46 Sei B eine Brown'sche Bewegung, $b > 0$ und

$$\tau_b = \tau_{[b,\infty)} = \inf\left\{t \geq 0 :\ B_t \geq b\right\}$$

die $\mathbb{F}$–Stoppzeit des ersten Passierens von b. Es gilt $\tau_b < \infty$ fast sicher.
Für jedes $\lambda \geq 0$ ist nach Beispiel 5.44 (mit $\sigma = \sqrt{2\lambda}$)

$$M_t^\lambda := \exp\left(\sqrt{2\lambda}\,B_t - \lambda t\right), \qquad t \geq 0,$$

ein $\mathbb{F}$–Martingal. Daher ist nach dem Optional Stopping Theorem für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}[M_{\tau_b\wedge n}^\lambda] = \mathbf{E}[M_0^\lambda] = 1.$$

Klar ist $B_{\tau_b\wedge n} \leq b$, also $0 \leq M_{\tau_b\wedge n}^\lambda \leq e^{\sqrt{2\lambda}\,b}$. Wegen $\tau_b \wedge n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau_b$ folgt

$$M_{\tau_b\wedge n}^\lambda \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M_{\tau_b}^\lambda = \exp\left(\sqrt{2\lambda}\,b - \lambda\tau_b\right) \qquad \text{fast sicher.}$$

Also auch

$$1 = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[M_{\tau_b\wedge n}^\lambda] = \mathbf{E}[M_{\tau_b}^\lambda] = e^{\sqrt{2\lambda}\,b}\,\mathbf{E}[e^{-\lambda\tau_b}].$$

Wir erhalten

$$\mathbf{E}[e^{-\lambda\tau_b}] = e^{\sqrt{2\lambda}\,b}, \qquad \lambda \geq 0. \tag{5.17}$$

Daraus kann man ableiten (hier ohne Beweis)

$$\mathbf{P}[\tau_b \in dt] = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{b^2}{2t}\right)\,dt, \qquad t > 0. \tag{5.18}$$

5.6 Lokalzeit und Tanaka-Formel

Dieser Abschnitt kommt ohne Beweis und ist nur als Ausblick gedacht.

Sei B eine Brown'sche Bewegung.

Definition 5.47 *Ein stochastisches Feld* $(L_t^a,\, t \geq 0,\, a \in \mathbb{R})$ *heißt* ***Lokalzeit*** *von* B, *falls*

- $(t,a) \mapsto L_t^a$ *ist stetig (fast sicher)*
- *Für* $b < c$ *ist fast sicher*
$$\int_b^c L_t^a \, da = \int_0^t \mathbb{1}_{[b,c]}(B_s)\, ds.$$

Satz 5.48 *Die Lokalzeit der Brown'schen Bewegung existiert.*

Wir sagen, dass B in (a,t) eine **Aufkreuzung** der Höhe h hat, falls

- $B_t = a$
- $\exists s > t:\; B_s = a + h,\; B_r \geq a \;\; \forall\, r \in [t,s].$

Wir schreiben
$$N_t^{a,h} = \#\big\{s \leq t :\; B \text{ hat Aufkreuzung der Höhe } h \text{ in } (a,s)\big\}$$

Satz 5.49 (Lévy) *Für alle* $a \in \mathbb{R}$ *und* $t \geq 0$ *gilt*

$$L_t^a = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[a-\varepsilon, a+\varepsilon]}(B_s)\, ds \tag{5.19}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[a, a+\varepsilon]}(B_s)\, ds \tag{5.20}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{4}{\varepsilon} N_t^{a-\varepsilon, 2\varepsilon} \tag{5.21}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{\varepsilon} N_t^{a,\varepsilon} \tag{5.22}$$

Wir können jetzt die Itô-Formel verallgemeinern auf konvexe (statt C^2) Funktionen. Wir geben das hier nur für die Betragsfunktion an.

Satz 5.50 (Tanaka Formel) *Für* $a \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$|B_t - a| = |a| + \int_0^t \operatorname{sign}(B_s - a)\, dB_s + L_t^a, \tag{5.23}$$
$$(B_t - a)^+ = a^- + \int_0^t \mathbb{1}_{[a,\infty)}(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} L_t^a. \tag{5.24}$$

Beweis (5.24) folgt aus (5.23) wegen

$$(B_t - a)^+ = \frac{1}{2}\big((B_t - a) + |B_t - a|\big)$$

und

$$\mathbb{1}_{[a,\infty)}(B_s) \;=\; \frac{1}{2}\big(1+\operatorname{sign}(B_s-a)\big)$$

mit der trivialen Formel

$$B_t - a \;=\; -a + \int_0^t dB_s.$$

Für (5.23) approximieren wir $f : x \mapsto |x-a|$ durch

$$f_\varepsilon : x \mapsto \begin{cases} x-a, & \text{falls } x-a \geq \varepsilon, \\ a-x, & \text{falls } x-a \leq -\varepsilon \\ \big((x-a)^2+\varepsilon^2\big)/(2\varepsilon), & \text{falls } |x-a| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Dann gilt $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \to 0,\ \varepsilon \to 0$, also $f_\varepsilon(B_t) \to |B_t - a|,\ \varepsilon \to 0$. Nun ist aber $f'(x) = \operatorname{sign}(x-a)$, $x \neq a$, und $\|f'_\varepsilon - f'\|_{\mathcal{H}^2} \to 0,\ \varepsilon \to 0$, weil $\sup_{\varepsilon>0} \|f''_\varepsilon\|_\infty = 1$ und $f'_\varepsilon(x) \to \operatorname{sign}(x-a),\ \varepsilon \to 0,\ x \neq a$. Da das Itô-Integral über die Isometrie definiert ist, gilt

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^t f_\varepsilon(B_s)\,dB_s - \int_0^t \operatorname{sign}(B_s-a)\,dB_s\right)^2\right] \;\to\; 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Entlang einer geeigneten Teilfolge $\varepsilon_n \downarrow 0$ gilt dann auch fast sichere Konvergenz und wir erhalten

$$\begin{aligned} |B_t - a| \;&=\; \lim_{n\to\infty} f_{\varepsilon_n}(B_t) \\ &=\; \lim_{n\to\infty}\left[f_{\varepsilon_n}(0) + \int_0^t f'_{\varepsilon_n}(B_s)\,dB_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t f''_{\varepsilon_n}(B_s)\,ds\right] \\ &=\; |a| + \int_0^t \operatorname{sign}(B_s-a)\,dB_s \;+\; \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\varepsilon_n}\int_0^t \mathbb{1}_{(a-\varepsilon_n,a+\varepsilon_n)}(B_s)\,ds \\ &=\; |a| + \int_0^t \operatorname{sign}(B_s-a)\,dB_s + L_t^a. \end{aligned}$$

□

5.7 Lokale Martingale

Sei $\mathbb{T} = [0,T]$, falls $T < \infty$, und $\mathbb{T} = [0,\infty)$, falls $T = \infty$.

Definition 5.51 (Lokales Martingal) *Ein adaptierter RCLL Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt **lokales Martingal**, falls es Stoppzeiten gibt $\tau_N \uparrow T,\ N \to \infty$, fast sicher, und*

$$X^{\tau_N} = (X_{\tau_N \wedge t})_{t\in\mathbb{T}}$$

*ist ein Martingal für jedes $N \in \mathbb{N}$. Eine solche Folge (τ^N) heißt **lokalisierende Folge** für X. Der Raum der (stetigen) lokalen Martingale mit stetiger quadratischer Variation wird mit $\mathcal{M}_{loc}$ ($\mathcal{M}_{loc,c}$) bezeichnet.*

Beispiel 5.52 (i) Jedes RCLL Martingal ist ein lokales Martingal nach dem Optional Sampling Theorem.

(ii) Ist X ein lokales Martingal und τ eine Stoppzeit, so ist auch X^τ ein lokales Martingal. Ist zudem $\mathbf{E}[|X_\tau|] < \infty$, so ist X^τ sogar ein Martingal.

Beispiel 5.53 Sei X ein stetiges lokales Martingal und

$$\sigma_n := \inf\{t \in \mathbb{T} : |X_t| \geq n\}.$$

Dann ist für jedes n X^{σ_n} ein beschränktes stetiges Martingal, denn

$$X^{\sigma_n \wedge \tau_N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} X^{\sigma_n} \qquad \text{fast sicher}$$

und wegen $|X_s^{\sigma_n \wedge \tau_N}| \leq n$ für alle s, N konvergieren auch alle bedingten Erwartungen.

Beispiel 5.54 Ist X ein stetiges Martingal mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$, so ist $X^2 - \langle X \rangle$ ein lokales Martingal, aber im Allgemeinen kein Martingal.

Beispiel 5.55 Ist $X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ und $\tau_N := \inf\{t \geq 0 : \langle X \rangle_t \geq N\}$, dann ist X^{τ_N} ein quadratintegrierbares Martingal, denn

$$\mathbf{E}\big[(X_t^{\tau_N})^2\big] \;=\; \mathbf{E}\big[X^2_{\tau_N \wedge t}\big] \;=\; \mathbf{E}[\langle X \rangle_{\tau_N \wedge t}] \;\leq\; N.$$

Beispiel 5.56 Sei $\lambda > 0$ und B eine Brown'sche Bewegung. Dann ist

$$M_t \;:=\; \exp(\lambda B_t^2) \;-\; \int_0^t \big(\lambda + 2\lambda^2 B_s^2\big) \exp(\lambda B_s^2)\, ds$$

ein lokales Martingal, aber kein Martingal. Nach der (pfadweisen) Itô-Formel ist nämlich

$$M_t \;=\; 1 + \int_0^t 2\lambda B_s \exp(\lambda B_s^2)\, dB_s.$$

Mithin ist für $\tau_N \;:=\; \inf\{t : |B_t| \geq N\}$

$$M_t^{\tau_N} \;=\; 1 + \int_0^{\tau_N \wedge t} 2\lambda B_s\, \exp(\lambda B_s^2)\, dB_s.$$

Klar ist dann der Integrand beschränkt, also M^{τ_N} ein Martingal. Andererseits ist

$$\mathbf{E}\big[e^{\lambda B_t^2}\big] \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x^2} e^{-x^2/2t}\, dx \;=\; \infty,$$

falls $2t\lambda > 1$. Also ist M kein Martingal.

Lemma 5.57 *Ist $X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ sowie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist das Itô-Integral*

$$M_t^f \;=\; \int_0^t f(X_s, s)\, dX_s$$

in $\mathcal{M}_{loc,c}$ mit $\langle M^f \rangle_t = \int_0^t f^2(X_s, s)\, d\langle X \rangle_s$.

Beweis Für jede Stoppzeit τ gilt

$$(M^f)_t^\tau \;=\; M^f_{\tau \wedge t} \;=\; \int_0^t f(X_s^\tau, s)\, dX_s^\tau.$$

Speziell für $\sigma_n = \inf\{t : |X_t| \geq n\}$ ist X^{σ_n} quadratintegrierbar und $\sup_{x \in [-n,n],\, s \in [0,t]} |f(x,s)| < \infty$. Also ist nach Satz 5.27 $(M^f)^{\sigma_n}$ ein stetiges Martingal, also $M^f \in \mathcal{M}_{loc,c}$.

Die Formel für die quadratische Variation gilt zunächst für $(M^f)^{\sigma_n}$ und dann als monotoner Limes auch für M^f. $\square$

Bemerkung 5.58 Sei

$$\widehat{\mathcal{H}} = \Big\{ H \text{ ist adaptiert und RCLL mit } \int_0^T H_s(\omega)^2 \, d\langle X\rangle_s < \infty, \text{ f.s.} \Big\}.$$

In Bemerkung 5.31 hatten wir das Itô-Integral $(H.X)$ definiert, in dem Fall, wo X ein quadratintegrierbar Martingal ist und $\mathbf{E}[\int_0^T H_s^2 \, d\langle X\rangle_s] < \infty$. Durch Lokalisieren mit $\sigma_n = \inf\{t : |X_t| + \int_0^t H_s^2 \, d\langle X\rangle_s \geq n\}$ erhalten wir sogar: Ist $X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ und $H \in \widehat{H}$, so ist das Itô-Integral $(H.X)_t = \int_0^t H_s \, dX_s$ wohldefiniert und in $\mathcal{M}_{loc,c}$ mit $\langle H.X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle X\rangle_s$.

Wir kommen jetzt zu einer Charakterisierung der Brown'schen Bewegung als lokales Martingal mit einer gewissen quadratischen Variation.

Satz 5.59 (Lévy'sche Charakterisierung der Brown'schen Bewegung) *Sei $X \in \mathcal{M}_{loc,c}$ mit $X_0 = 0$. Dann sind äquivalent*

(i) $(X_t^2 - t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein lokales Martingal,*

(ii) $\langle X\rangle_t = t$ *für alle* t,

(iii) X *ist eine Brown'sche Bewegung.*

Beweis (iii) $\Longrightarrow$ (i) ist klar.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Nach der Produktregel (Korollar 5.37) ist

$$X_t^2 - \langle X\rangle_t = 2\int_0^t X_s \, dX_s$$

ein lokales Martingal. Nach der Voraussetzung (i) ist dann auch $(\langle X\rangle_t - t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein lokales Martingal. Ist (τ_n) eine lokalisierende Folge, so ist $(\langle X\rangle_t - t)_{\tau_n\wedge t}$ ein stetiges Martingal von beschränkter Variation. Nach Korollar 5.29 ist $(\langle X\rangle_t - t)_{\tau_n\wedge t} \equiv 0$, also nach Grenzübergang $n \to \infty$ auch $\langle X\rangle_t = t$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Für eine Zufallsvariable Y auf $\mathbb{R}$ ist äquivalent (mit $i = \sqrt{-1}$)

$$\mathbf{E}[e^{i\lambda Y}] = e^{-(\sigma^2/2)\lambda^2}, \ \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y \sim \mathcal{N}_{0,\sigma^2}.$$

Es reicht daher zu zeigen, dass für $A \in \mathcal{F}_s$ (wobei $\mathbb{F} = \sigma(X)$ die erzeugte Filtration ist)

$$\varphi_{A,\lambda}(t) := \mathbf{E}[e^{i\lambda(X_t - X_s)} \, \mathbb{1}_A] = \mathbf{P}[A] \, e^{-\lambda^2(t-s)/2}.$$

Anwenden der Itô-Formel auf Real- und Imaginärteil ergibt (wobei nach Voraussetzung $d\langle X^{\sigma_n}\rangle_r = d(r \wedge \sigma_n)$)

$$e^{i\lambda X_t^{\sigma_n}} - e^{i\lambda X_s^{\sigma_n}} = \int_s^t i\lambda e^{i\lambda X_r^{\sigma_n}} \, dX_r^{\sigma_n} + \frac{1}{2}\int_{s\wedge\sigma_n}^{t\wedge\sigma_n} \big(-\lambda^2 e^{i\lambda X_r}\big) \, dr.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\big[e^{i\lambda(X_t^{\sigma_n} - X_s^{\sigma_n})} \big| \mathcal{F}_s\big] - 1 \\ &\quad = \mathbf{E}\left[\int_s^t i\lambda e^{i\lambda(X_r^{\sigma_n} - X_s^{\sigma_n})} \, dX_r^{\sigma_n} \Big| \mathcal{F}_s\right] - \frac{1}{2}\lambda^2 \mathbf{E}\left[\int_{s\wedge\sigma_n}^{t\wedge\sigma_n} e^{i\lambda(X_r - X_s)} \, dr \Big| \mathcal{F}_s\right]. \end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet, da das Integral ein Martingal ist. Im zweiten Summanden ist der Integrand beschränkt und konvergiert fast sicher. Es folgt

$$\mathbf{E}[e^{i\lambda(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s] - 1 \;=\; -\frac{1}{2}\lambda^2 \mathbf{E}\left[\int_s^t e^{i\lambda(X_r - X_s)}\,dr|\mathcal{F}_s\right].$$

Ist $A \in \mathcal{F}_s$, so liefert der Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\varphi_{A,\lambda}(t) - \varphi_{A,\lambda}(s) &= \mathbf{E}\big[e^{i\lambda(X_t - X_s)}\,\mathbb{1}_A\big] - \mathbf{P}[A] \\ &= -\frac{1}{2}\lambda^2 \int_s^t \mathbf{E}\big[e^{i\lambda(X_r - X_s)}\,\mathbb{1}_A\big]\,dr \\ &= -\frac{1}{2}\lambda^2 \int_s^t \varphi_{A,\lambda}(r)\,dr.\end{aligned}$$

Das heißt $\varphi_{A,\lambda}$ ist die Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\varphi_{A,\lambda}(s) &= \mathbf{P}[A] \\ \frac{d}{dt}\varphi_{A,\lambda}(t) &= -\frac{1}{2}\lambda^2 \varphi_{A,\lambda}(t).\end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist $\varphi_{A,\lambda}(t) = \mathbf{P}[A]\,e^{-\lambda^2(t-s)/2}$. □

Korollar 5.60 *Ein Prozess $X = (X^1, \ldots, X^d)$ ist genau dann eine d–dimensionale Brown'sche Bewegung (d.h. $X^1, \ldots, X^d$ sind unabhängige Brown'sche Bewegungen), wenn*

(i) $X^1, \ldots, X^d \in \mathcal{M}_{loc,c}$

(ii) $\langle X^i, X^j\rangle_t = \mathbb{1}_{\{i=j\}} t$.

Beweis „$\Longrightarrow$" ist klar nach Beispiel 5.35.
„$\Longleftarrow$" Nach dem vorangehenden Satz ist jedes X^i eine Brown'sche Bewegung. Wir müssen zeigen, dass $X^{,} \ldots, X^d$ unabhängig sind. Nun ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$

$$Y := \frac{1}{\|\lambda\|_2} \sum_{i=1}^d \lambda_i X^i$$

ein lokales Martingal mit quadratischer Variation

$$\langle Y\rangle_t \;=\; \frac{1}{\|\lambda\|_2^2} \sum_{i,j} \lambda_i^2 \langle X^i, X^j\rangle_t \;=\; \frac{1}{\|\lambda\|_2^2} \sum_i \lambda_i^2 t \;=\; t.$$

Also ist Y eine Brown'sche Bewegung. Speziell ist aber damit für alle $t > s$ der Vektor $X_t - X_s$ eine Gauß–Verteilung auf $\mathbb{R}^d$ mit Kovarianzmatrix $(t-s)I$, wo I die Einheitsmatrix ist. Unkorrelierte Gauß–Zufallsvariablen sind aber unabhängig. □

5.8 Der Itô'sche Martingaldarstellungssatz

Der Itô'sche Darstellungssatz wird uns später die Vollständigkeit von Märkten liefern.

Sei B eine Brown'sche Bewegung und $\mathbb{F} = \sigma(B)$ die erzeugte Filtration.

Satz 5.61 (Darstellungssatz) *Ist M ein quadratintegrierbares $\mathbb{F}$–Martingal, dann ist*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$$

für einen messbaren adaptierten Prozess H mit $\int_0^t \mathbf{E}[H_s^2] \, ds < \infty$ für alle $t \geq 0$.

Speziell ist jedes lokale $\mathbb{F}$–Martingal stetig.

Beweis Wir skizzieren hier nur den Beweis. Der Ablauf ist ähnlich wie der Beweis von Satz 3.25. O.E. sei $M_0 = 0$.

1. Schritt Sei

$$L = \left\{ H.B : \int_0^t \mathbf{E}[H_s^2] \, ds < \infty \quad \text{für alle } \ t \geq 0 \right\}.$$

Durch orthogonale Projektion auf L zerlegt man M in ein stochastisches Integral und einen senkrechten Anteil

$$M = H.B + N \qquad \text{(Kunita–Watanabe Zerlegung)}$$

wobei $N \in L^{\perp}$, d.h. $\mathbf{E}[N_t(\widetilde{H}.B)_t] = 0 \qquad$ für alle $t, \widetilde{H}$.

2. Schritt Durch Lokalisieren erreicht man $\|N\|_\infty < \infty$.

3. Schritt Für $0 < \varepsilon < \frac{1}{\|N\|_\infty}$ definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ durch

$$Q[A] = \mathbf{E}^P[(1 + \varepsilon N_t)\mathbb{1}_A], \qquad A \in \mathcal{F}_t.$$

Nach Konstruktion ist $Q\big|_{\mathcal{F}_t} \approx \mathbf{P}\big|_{\mathcal{F}_t} \qquad$ für alle t.

4. Schritt Zeige: B ist ein $(Q, \mathbb{F})$–Martingal: Für $t > s$, $A \in \mathcal{F}_s$ und $H_r := \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{[s,\infty)}(r)$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^Q[(B_t - B_s)\mathbb{1}_A] &= \mathbf{E}^Q[(H.B)_t] \\ &= \mathbf{E}[(1 + \varepsilon N_t)(H.B)_t] \\ &= \mathbf{E}[(H.B)_t] + \varepsilon \, \mathbf{E}[N_t \, (H.B)_t] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{E}^Q[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] = 0$ und damit B ein $(Q, \mathbb{F})$–Martingal.

5. Schritt Wegen $\langle B \rangle_t = t$ Q–fast sicher ist dann B eine Brown'sche Bewegung unter Q (Lévy Charakterisierung).
Also stimmen die endlich-dimensionale Randverteilungen von Q und P überein. Damit ist $P = Q$ und $N = 0$. □

5.9 Stochastische Differentialgleichungen

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $M(m,n)$ der Vektorraum der $m \times n$ Matrizen mit Norm

$$\|A\| \;=\; \sqrt{\mathrm{Sp}(AA^T)} \;=\; \sqrt{\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n A_{k,l}^2}.$$

Es seien zwei messbare Abbildungen

$$\sigma : \mathbb{R}^m \times [0,T] \to M(m,n)$$

und

$$b := \mathbb{R}^m \times [0,T] \to \mathbb{R}^m$$

gegeben, sowie unabhängige Brown'sche Bewegungen $B^1, \dots, B^n$. Wir schreiben $B = (B^1, \dots, B^n)$ und nehmen an, dass $\mathbb{F} = \sigma(B)$ die erzeugte Filtration ist.

Definition 5.62 *Ein adaptierter stetiger Prozess X mit Werten in $\mathbb{R}^m$ heißt (starke) Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t \;=\; b(X_t,t)\,dt \;+\; \sigma(X_t,t)\,dB_t \tag{5.25}$$

mit Anfangswert $X_0 = x$, falls für alle $t \in \mathbb{T}$

$$X_t \;=\; x + \int_0^t b(X_s,s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s,s)\,dB_s, \tag{5.26}$$

*wobei wir annehmen, dass die Integrale existieren. X heißt auch **Diffusionsprozess** mit **Drift** b und **Diffusionskoeffizient** σ.*

Ziel dieses Abschnittes ist es, unter gewissen Regularitätsannahmen an b und σ Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu zeigen. Schon aus der Theorie der klassischen (deterministischen) DGLen ist bekannt, dass die Existenz von Lösungen schwächere Bedingungen erfordert als die Eindeutigkeit, die im Allgemeinen Lipschitz-Bedingungen benötigt. Wir werden hier nur unter der starken Annahme der Lipschitzstetigkeit von b und σ nachweisen, dass es eine eindeutige starke Lösung von (5.25) gibt.

Als Hilfsmittel brauchen wir ein Lemma.

Lemma 5.63 (Gronwall) *Seien $f, g : [0,T] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $C > 0$ so, dass*

$$f(x) \;\le\; g(x) + C\int_0^x f(t)\,dt, \qquad x \in [0,T]. \tag{5.27}$$

Dann ist

$$f(x) \;\le\; g(x) \;+\; C\int_0^x e^{C(x-t)} g(t)\,dt, \qquad x \in [0,T].$$

Ist speziell $g(t) \equiv G$ konstant, so ist

$$f(x) \;\le\; Ge^{Cx}.$$

Beweis Seien

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{und} \quad h(x) = F(x)e^{-Cx}.$$

Dann ist

$$\frac{d}{dx}h(x) \;=\; f(x)e^{-Cx} \;-\; CF(x)e^{-Cx} \overset{(5.27)}{\le} g(x)e^{-Cx}.$$

Integration liefert

$$F(x) \;=\; e^{Cx}h(x) \;\le\; \int_0^x e^{C(x-t)} g(t)\,dt.$$

Einsetzen in (5.27) liefert

$$f(x) \;\le\; g(x) + CF(x) \;\le\; g(x) \;+\; C\int_0^x g(t)\,e^{C(x-t)}\,dt.$$

□

Satz 5.64 *Seien b und σ Lipschitz-stetig in der ersten Koordinate. Das heißt, es existiere eine Konstante $K > 0$ mit*

$$\|\sigma(x,t) - \sigma(x',t)\| + \|b(x,t) - b(x',t)\| \le K\|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{T}. \tag{5.28}$$

Ferner gelte die Wachstumsbedingung

$$\|\sigma(x,t)\|^2 + \|b(x,t)\|^2 \le K^2(1 + \|x\|^2), \qquad x \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{T}. \tag{5.29}$$

Dann existiert für jeden Anfangswert $x \in \mathbb{R}^m$ eine starke Lösung X der SDGL (5.26). *Diese Lösung ist eindeutig.*

Beweis Ohne Einschränkung sei $T < \infty$.
Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit der Lösung. Seien X, X' Lösungen von (5.26). Dann ist

$$X_t - X'_t \ = \ \int_0^t (b(X_s, s) - b(X'_s, s))\, ds \ + \ \int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s))\, dB_s.$$

Daher ist

$$\|X_t - X'_t\|^2 \ \le \ 2\left\|\int_0^t (b(X_s, s) - b(X'_s, s))\, ds\right\|^2 + 2\left\|\int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s))\, dB_s\right\|^2.$$

Wegen $\langle B^i, B^j\rangle \equiv 0,\ i \ne j$, erhalten wir in Erwartung

$$\mathbf{E}\left[\left\|\int_0^t (\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s))\, dB_s\right\|^2\right] \ = \ \int_0^t \mathbf{E}\big[\|\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s)\|^2\big]\, ds.$$

Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung für den ersten Summanden erhalten wir so

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\|X_t - X'_t\|^2] \ \le \ & 2t\int_0^t \mathbf{E}\big[\|b(X_s, s) - b(X'_s, s)\|^2\big]\, ds \\ & + 2\int_0^t \mathbf{E}\big[\|\sigma(X_s, s) - \sigma(X'_s, s)\|^2\big]\, ds.\end{aligned}$$

Schreiben wir $f(t) = \mathbf{E}[\|X_t - X'_t\|^2]$ und $C := 2(T+1)K^2$, so erhalten wir

$$f(t) \ \le \ C\int_0^t f(s) ds.$$

Gronwalls Lemma (mit $g \equiv 0$) liefert daher $f \equiv 0$.

Existenz
Wir wenden eine Variante des klassischen Picard'schen Iterationsverfahrens an. Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ definieren wir iterativ einen Prozess X^N durch

$$X^0_t \equiv x$$

und

$$X^N_t := x + \int_0^t b\big(X^{N-1}_s, s\big)\, ds + \int_0^t \sigma\big(X^{N-1}_s, s\big)\, dB_s \tag{5.30}$$

Wegen der Wachstumsbedingung (5.29) kann man sukzessive zeigen:

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathbf{E}[\|X_t^N\|^2]\,dt \;&\le\; 2(T+1)K^2\left(T+\int_0^T \mathbf{E}[\|X_t^{N-1}\|^2]\,dt\right)\\ &\le\; \big(2T(T+1)K^2\big)^N\big(1+\|x\|^2\big) \;<\; \infty \quad \text{für } N\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Also ist in jedem Schritt das Itô-Integral wohldefiniert.

Wir betrachten nun die Differenzen

$$X_t^{N+1}-X_t^N \;=\; \underbrace{\int_0^t \big(\sigma(X_s^N,s)-\sigma(X_s^{N-1},s)\big)\,dB_s}_{=:I_t} + \underbrace{\int_0^t \big(b(X_s^N,s)-b(X_s^{N-1},s)\big)\,ds}_{=:J_t}.$$

Wir benutzen die Doob'sche L^2–Ungleichung für das nichtnegative Submartingal $(\|I_t\|^2)_{t\in\mathbb{T}}$ (siehe Satz 2.43) und die Isometrie und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}\|I_s\|^2\right] \;&\le\; 4\,\mathbf{E}[\|I_t\|^2]\\ &=\; 4\,\mathbf{E}\left[\int_0^t \big\|\sigma(X_s^N,s)-\sigma(X_s^{N-1},s)\big\|^2\,ds\right]\\ &\le\; 4\,K^2\int_0^t \mathbf{E}\left[\|X_s^N-X_s^{N-1}\|^2\right]\,ds\end{aligned} \tag{5.31}$$

Für den zweiten Term bekommen wir mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\|J_t\|^2 \;\le\; t\int_0^t \big\|b(X_s^N,s)-b(X_s^{N-1},s)\big\|^2\,ds.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}\|J_s\|^2\right] \;&\le\; t\,\mathbf{E}\left[\int_0^t \big\|b(X_s^N,s)-b(X_s^{N-1},s)\big\|^2\,ds\right]\\ &\le t\,K^2\int_0^t \mathbf{E}\big[\|X_s^N-X_s^{N-1}\|^2\big]\,ds.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Setzen wir

$$\Delta^N(t) \;:=\; \mathbf{E}\left[\sup_{s\le t}\|X_s^N-X_s^{N-1}\|^2\right],$$

so erhalten wir mit $C \;:=\; 2K^2(4+T)\,\vee\,2(T+1)K^2(1+\|x\|^2)$

$$\Delta^{N+1}(t) \;\le\; C\int_0^t \Delta^N(s)\,ds \quad \text{für } N\ge 1$$

und

$$\begin{aligned}\Delta^1(t) \;&\le\; 2t\int_0^t \|b(x,s)\|^2\,ds \;+\; 2\int_0^t \|\sigma(x,s)\|^2\,ds\\ &\le\; 2(T+1)\,K^2(1+\|x\|^2)\cdot t\\ &\le\; C\,t.\end{aligned}$$

nach der Wachstumsvoraussetzung (5.29). Per Induktion zeigt man dann

$$\Delta^N(t) \;\le\; \frac{(Ct)^N}{N!}.$$

Es folgt mit der Markov-Ungleichung

$$\sum_{N=1}^{\infty} \mathbf{P}\left[\sup_{s\le t} \|X_s^N - X_s^{N-1}\|^2 > 2^{-N}\right] \le \sum_{N=1}^{\infty} 2^N \Delta^N(t)$$
$$\le \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(2Ct)^N}{N!} \le e^{2Ct} < \infty.$$

Nach dem Borel-Cantelli Lemma ist

$$\mathbf{P}\left[\sup_{s\le t} \|X_s^N - X_s^{N-1}\|^2 > 2^{-N} \text{ für nur endlich viele } N\right] = 1.$$

Mithin ist fast sicher $(X^N)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in dem Banachraum $(C([0,T]), \|\cdot\|_\infty)$. Also konvergiert X^N fast sicher gleichmäßig gegen ein X. Gleichmäßige Konvergenz impliziert Konvergenz der Integrale, also ist X eine starke Lösung von (5.26). □

Beispiel 5.65 (Ornstein–Uhlenbeck Prozess)
Seien $m = n = 1$ und $C, \sigma > 0$ sowie

$$dX_t = -CX_t\,dt + \sigma\,dB_t, \qquad X_0 = x.$$

Dann existiert eine eindeutige starke Lösung. In diesem Fall kann man sie sogar ausrechnen

$$X_t = e^{-Ct}x + \int_0^t e^{C(s-t)}\sigma\,dB_s.$$

Denn:

$$\begin{aligned} dX_t &= -Ce^{-Ct}x dt - \left(C\int_0^t e^{C(s-t)}\sigma\,dB_s\right) dt + \sigma\,dB_t \\ &= -CX_t\,dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

X heißt **Ornstein–Uhlenbeck Prozess**.

Beispiel 5.66 $\sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$

$$dX_t = \sigma X_t\,dB_t + \mu X_t\,dt, \qquad X_0 = 1.$$

Nach dem Satz existiert eine eindeutige starke Lösung. Man kann sie sogar explizit ausrechnen:

$$X_t = \exp\big(\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t\big).$$

Denn nach der Itô-Formel ist

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma X_t\,dB_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= \sigma X_t\,dB_t + \mu\,dt. \end{aligned}$$

X heißt **geometrische Brown'sche Bewegung**.

Satz 5.67 (Markoveigenschaft der Lösungen) *Seien σ, b und X wie in Satz 5.64. Dann ist X ein Markovprozess.*

Beweis Sei $\mathbb{F}^X = \sigma(X)$ die von X erzeugte Filtration. Für $s > 0$ und $y \in \mathbb{R}^m$ bezeichne $X^{y,s} = (X_t^{y,s})_{t \geq s}$ die starke Lösung des AWP

$$X_s^{y,s} = y, \qquad dX_t^{y,s} \;=\; b(X_t^{y,s}, t)\, dt \;+\; \sigma(X_t^{y,s}, t)\, dB_t.$$

Klar ist dann $X = X^{x,0}$ und $X_t = X_t^{X_s,s}$ für $t > s$. Insbesondere ist für $f \in C_b(\mathbb{R}^m)$ und $t > s$

$$\mathbf{E}\big[f(X_t)\,|\,\mathcal{F}_s^X\big] \;=\; \mathbf{E}\big[f(X_t^{X_s,s})\,|\,\mathcal{F}_s^X\big] \;=\; \mathbf{E}\big[f(X_t^{X_s,s})\,|\,X_s\big].$$

Also hat X die Markoveigenschaft. □

5.10 Die Girsanov Transformation

Für die Finanzmathematik ist es wichtig, ein zum ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\widetilde{\mathbf{P}} \approx \mathbf{P}$ zu finden, sodass die Preisprozesse Martingale sind. Bei den diskreten Modellen konnte man dieses Maß elementar herstellen. Für die kontinuierlichen Modelle braucht man dazu die so genannte **Girsanov Transformation**.

Mittelfristiges Ziel: $\widetilde{B}_t := B_t - \mu t$ durch Maßwechsel zu einer Brown'schen Bewegung bezüglich $\widetilde{\mathbf{P}}$ zu machen.

Zunächst wollen wir die Grundidee an einem elementaren Beispiel erläutern.

Beispiel 5.68 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $\mathcal{N}_{0,1}$–verteilt auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Schreibe: $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Sei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir setzen $\widetilde{X}_i := X_i - \mu_i$.

Wir definieren eine Zufallsvariable Z durch

$$Z = \exp\left(\langle \mu, X\rangle - \frac{1}{2}\|\mu\|^2\right).$$

Dann ist $Z > 0$ und

$$\mathbf{E}[Z] \;=\; \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\big[e^{\mu_i X_i - \mu_i^2/2}\big] \;=\; 1.$$

Wir definieren ein neues W-Maß $\widetilde{\mathbf{P}}$ durch

$$\widetilde{\mathbf{P}}[A] \;=\; \mathbf{E}[Z\,\mathbb{1}_A] \quad \text{ für } A \in \mathcal{F}.$$

Mit anderen Worten, es ist $\widetilde{\mathbf{P}} \approx \mathbf{P}$ mit Dichte

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = Z.$$

Dann ist also

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{P}}[\widetilde{X} \in dx] \;&=\; \exp\left(\langle \mu, x+\mu\rangle - \frac{1}{2}\|\mu\|^2\right)(2\pi)^{-n/2}\exp\left(-\frac{\|x+\mu\|^2}{2}\right)\,dx \\
&=\; (2\pi)^{-n/2}\exp\left(\langle x, \mu\rangle + \frac{1}{2}\|\mu\|^2\right)\exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2} - \langle \mu, x\rangle - \frac{\|\mu\|^2}{2}\right)\,dx \\
&=\; \mathbf{P}[X \in dx].
\end{aligned}$$

Das heißt: unter $\widetilde{\mathbf{P}}$ sind $(\widetilde{X}_1, \ldots, \widetilde{X}_n)$ unabhängig und $\mathcal{N}_{0,1}$–verteilt.

Diffusionen

Sei $T < \infty$ fest. Sei $B = (B_t^1, \ldots, B_t^d)_{t\in[0,T]}$ eine d–dimensionale Brown'sche Bewegung und $\mathbb{F} = \sigma(B)$ die erzeugte Filtration und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. Seien $(\theta_t^i)_{t\in[0,T]}$, $i = 1, \ldots, d$, $\mathbb{F}$–adaptierte RCLL Prozesse (i.A. reicht: adaptiert und $(\omega, t) \mapsto \theta_t^i(\omega)$ ist $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$–messbar) mit

$$\mathbf{P}\left[\int_0^T (\theta_t^i)^2\, dt < \infty\right] = 1 \quad \text{für } i = 1, \ldots, d. \tag{5.33}$$

Dann ist das Itô-Integral

$$M_t^i := \int_0^t \theta_s^i\, dB_s^i \tag{5.34}$$

wohldefiniert (über die Isometrie) und ist in $\mathcal{M}_{loc,c}$ mit quadratischer Variation $\langle M^i\rangle_t = \int_0^t (\theta_s^i)^2\, ds$. Ebenso ist $M := \sum_{i=1}^d M^i$ in $\mathcal{M}_{loc,c}$ mit

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t \|\theta_s\|^2\, ds. \tag{5.35}$$

Wir setzen

$$Z_t := \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right). \tag{5.36}$$

Nach der Itô-Formel ist

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s\, dM_s. \tag{5.37}$$

Also ist $Z \in \mathcal{M}_{loc,c}$ und $Z_0 = 1$.

Wir geben hier ohne Beweis ein Kriterium dafür an, dass Z sogar ein Martingal ist.

Proposition 5.69 (Novikov Bedingung) *Z ist ein Martingal, falls*

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle M\rangle_T\right)\right] < \infty. \tag{5.38}$$

Ist nun Z ein Martingal, dann definieren wir ein neues W-Maß $\widetilde{\mathbf{P}} \approx \mathbf{P}$ durch

$$\widetilde{\mathbf{P}}[A] = \mathbf{E}[Z_T\, \mathbb{1}_A] \quad \text{für } A \in \mathcal{F}.$$

Satz 5.70 (Girsanov Transformation) *Ist Z ein Martingal, dann ist der durch*

$$\widetilde{B}_t^i := B_t^i - \int_0^t \theta_s^i\, ds \quad \textit{für } i = 1, \ldots, d$$

definierte Prozess $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_t^1, \ldots, \widetilde{B}_t^d)_{t\in[0,T]}$ eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbf{P}}, \mathbb{F})$.

Wir beginnen mit zwei Lemmas zur Vorbereitung auf den Beweis des Satzes.

Lemma 5.71 *Seien $0 \le s \le t \le T$ und Y eine $\mathcal{F}_t$–messbare Zufallsvariable mit $\widetilde{\mathbf{E}}[|Y|] < \infty$. Ist Z ein Martingal, dann ist*

$$\widetilde{\mathbf{E}}[Y\,|\,\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s}\mathbf{E}[Y Z_t\,|\,\mathcal{F}_s] \quad \mathbf{P}\textit{–f.s. und } \widetilde{\mathbf{P}}\textit{–f.s.}$$

Beweis Es ist
$$\mathbf{E}[YZ_t|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbf{E}[\mathbf{E}[Z_T|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] \;=\; \mathbf{E}[YZ_T|\mathcal{F}_s].$$
Also ist für $A \in \mathcal{F}_s$
$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{E}}\big[\mathbb{1}_A Z_s^{-1}\,\mathbf{E}[YZ_t|\mathcal{F}_s]\big] &= \mathbf{E}[\mathbb{1}_A Z_s^{-1} Z_T\,\mathbf{E}[YZ_T|\mathcal{F}_s]]\\ &= \mathbf{E}\big[\mathbb{1}_A Z_s^{-1}\,\mathbf{E}[Z_T|\mathcal{F}_s]\,\mathbf{E}[YZ_T|\mathcal{F}_s]\big]\\ &= \mathbf{E}\big[\mathbb{1}_A\,\mathbf{E}[YZ_T|\mathcal{F}_s]\big]\\ &= \mathbf{E}[\mathbb{1}_A YZ_T]\\ &= \widetilde{\mathbf{E}}[\mathbb{1}_A Y].\end{aligned}$$
□

Erinnerung: $\mathcal{M}^0_{loc,c} = \big\{N \in \mathcal{M}_{loc,c} :\, N_0 = 0\big\}$. Analog $\widetilde{\mathcal{M}}_{loc,c}$, $\widetilde{\mathcal{M}}^0_{loc,c}$ für $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbf{P}}, \mathbb{F})$.

Lemma 5.72 *Wir nehmen an, dass Z ein Martingal ist. Sei $X \in \mathcal{M}^0_{loc,c}$ und*
$$\widetilde{X}_t := X_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d\langle X, Z\rangle_s, \qquad t \in [0,T].$$
Dann ist $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{M}}^0_{loc,c}$.

Beweis Durch Lokalisierung können wir annehmen, dass X, Z^{-1}, Z, $\langle X\rangle$, $\langle Z\rangle$ beschränkt sind. Die Cauchy-Schwarz Ungleichung (siehe Lemma 5.34) liefert dann
$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \frac{1}{Z_s} d\langle X, Z\rangle_s\right| &\le \|Z_s^{-1}\|_\infty \cdot \Big\|\langle X, Z\rangle\big|_{[0,t]}\Big\|_{TV}\\ &\le \|Z_s^{-1}\|_\infty \sqrt{\langle X\rangle_t \langle Z\rangle_t}\,.\end{aligned}$$
Also ist auch $\widetilde{X}$ beschränkt.

Sei
$$A_t \;=\; \int_0^t \frac{1}{Z_s} d\langle X, Z\rangle_s \;=\; X_t - \widetilde{X}_t.$$
Dann ist $\langle A\rangle \equiv 0$ und
$$\int_0^t Z_s\,dA_s \;=\; \langle X, Z\rangle_t.$$
Die Produktregel (Korollar 5.37) liefert
$$\begin{aligned}Z_t\widetilde{X}_t &= Z_tX_t - Z_tA_t\\ &= \int_0^t Z_s\,dX_s + \int_0^t X_s\,dZ_s + \langle X, Z\rangle_t - \int_0^t A_s\,dZ_s - \int_0^t Z_s\,dA_s\\ &= \int_0^t Z_s\,dX_s + \int_0^t \widetilde{X}_s\,dZ_s.\end{aligned}$$
Es folgt $Z\widetilde{X} \in \mathcal{M}^0_c$. Für $t > s$ gilt nach Lemma 5.71 (hier brauchen wir $\widetilde{X}$ beschränkt, um die Integrierbarkeitsbedingung abzusichern)
$$\widetilde{\mathbf{E}}[\widetilde{X}_s|\mathcal{F}_s] \;=\; \frac{1}{Z_s}\mathbf{E}[Z_t\widetilde{X}_t|\mathcal{F}_s] \;=\; \widetilde{X}_s \qquad \text{fast sicher } (\mathbf{P} \text{ und } \widetilde{\mathbf{P}}).$$
Es folgt $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{M}}^0_c$.

Da wir die Beschränktheitsannahmen nur durch Lokalisieren erreicht hatten, gelten die Aussagen alle nur lokal. Das heißt, wir haben für den allgemeinen Fall nur $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{M}}^0_{loc,c}$ gezeigt. □

Beweis von Satz 5.70

Es ist

$$\frac{1}{Z_s} d\langle Z, B^i\rangle_s \;=\; \theta_s^i \, ds,$$

also

$$\widetilde{B}_t^i \;=\; B_t^i \;-\; \int_0^t \frac{1}{Z_s}\, d\langle Z, B^i\rangle_s.$$

Nach Lemma 5.72 ist daher $\widetilde{B}^i \in \widetilde{\mathcal{M}}^0_{loc,c}$. Weiter ist $\langle B^i - \widetilde{B}^i\rangle \equiv 0$, also

$$\langle \widetilde{B}^i, \widetilde{B}^j\rangle_t \;=\; \langle B^i, B^j\rangle_t \;=\; t\,\mathbb{1}_{\{i=j\}}.$$

Nach der Lévy'schen Charakterisierung (Satz 5.59) ist $\widetilde{B}$ dann eine d–dimensionale Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{P}, \mathbb{F})$. $\square$

Beispiel 5.73 Brown'sche Bewegung mit konstanter Drift $-\mu$.

$$\widetilde{B}_t = B_t - \mu t.$$

Dann ist $\theta_s = \mu,\ M_t = \mu B_t,\ \langle M\rangle_t = \mu^2 t$ und

$$Z_t \;=\; \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right) \;=\; \exp\left(\mu B_t - \frac{1}{2}\mu^2 t\right)$$

ist ein Martingal nach Beispiel 5.44. Das neue Maß der Girsanov Transformation ist

$$\widetilde{\mathbf{P}}(d\omega) = e^{\mu B_T(\omega) - (\mu^2/2)T}\, \mathbf{P}(d\omega)$$

und $\widetilde{B}$ ist eine $\widetilde{\mathbf{P}}$–Brown'sche Bewegung.

Dies Beispiel hilft uns, die folgende Stoppzeit zu untersuchen

$$\tau_{b,\mu} := \inf\big\{t \geq 0 :\ \mu t + B_t \geq b\big\}. \tag{5.39}$$

Lemma 5.74 *Für* $\lambda \geq 0$ *ist*

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda \tau_{b,\mu}}\right] \;=\; e^{b\mu - b\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}}. \tag{5.40}$$

Speziell ist

$$\mathbf{P}[\tau_{b,\mu} < \infty] = \begin{cases} 1, & \mu \geq 0 \\ e^{-2b|\mu|}, & \mu \leq 0. \end{cases} \tag{5.41}$$

Beweis Aus (5.40) folgt (5.41), denn

$$\mathbf{P}[\tau_{b,\mu} < \infty] = \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda \tau_{b,\mu}}\right].$$

Nun zu (5.40). Wähle $T > 0$. Dann ist $(B_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brown'sche Bewegung auf einem Raum $(\Omega_T, \mathcal{F}_T, \mathbf{P}_T)$.
Wähle jetzt $\widetilde{\mathbf{P}}$ wie in Beispiel.
Es sei

$$\widetilde{\tau}_{b,\mu} \;=\; \inf\big\{t \geq 0 : \widetilde{B}_t + \mu t \geq b\big\} \;=\; \tau_{b,0}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_T\left[e^{-\lambda(\tau_{b,\mu}\wedge T)}\right] &= \widetilde{\mathbf{E}}_T\left[e^{-\lambda(\widetilde{\tau}_{b,\mu}\wedge T)}\right] \\
&= \widetilde{\mathbf{E}}_T\left[e^{-\lambda(\tau_{b,0}\wedge T)}\right] \\
&= \mathbf{E}_T\left[Z_T e^{-\lambda(\tau_{b,0}\wedge T)}\right] \\
&= \mathbf{E}_T\left[\mathbf{E}[Z_T\,|\,\mathcal{F}_{\tau_{b,0}\wedge T}]\, e^{-\lambda(\tau_{b,0}\wedge T)}\right] \\
&\overset{Z\ \text{Mart.}}{=} \mathbf{E}_T\left[Z_{\tau_{b,0}\wedge T}\, e^{-\lambda(\tau_{b,0}\wedge T)}\right].
\end{aligned}$$

Wir brauchen jetzt $\widetilde{\mathbf{P}}_T$ nicht mehr und bekommen

$$\mathbf{E}\left[e^{-\lambda(\tau_{b,\mu}\wedge T)}\right] = \mathbf{E}\left[Z_{\tau_{b,0}\wedge T}\, e^{-\lambda(\tau_{b,0}\wedge T)}\right].$$

Klar ist $Z_{\tau_{b,0}\wedge T} \le e^{\mu b}$ und

$$\begin{aligned}
Z_{\tau_{b,0}\wedge T}\, e^{-\lambda(\tau_{b,0}\wedge T)} &\overset{T\to\infty}{\longrightarrow} Z_{\tau_{b,0}}\, e^{-\lambda\tau_{b,0}} \\
&= e^{\mu b-(\mu^2/2)\tau_{b,0}}\, e^{-\lambda\tau_{b,0}}.
\end{aligned}$$

Also konvergieren auch die Erwartungswerte und wie in Beispiel 5.46 bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[e^{-\lambda\tau_{b,0}}\right] &= \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}\left[e^{-\lambda(\tau_{b,\mu}\wedge T)}\right] \\
&= e^{\mu b}\mathbf{E}\left[e^{-(\lambda+\mu^2/2)\tau_{b,0}}\right] \\
&\overset{(5.17)}{=} e^{\mu b}\, e^{-b\sqrt{2\lambda+\mu^2}}.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 5.75 (Ornstein–Uhlenbeck Prozess) Sei $c > 0$ und X Lösung der SDGL

$$dX_t = -cX_t dt + dB_t, \tag{5.42}$$

also

$$X_t = -c\int_0^t X_s\, ds + B_t. \tag{5.43}$$

X heißt Ornstein–Uhlenbeck Prozess (siehe Beispiel 5.65). In der Notation von oben ist

$$X_t = \widetilde{B}_t = B_t - c\int_0^t X_s\, ds,$$

also

$$M_t = c\int_0^t X_s\, dB_s$$

und

$$\langle M\rangle_t = c^2\int_0^t X_s^2\, ds.$$

$$
\begin{aligned}
Z_t &= \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t\right) \\
&= \exp\left(c\int_0^t X_s\,dB_s - \int_0^t \frac{c^2}{2}X_s^2\,ds\right) \\
&= \exp\left(c\int_0^t X_s\,dX_s + \int_0^t \frac{c^2}{2}X_s^2\,ds\right) \\
&\overset{\text{Prod.regel}}{=} \exp\left(\frac{c}{2}(X_t^2 - \langle X\rangle_t) + \int_0^t \frac{c^2}{2}X_s^2\,ds\right) \\
&= \exp\left(\frac{c}{2}X_t^2 - \frac{c}{2}t + \int_0^t \frac{c^2}{2}X_s^2\,ds\right).
\end{aligned}
$$

Wir setzen $\widetilde{\mathbf{P}} = Z_T\mathbf{P}$, dann ist X eine $\widetilde{\mathbf{P}}$–Brown'sche Bewegung (bis T).

Andersrum: Ist $\widetilde{\mathbf{P}}$, sodass X eine Brown'sche Bewegung ist. Dann definieren wir ein W-Maß $\mathbf{P} = Z_T^{-1}\widetilde{\mathbf{P}}$. Es ist dann B aus (5.43) eine P–Brown'sche Bewegung.

Mithin ist die Girsanov Transformation auch ein Verfahren, um (schwache) Lösungen von SDGLen herzustellen. Dabei heißt die erreichte Lösung eine **schwache Lösung**, weil wir nicht zu einer vorgegebenen Brown'schen Bewegung eine Lösung hergestellt haben (starke Lösung), was im Allgemeinen stärkere Bedingungen an die Koeffizienten erfordert als die Konstruktion schwacher Lösungen.

Im Fall des Ornstein–Uhlenbeck Prozesses konnten wir in Beispiel 5.65 allerdings auch eine starke Lösung explizit angeben.

5.11 Ergänzungen

Sei M ein stetiges lokales Martingal. Dann ist (M_t^2) ein lokales Submartingal. Ähnlich wie die Doob-Zerlegung im diskreten Fall (Abschnitt 2.4) liefert im kontinuierlichen Fall die **Doob-Meyer Zerlegung** von (M_t^2) die Existenz eines eindeutigen wachsenden adaptierten (sogar previsiblen) Prozesses A, sodass

$$
(M_t^2 - A_t)_t
$$

ein lokales Martingal ist.

Man kann zeigen, dass die quadratische Variation in solchen Fällen existiert und stetig ist.

Satz 5.76 *Ist M ein stetiges lokales Martingal, dann gilt schon $M \in \mathcal{M}_{loc,c}$ und es ist $A = \langle M\rangle$ stetig. Speziell ist $(M_t^2 - \langle M\rangle)$ ein stetiges lokales Martingal.*

Die Tatsache, dass jedes stetige lokale Martingal M stetige quadratische Variation besitzt, kann man sich zu Nutze machen, um M als zeittransformierte Brown'sche Bewegung zu beschreiben. Wir nehmen im Folgenden zur Einfachheit einen unbeschränkten Zeithorizont $T = \infty$ an.

Satz 5.77 (Dubins und Schwarz) *Sei $M \in \mathcal{M}_{loc,c}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F})$. Wir nehmen an, dass $\mathbb{F} = \mathbb{F}^+$ rechtsstetig ist und dass*

$$\mathbf{P}\left[\lim_{t\to\infty} \langle M\rangle_t = \infty\right] = 1.$$

Dann ist für jedes $s \geq 0$

$$\tau_s := \inf\left\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t > s\right\}$$

eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit. Wir setzen

$$\mathcal{G}_s := \mathcal{F}_{\tau_s}, \qquad \mathbb{G} := (\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}, \qquad B_s := M_{\tau_s}, \quad s \geq 0.$$

Dann ist B eine Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{G})$ und

$$M_t = B_{\langle M\rangle_t}, \qquad t \geq 0.$$

Beweis Klar ist jedes τ_s eine $\mathbb{F}^+$–Stoppzeit, also auch eine $\mathbb{F}$–Stoppzeit. Wegen

$$\left\{\langle M\rangle_t \leq s\right\} = \left\{\tau_s \geq t\right\} \in \mathcal{F}_{\tau_s} = \mathcal{G}_s$$

ist $\langle M\rangle_t$ eine $\mathcal{G}$–Stoppzeit. Speziell ist damit B wohldefiniert.

1. Schritt: B stetig.
Wäre $\langle M\rangle$ strikt monoton wachsend, dann wäre $s \mapsto \tau_s$ stetig und damit auch $s \mapsto B_s$ stetig. Wir müssen also die konstanten Stücke von $\langle M\rangle$ behandeln.
Für $t \geq 0$ sei

$$\sigma_t := \inf\left\{s > t : \langle M\rangle_s > \langle M\rangle_t\right\} = \tau_{\langle M\rangle_t}.$$

Wir setzen

$$N_s^t := M_{\sigma_t\wedge(t+s)} - M_t \quad \text{ für } s \geq 0.$$

Dann ist $N^t \in \mathcal{M}_{loc,c}((\mathcal{F}_{t+s})_{s\geq 0})$ und

$$\langle N^t\rangle_s = \langle M\rangle_{\sigma_t\wedge(t+s)} - \langle M\rangle_t = 0 \qquad \mathbf{P}\text{–fast sicher.}$$

Nach Korollar 5.29 ist $\mathbf{P}[N^t \equiv 0] = 1$. Sei $A_t := \{N^t \equiv 0\}$. Auf A_t ist $M_{\sigma_t} = M_t$. Also gilt für

$$A := \bigcap_{t\in\mathbb{Q}^+} A_t,$$

$\mathbf{P}[A] = 1$ und

$$M_{\sigma_t} = M_t \quad \text{ für } t \in \mathbb{Q}^+.$$

Da M stetig ist, gilt dann auch

$$M_{\sigma_t} = M_t \quad \text{ für } t \in \mathbb{R}^+.$$

Klar ist $s \mapsto \tau_s$ rechtsstetig, also $s \mapsto B_s$ rechtsstetig. Andererseits ist $\tau_s = \sigma_{\tau_{s-}}$. Also ist auf A

$$B_{s-} = M_{\tau_{s-}} = M_{\sigma_{\tau_{s-}}} = M_{\tau_s} = B_s.$$

Also ist B stetig mit Wahrscheinlichkeit 1.

2. Schritt: $B \in \mathcal{M}_{loc,c}$
Sei $s_2 > s_1 \geq 0$. Nach Beispiel 5.55 ist $X^{\tau_{s_2}}$ ein quadratintegrierbares Martingal. Nach dem Optional Sampling Theorem ist daher

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[B_{s_2}\,|\,\mathcal{G}_{s_1}] &= \mathbf{E}[M_{\tau_{s_2}}\,|\,\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] = M_{\tau_{s_1}} = B_{s_1}, \\
\mathbf{E}[(B_{s_2} - B_{s_1})^2\,|\,\mathcal{G}_{s_1}] &= \mathbf{E}[M^2_{\tau_{s_2}} - M^2_{\tau_{s_1}}\,|\,\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] \\
&= \mathbf{E}[\langle M\rangle_{\tau_{s_2}}\,|\,\mathcal{F}_{\tau_{s_1}}] - \langle M\rangle_{\tau_{s_1}} \\
&= s_2 - s_1.
\end{aligned}$$

Also ist $B \in \mathcal{M}^0_{loc,c}$ und $\langle B\rangle_s = s$. Also ist B eine $\mathbb{G}$–Brown'sche Bewegung nach der Lévy'schen Charakterisierung. □

Kapitel 6

Das Black–Scholes Modell

6.1 Modelle in stetiger Zeit

Wir betrachten kontinuierlichen Handel mit d Risikopapieren und einem Bankkonto, deren Kurse sich ebenfalls stetig verändern.

- Handelszeitpunkte $\mathbb{T} = [0, T]$, wobei $T \in (0, \infty)$ fest ist.
- Risikopapiere $S^1, \dots, S^d$ sind (adaptierte) Diffusionsprozesse auf einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F})$,
- Bankkonto: $S^0 > 0$ adaptierter stetiger Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F})$ mit stetiger endlicher Variation. Später: $S_t^1 = e^{rt}$ für eine **Zinsrate** $r \geq 0$.
- Startwerte $S_0^0, \dots, S_0^d$ deterministisch, $S_0^0 = 1$.
- Diskontierungsfaktor: $\beta_t = (S_t^0)^{-1}$. Ist X ein Prozess, so bezeichnet

  $$\overline{X} = (\beta_t X_t)_{t \in \mathbb{T}}$$

  den **diskontierten Prozess**.

Eine **Handelsstrategie** ist ein messbarer $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess $\theta = (\theta^0, \dots, \theta^d)$ mit

$$\int_0^T |\theta_t^0| \, dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^T (\theta_t^i)^2 \, dt < \infty \quad \text{für } i = 1, \dots, d \quad \text{fast sicher.} \tag{6.1}$$

Der **Wert** des Portfolios zur Zeit t ist

$$V_t(\theta) \;=\; \theta_t \cdot S_t \;:=\; \sum_{i=0}^d \theta_t^i S_t^i. \tag{6.2}$$

Definition 6.1 *Eine Handelsstrategie θ heißt **selbstfinanzierend** (self–financing), falls*

$$V_t(\theta) \;=\; V_0(\theta) + \sum_{i=0}^d \int_0^t \theta_s^i \, dS_t^i, \tag{6.3}$$

oder formal

$$dV_t(\theta) = \theta_t \cdot dS_t.$$

Die Menge der selbstfinanzierenden Handelsstrategien wird mit Θ *bezeichnet. Außerdem schreiben wir*

$$\Theta^+ := \big\{\theta \in \Theta : \, V_t(\theta) \geq 0 \,\text{ für alle }\, t \in \mathbb{T}\big\}.$$

Um die Integrale zu definieren, brauchen wir (6.1). Eine äquivalente Formulierung der Selbstfinanzierungsbedingung in dem Fall, wo alle θ^i von beschränkter Variation sind, ist

$$\sum_{i=0}^{d} S_t^i \, d\theta_t^i = 0.$$

Ebenfalls äquivalent sind alle Bedingungen mit $\overline{S}$, $\overline{V}$ statt S, V.

Definition 6.2 *Ein selbstfinanzierende Handelsstrategie* $\theta \in \Theta^+$ *heißt* ***Arbitragemöglichkeit****, falls*

$$V_0(\theta) = 0 \quad \textit{und} \quad \mathbf{P}[V_T(\theta) > 0] > 0.$$

Definition 6.3 *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $Q \approx \mathbf{P}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F})$ *heißt* ***äquivalentes (lokales) Martingalmaß****, ÄMM (ÄLMM), falls jedes* $\overline{S}^i$*,* $i = 1, \ldots, d$*, ein (lokales)* $(Q, \mathbb{F})$*–Martingal ist.* $\mathcal{P}$ *bzw.* $\mathcal{P}_{loc}$ *bezeichnet die Menge der ÄMM bzw. ÄLMM.*

Satz 6.4 *Ist* $\mathcal{P}_{loc} \neq \emptyset$*, so ist der Markt arbitragefrei.*

Beweis Sei $Q \in \mathcal{P}_{loc}$ und $\theta \in \Theta^+$ mit $V_0(\theta) = 0$. Dann ist $\overline{V}(\theta)$ ein lokales Martingal. Sei $(\tau_n) \uparrow T$ eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten. Dann ist $\overline{V}^{\tau_n}$ ein nichtnegatives Martingal und nach dem Lemma von Fatou

$$\mathbf{E}^Q[\overline{V}_T(\theta)] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}^Q[\overline{V}_{\tau_n}(\theta)] = 0. \qquad \square$$

Bemerkung 6.5 Die Umkehrung des Satzes, die wir aus dem Diskreten kennen, ist hier nicht mehr richtig. Man braucht eine allgemeinere Form der Arbitrage, um eine Umkehrung zu erhalten. Dazu bezeichnen wir

$$\Theta^K := \big\{\theta \in \Theta : \, \mathbf{P}[V_t(\theta) \geq -K \,\text{ für alle }\, t \in \mathbb{T}] = 1\big\} \quad \text{und} \quad \Theta^\infty = \bigcup_{K>0} \Theta^K.$$

Wir nennen eine Folge (θ_n) in Θ^∞ eine Arbitrage mit verschwindendem Risiko, falls

(i) $V_T := \text{f.s.}-\lim_{n\to\infty} V_T(\theta_n)$ existiert

(ii) $\mathbf{P}[V_T > 0] > 0$

(iii) $\|V_T(\theta_n)^-\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Delbaen und Schachermayer (1994) haben gezeigt:

$$\mathcal{P}_{loc} \neq \emptyset \iff \text{Es gibt keine Arbitrage mit verschwindendem Risiko.}$$

Annahme 6.6 Im folgenden nehmen wir stets an, dass $\mathcal{P} \neq \emptyset$ und dass $Q \in \mathcal{P}$ fest gewählt ist.

Definition 6.7 *Eine Strategie $\theta \in \Theta$ heißt* ***zulässig*** *(admissible), falls es eine Zufallsvariable $Z \geq 0$ gibt mit $\mathbf{E}^Q[Z] < \infty$ und*

$$V_t(\theta) \geq -\mathbf{E}^Q[Z\,|\,\mathcal{F}_t]. \tag{6.4}$$

$$\Theta^a := \big\{\theta \in \Theta \text{ ist zulässig}\big\}.$$

Die Idee ist, dass wir nur Strategien zulassen wollen, bei denen der Verlust durch eine integrierbare Zufallsvariable beschränkt ist. Das schließt Strategien wie die Verdoppelungsstrategie aus. Es gilt sogar:

Lemma 6.8 *Ist $\theta \in \Theta^a$, so ist $\overline{V}(\theta) \in \mathcal{M}^Q_{loc,c}$ ein Q–Supermartingal.*

Beweis Übung! (Hinweis: Lemma von Fatou) □

Definition 6.9 *Ein* ***Claim*** *ist eine $\mathcal{F}_T$–messbare Zufallsvariable $C \geq 0$. C heißt* ***absicherbar*** *(attainable), falls es einen* ***Hedge*** *$\theta \in \Theta^a$ gibt mit*

$$C = V_t(\theta).$$

Ein Marktmodell heißt ***vollständig****, falls jeder beschränkte Claim absicherbar ist. Ein Hedge θ heißt* ***Martingalhedge****, falls $\overline{V}(\theta)$ ein Q-Martingal ist.*
Mit

$$\pi(C) := \inf\big\{V_0(\theta) : \theta \in \Theta^+,\, V_T(\theta) \geq C\big\}$$

bezeichnen wir den ***Verkaufs–Arbitragepreis****.*

Der hier vorgestellte Arbitragepreis ist der Preis, den der Verkäufer verlangen muss, um sich abzusichern.

Proposition 6.10 *(i) Es gilt stets*

$$\pi(C) \geq \mathbf{E}^Q[\beta_T C].$$

(ii) Existiert ein Martingalhedge θ, so ist

$$\pi(C) = \mathbf{E}^Q[\beta_T C].$$

Wir nennen dann $\pi(C)$ den ***Arbitragepreis*** *oder den* ***fairen Preis****.*

Beweis (i) Für jeden Hedge $\theta \in \Theta^+$ ist $\overline{V}(\theta)$ ein Supermartingal, also

$$V_0(\theta) \;\geq\; \mathbf{E}^Q[\overline{V}_T(\theta)] \;=\; \mathbf{E}^Q[\beta_T C].$$

(ii) Ist nun $\overline{V}(C)$ ein Martingal, so ist auch

$$\pi(C) \;\leq\; V_0(\theta) \;=\; \mathbf{E}^Q[\beta_T C]. \qquad \square$$

Ohne Beweis bringen wir hier den Fundamentalsatz der Preistheorie.

Satz 6.11 (Harrison und Pliska, 1981) *Ein Markt ist genau dann vollständig, wenn $|\mathcal{P}| \leq 1$.*

6.2 Eindimensionales Black–Scholes Modell

Wir betrachten den Fall von nur einem Risikopapier ($d = 1$) und fester Zinsrate $r \geq 0$, also

$$S_t^0 = e^{rt}.$$

Sei B eine Brown'sche Bewegung und $\mathbb{F} = \sigma(B)$. Ferner seien $\sigma > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Der Aktienkurs S^1 folgt der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t^1 = \sigma S_t^1 \, dB_t + \mu S_t^1 \, dt$$

mit Anfangswert S_0^1. Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$S_t^1 = S_0^1 \cdot \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right).$$

D.h., S^1 ist eine geometrische Brown'sche Bewegung mit Drift μ und **Volatilität** σ. Dieses Modell heißt **Black–Scholes Modell** mit einem Risikopapier.

Es ist

$$\overline{S}_t^1 \;=\; e^{-rt} S_t^1 \;=\; S_0^1 \exp\left(\sigma B_t + \left((\mu - r) - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right).$$

und

$$d\overline{S}_t^1 \;=\; \sigma \overline{S}_t^1 \, dB_t \;+\; (\mu - r)\overline{S}_t^1 \, dt.$$

Definition 6.12 *Die Größe $\gamma := \frac{\mu - r}{\sigma}$ heißt* ***Risikoprämie*** *(*market price of risk*). Sie misst wie viel Zinsaufschlag pro Volatilität vom Markt verlangt wird.*

Wir wollen nun ein äquivalentes Martingalmaß Q herstellen, indem wir die Girsanov-Transformation verwenden.

Setze nun

$$\widetilde{B}_t = B_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) t. \tag{6.5}$$

Dann ist $\sigma \, d\widetilde{B}_t = \sigma \, dB_t + (\mu - r) \, dt$ und

$$d\overline{S}_t^1 = \sigma \overline{S}_t^1 \, d\widetilde{B}_t.$$

Wir machen jetzt die Girsanov-Transformation und setzen

$$Z_t := \exp\left(-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t\right).$$

Wir definieren das W-Maß Q durch $\dfrac{dQ}{d\mathbf{P}} = Z_T$. Dann ist $\widetilde{B}$ eine Q-Brown'sche Bewegung, und damit ist auch $\overline{S}^1$ ein Q-Martingal. Es folgt, dass Q ein äquivalentes Martingalmaß (ÄMM) ist.

Sei C eine $\mathcal{F}_T$–messbare Zufallsvariable mit $\mathbf{E}^Q[C^2] < \infty$. Dann ist

$$M_t := \mathbf{E}^Q[\beta_T C \,|\, \mathcal{F}_t]$$

eine quadratintegrierbares $(Q, \mathbb{F})$–Martingal mit $M_0 = \mathbf{E}^Q[\beta_T C]$. Nach dem Itô'schen Martingaldarstellungssatz (Satz 5.61) existiert ein messbarer adaptierter Prozess H mit

$$\int_0^T \mathbf{E}^Q[H_t^2]\,dt < \infty$$

und

$$\int_0^t H_s\,d\widetilde{B}_s + \mathbf{E}^Q[\beta_T C] = \mathbf{E}^Q[\beta_T C \,|\, \mathcal{F}_t].$$

Definiere eine Strategie θ durch

$$\theta_t^1 = \frac{H_t}{\sigma \overline{S}_t^1} \quad \text{und} \quad \theta_t^0 = M_t - \frac{H_t}{\sigma}.$$

Dann ist (wegen $\overline{S}_t^0 = 1$)

$$\overline{V}_t(\theta) = M_t - \frac{H_t}{\sigma} + \frac{H_t}{\sigma} = M_t$$

und speziell

$$V_T(\theta) = C.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\int_0^t \theta_s^1\,d\overline{S}_s^1 &= \int_0^t \sigma \overline{S}_s^1 \theta_s^1\,d\widetilde{B}_s \\ &= \int_0^t H_s\,d\widetilde{B}_s \\ &= M_t - M_0 = \overline{V}_t(\theta) - \overline{V}_0(\theta).\end{aligned}$$

Also ist θ selbstfinanzierend. Da $\overline{V}(\theta)$ ein Martingal ist, ist $\theta \in \Theta^a$. Also ist θ ein Martingalhedge für C, und damit ist der faire Preis für C

$$\pi(C) = \mathbf{E}^Q[\beta_T C]. \tag{6.6}$$

Wir wollen jetzt noch eine andere Beschreibung dieser Preisformel mit dem ursprünglichen W-Maß $\mathbf{P}$ statt mit Q geben. Da C $\mathcal{F}_T$–messbar ist, können wir schreiben:

$$C = C(S^1).$$

Setzen wir $S^1(\delta)$ als Lösung von

$$dS_t^1(\delta) = S_t^1(\delta)(\delta\,dt + \sigma\,dB_t), \tag{6.7}$$

dann ist $S_t^1 = S_t^1(\mu)$ und

$$dS_t^1 = S_t^1\big(\mu\,dt + \sigma\,dB_t\big) = S_t^1\big(r\,dt + \sigma\,d\widetilde{B}_t\big). \tag{6.8}$$

Also ist $\mathrm{Vert}^Q[S^1(\mu)] = \mathrm{Vert}^{\mathbf{P}}[S^1(r)]$. Insbesondere ist $\mathbf{E}^Q[\beta_T C] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[\beta_T C(S^1(r))]$ ist unabhängig von μ!

Wir fassen das Hergeleitete in einem Satz zusammen.

Satz 6.13 (Preis für Black–Scholes Claims) *Das Black–Scholes Modell mit Volatilität σ und Drift μ mit einem Risikopapier ist vollständig und arbitragefrei. Das äquivalente Martingalmaß Q hat die Dichte*

$$\frac{dQ}{d\mathbf{P}} = Z_T := \exp\left(-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right).$$

Ein Q–quadratintegrierbarer Claim C hat den fairen Preis

$$\pi(C) \;=\; \mathbf{E}^Q\left[e^{-rT}C\right] \;=\; \mathbf{E}\left[e^{-rT}C\big(S^1(r)\big)\right], \tag{6.9}$$

der nicht von μ abhängt.

6.3 Europäische Optionen und Black–Scholes Formel

Wir betrachten eine europäische Option von der Form

$$C = f(S_T^1).$$

Dabei nehmen wir an, dass $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}^+$ die folgende Wachstumsbedingung erfüllt, die dann Quadratintegrierbarkeit sichert: es existieren $c,\alpha>0$ mit

$$0 \le f(x) \le c(x^\alpha + x^{-\alpha}), \qquad x>0.$$

Es ist dann $\mathbf{E}^Q[C^2]<\infty$. Also existiert ein Martingalhedge θ für C

$$C = V_T(\theta).$$

Sei

$$dS_0^1(r) = S_t^1(r)\big(r\,dt + \sigma\,dB_t\big),$$

also

$$S_t^1(r) = S_0^1 \exp\left(\sigma B_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right).$$

Satz 6.14 *Der faire Preis für $C = f(S_T^1)$ ist*

$$\pi(C) = e^{-rT}F(T, S_0^1), \tag{6.10}$$

wobei

$$F(t,x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma y\sqrt{t}\right)\right)e^{-y^2/2}\,dy. \tag{6.11}$$

Der (Martingal–)Hedge θ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \theta_t^1 &= e^{-r(T-t)}\partial_2 F(T-t, S_t^1) \\ \theta_t^0 &= e^{-rT}\big(F(T-t,S_t^1) - S_t^1\,\partial_2F(T-t,S_t^1)\big) \end{aligned} \tag{6.12}$$

Der Werteprozess ist

$$V_t(\theta) = e^{-r(T-t)}F(T-t, S_t^1).$$

Bemerkung 6.15 Die Größe

$$\Delta_t \;:=\; \frac{d}{dS_t^1}\mathbf{E}^Q[C|S_t^1] \;=\; e^{-r(T-t)}\partial_2F(T-t,S_t^1)$$

wird im Jargon der Broker als das **Delta** der Option bezeichnet. Ein Hedge mit $\theta_t^1 = \Delta_t$ wird demnach als Δ–Hedge bezeichnet. Vergleiche auch (1.1).

Beweis Gleichung (6.10) folgt direkt aus Satz 6.13, da

$$S_T^1(r) = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}Y\right),$$

wobei $Y := T^{-1/2}B_T$ standardnormalverteilt ist (unter $\mathbf{P}$).

Sei nun θ der Hedge für C. Dann ist mit der Markoveigenschaft

$$\begin{aligned}\overline{V}_t(\theta) &= \mathbf{E}^Q\left[e^{-rT}f(S_T^1)\,|\,\mathcal{F}_t\right]\\ &= \mathbf{E}^Q\left[e^{-rT}f(S_T^1)|S_t^1\right]\\ &= e^{-rT}F(T-t, S_t^1).\end{aligned}$$

Setze $G(t,x) = F(T-t, e^{rt}x)$. Dann ist

$$\overline{V}_t(\theta) = e^{-rT}G(t, \overline{S}_t^1).$$

Mit der Itô-Formel ist also

$$d\overline{V}_t(\theta) = e^{-rT}\Big(\Big[\partial_1 G(t,\overline{S}_t^1) + \frac{1}{2}\sigma^2(\overline{S}_t^1)^2\partial_2^2 G(t,\overline{S}_t^1)\Big]\,dt \;+\; \partial_2 G(t,\overline{S}_t^1)\,d\overline{S}_t^1\Big).$$

Wir erhalten so

$$\begin{aligned}N_t &:= \overline{V}_t(\theta) - \overline{V}_0(\theta) - e^{-rT}\int_0^t \partial_2 G(t,\overline{S}_t^1)\,d\overline{S}_t^1\\ &= e^{-rT}\int_0^t\left(\partial_1 + \frac{1}{2}\sigma^2(\overline{S}_u^1)^2\partial_2^2\right)G(u,\overline{S}_u^1)\,du.\end{aligned}$$

Auf Grund der Definition in der ersten Zeile ist $N \in \mathcal{M}_{c,loc}^Q$. Aus der Darstellung in der zweiten Zeile liest man jedoch ab, dass N endliche Variation hat. Also ist $\langle N\rangle \equiv 0$ und damit auch $N \equiv 0$ (siehe Korollar 5.29). Damit verschwindet auch die rechte Seite für alle t, also ist auch der Integrand gleich Null, und G erfüllt diese Variante der **Black–Scholes Differentialgleichung**:

$$\begin{aligned}\partial_1 G(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\partial_2^2 G(t,x) &= 0\\ G(T,x) &= f(e^{rT}x).\end{aligned} \tag{6.13}$$

Vergleich mit der Selbstfinanzierungsbedingung liefert

$$d\overline{V}_t(\theta) = e^{-rT}\partial_2 G(t,\overline{S}_t^1)\,d\overline{S}_t^1 = \theta_t^1\,d\overline{S}_t^1,$$

also

$$\theta_t^1 = e^{-rT}\partial_2 G(t,\overline{S}_t^1) = e^{-r(T-t)}\partial_2 F(T-t, S_t^1).$$

Die Formel für θ_t^0 ergibt sich aus

$$e^{-rT}F(T-t,S_t^1) = \overline{V}_t(\theta) = \theta_t^0 + \theta_t^1\overline{S}_t^1. \qquad \square$$

Als Anwendung berechnen wir den Preis der europäischen Call–Option $C = (S_T^1 - K)^+$. Sei

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^y e^{-t^2/2}\,dt$$

die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Satz 6.16 (Black und Scholes, 1973) *Der faire Preis der europäischen Call–Option* $C = (S_T^1 - K)^+$ *ist gegeben durch die* ***Black–Scholes Formel***

$$\pi(C) = S_0^1 \Phi(y_T^+) - Ke^{-rT}\Phi(y_T^-), \tag{6.14}$$

wobei

$$y_t^\pm := \frac{\log(S_0^1/K) + (r \pm \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}. \tag{6.15}$$

Der Hedge ist gegeben durch

$$\theta_t^1 = \Phi(y_{T-t}^+), \qquad \theta_t^0 = -e^{-rT}K\Phi(y_{T-t}^-).$$

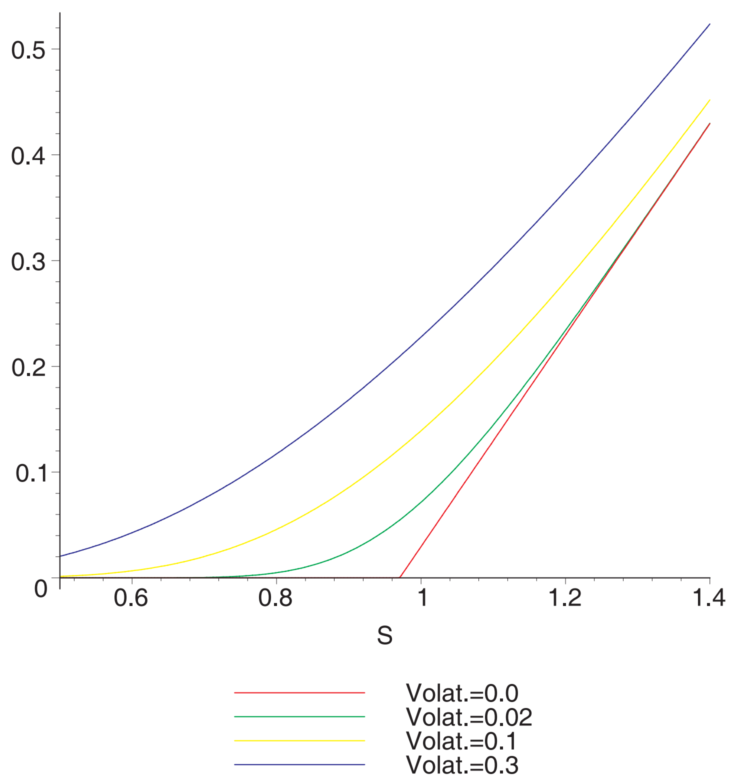

Abbildung 6.1: Black-Scholes Preis des europäischen Calls als Funktion des aktuellen Kurses, Strikeprice=1, Maturity=1, Zinsrate=0.03.

Bevor wir zum Beweis der Black-Scholes Formel kommen, wollen wir einen Schwachpunkt beleuchten. Die Formel gibt nur dann den *fairen* Preis an, wenn wir durch die Handelsstrategie θ den Claim risikofrei nachbilden können. Allerdings ist θ^1 nach Konstruktion von unbeschränkter Variation. In einem realen Markt müssen jedoch Transaktionskosten bezahlt werden, sodass praktisch die Strategie θ^1 nicht ausführbar ist.

Beweis Es ist nach dem vorigen Satz

$$F(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x \exp\left(\sigma u \sqrt{t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) - K \right]^+ e^{-u^2/2} \, du$$
$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{\sigma u \sqrt{t} + (r - \sigma^2/2)t} e^{-u^2/2} \, du - K(1 - \Phi(y)),$$

wobei y definiert ist durch

$$x \exp\left(\sigma y \sqrt{t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) = K,$$

also

$$y = \frac{\log(K/x) - (r - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}} = -y_t^- = \sigma\sqrt{t} - y_t^+.$$

Es folgt (mit quadratischer Ergänzung im Exponenten)

$$F(t,x) = \frac{xe^{rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{y-\sigma\sqrt{t}}^{\infty} e^{-u^2/2} \, du - K(1 - \Phi(y))$$
$$= xe^{rt}(1 - \Phi(y - \sigma\sqrt{t})) - K(1 - \Phi(y)).$$

Wegen $1 - \Phi(y - \sigma\sqrt{t}) = \Phi(\sigma\sqrt{t} - y) = \Phi(y_t^+)$ und $1 - \Phi(y) = \Phi(-y) = \Phi(y_t^-)$ ist nun

$$F(t,x) = xe^{rt}\Phi(y_t^+) - K\Phi(y_t^-).$$

Die Preisformel (6.14) folgt nun mit $\pi(C) = e^{-rT} F(T, S_0^1)$.
Weiter ist (nach(6.12))

$$\theta_t^1 = e^{-r(T-t)} \partial_2 F(T - t, x) = \Phi(y_{T-t}^+)$$

und

$$\theta_t^0 = \overline{V}_t(\theta) - \theta_t^1 \overline{S}_t^1 = e^{-rT} F(T - t, S_t^1) - e^{-rt} S_t^1 \Phi(y_{T-t}^+)$$
$$= e^{-rt} S_t^1 \Phi(y_{T-t}^+) - e^{-rT} K \Phi(y_{T-t}^-) - e^{-rt} S_t^1 \Phi(y_{T-t}^+)$$
$$= -e^{-rT} K \Phi(y_{T-t}^-).$$ □

Bemerkung 6.17 Der Preis des europäischen Puts $P = (K - S_T^1)^+$ errechnet sich wie im Diskreten durch die **Call–Put Parität**

$$P = C - (S_T^1 - K).$$

6.4 Mehrdimensionales Black–Scholes Modell

Jetzt betrachten wir die Situation mit einem Bankkonto $S_t^0 = e^{rt}$ und $d \geq 1$ Risikopapieren $S^1, \dots, S^d$. Die Dynamik ist durch die SDGL gegeben

$$dS_t^i = S_t^i \left(\mu_i \, dt + \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \, dB_t^j \right), \tag{6.16}$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$ und $\Lambda = (\lambda_{ij}) \in M(d,m)$ eine $d \times m$–Matrix ist, sowie $B = (B^1, \dots, B^m)$ eine m–dimensionale Brown'sche Bewegung mit $\mathbb{F} = \sigma(B)$. Dieses Modell heißt das **Black–Scholes Modell mit d Risikopapieren**, oder kurz d–dimensionales Black–Scholes Modell.

Wir können (6.16) lösen:

$$S_t^i = \exp\left[\left(\mu_i - \frac{\sigma_{ii}^2}{2}\right)t + (\Lambda B_t)_i\right], \tag{6.17}$$

wobei

$$\Sigma := (\sigma_{ij}) := \Lambda\Lambda^T = \left(\sum_{k=1}^m \lambda_{ik}\lambda_{kj}\right)_{ij}$$

die Kovarianzmatrix ist.

Ist $\operatorname{Rang}(\Lambda) < m$, dann ist $\mathbb{F}^S := \sigma(S) \subsetneq \sigma(B) = \mathbb{F}$. Klar kann man dann nicht jeden Claim C hedgen, da C ja nur $\mathcal{F}_T$–messbar zu sein braucht, zum hedgen aber nur die S^i zur Verfügung stehen. Mithin ist der Markt unvollständig, falls $m' := \operatorname{Rang}(\Lambda) < m$.

Lemma 6.18 *Es gibt eine m'–dimensionale Brown'sche Bewegung $\widetilde{B} = (\widetilde{B}^1, \dots, \widetilde{B}^{m'})$ und $\widetilde{\Lambda} \in M(d, m')$, sodass*

$$\Lambda B = \widetilde{\Lambda}\widetilde{B}.$$

Insbesondere stimmen die BS-Modelle mit (Λ, B) und mit $(\widetilde{\Lambda}, \widetilde{B})$ überein.

Beweis Λ hat eine Darstellung

$$\Lambda = \widetilde{\Lambda}P,$$

wobei $\widetilde{\Lambda} \in M(d, m')$ und $P \in M(m', m)$ so, dass $PP^T = I_{m'}$ die $m' \times m'$ Einheitsmatrix ist. Setze $\widetilde{B} = PB$. Dann ist $\widetilde{B}$ ein Martingal und

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{B}^i, \widetilde{B}^j \rangle_t &= \langle (PB)^i, (PB)^j \rangle_t \\
&= \sum_{k,l=1}^m P_{ik}P_{jl}\langle B^k, B^l\rangle_t \\
&= t \cdot \sum_{k=1}^m P_{ik}P_{jk} \\
&= t \cdot (PP^T)_{ij} = t \cdot \mathbb{1}_{\{i=j\}}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\widetilde{B}$ eine m'–dimensionale Brown'sche Bewegung ist (Lévy–Charakterisierung). □

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\operatorname{Rang}(\Lambda) = m$. Speziell ist dann auch $d \geq m$.

Nun wollen wir mit Hilfe der Girsanov Transformation ein äquivalentes Martingalmaß Q finden. Wir betrachten die diskontierten Preisprozesse

$$\begin{aligned}
\overline{S}^i &= e^{-rt} S_t^i \\
d\overline{S}_t^i &= \overline{S}_t^i \left((\mu_i - r)\,dt + (\Lambda\, dB_t)_i\right), \qquad i = 1, \dots, d.
\end{aligned}$$

Betrachte die lineare Gleichung

$$\Lambda\gamma = \mu - r\mathbb{1}. \tag{6.18}$$

(Hier ist $r\mathbb{1} = (r, \ldots, r)$.) Ist γ eine Lösung von (6.18), dann setze

$$\widetilde{B}_t^i = B_t^i + \gamma_i t, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Es ist dann

$$d\,\overline{S}_t^i = \overline{S}_t^i (\Lambda\, d\widetilde{B}_t)_i, \qquad i = 1, \ldots, d.$$

Sei

$$Z_t = \exp\left(-\langle \gamma, B_t\rangle - \frac{1}{2}\|\gamma\|^2 t\right).$$

Dann ist Z ein Martingal und wir können ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \approx \mathbf{P}$ definieren durch

$$\frac{dQ}{d\mathbf{P}} = Z_T.$$

Mit dieser Girsanov Transformation ist $\widetilde{B}$ eine Q–Brown'sche Bewegung und damit ist $\overline{S}$ ein Q–Martingal. Es folgt, dass Q ein ÄMM ist.

Es können drei Möglichkeiten auftreten:

(i) (6.18) hat keine Lösung. Dann ist $\mathcal{P} = \emptyset$, und es gibt keine Arbitragemöglichkeit.

(ii) (6.18) hat mehrere Lösungen. Dann ist $|\mathcal{P}| > 1$, also ist der Markt unvollständig. Diese Möglichkeit haben wir durch die Annahme $\mathrm{Rang}(\Lambda) = m$ ausgeschlossen.

(iii) (6.18) hat genau eine Lösung. Dann ist $\mathcal{P} = \{Q\}$, also ist der Markt arbitragefrei und vollständig.

Bemerkung 6.19 Ist das d–dimensionale Black–Scholes Modell arbitragefrei und vollständig, so heißt manchmal auch die Lösung $\gamma \in \mathbb{R}^m$ von $\Lambda\gamma = \mu - r\mathbb{1}$ die **Risikoprämie** (*market price of risk*). Diese Begriffsbildung ist allerdings etwas problematisch, denn:
Ist $M \in O(m)$ eine orthogonale Matrix, dann ist das Black–Scholes Modell mit $\widetilde{\Lambda} = \Lambda M$ in Verteilung gleich dem mit Λ. Allerdings ändert sich die Risikoprämie zu $\widetilde{\gamma} = M^{-1}\gamma$. Es ist also nur $\|\gamma\|$ eine beobachtbare Modelleigenschaft. Der „Winkel" von γ hängt noch von der konkreten Wahl von Λ ab.

Man betrachte nun folgendes Beispiel. Sei $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\sum_{i=1}^d x_i = 1$. Wir definieren eine selbstfinanzierende Strategie θ durch

$$\theta_t^i S_t^i = x_i V_t(\theta).$$

Das heißt: zu jeder Zeit ist der Anteil x_i am Gesamtwert des Portfolios im Papier Nummer i angelegt. Wir können das umschreiben zu

$$\theta_t^i = x_i (S_t^i)^{-1} \sum_{j=1}^d x_j \theta_t^j S_t^j.$$

Für festes t hat diese lineare Gleichung einen eindimensionalen Lösungsraum, und durch die Selbstfinanzierungsbedingung zusammen mit dem Startwert $V_0(\theta)$ wird die Lösung eindeutig.

Es ist dann (nachrechnen!) $\overline{V}(\theta)$ eine geometrische Brown'sche Bewegung mit Drift $\langle \mu - r\mathbb{1}, x\rangle$ und Volatilität $\sqrt{\langle x, \Sigma x\rangle}$. Optimieren über x ergibt

$$\sup_{x:\, x_1 + \ldots + x_d = 1} \frac{\langle \mu - r\mathbb{1}, x\rangle}{\sqrt{\langle x, \Sigma x\rangle}} = \frac{\langle \mu - r\mathbb{1}, \widetilde{x}\rangle}{\sqrt{\langle \widetilde{x}, \Sigma \widetilde{x}\rangle}} = \|\gamma\|,$$

wobei

$$\widetilde{x} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})}{\|\Sigma^{-1}(\mu - r\mathbb{1})\|_1}.$$

In diesem Sinne ist $\|\gamma\|$ die optimal erzielbare Risikoprämie für das Portfolio θ.

Kapitel 7

Amerikanische Optionen in stetiger Zeit

In diesem Kapitel betrachten wir das Black–Scholes Modell mit Handelszeiten

$$\mathbb{T} = [0, T], \qquad T \in (0, \infty),$$

einem Risikopapier $S = S^1$ und Volatilität $\sigma > 0$ sowie Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und Zinsrate $r \geq 0$. Das heißt, es gibt ein Bankkonto $S_t^0 = e^{rt}$ (mit Diskontierungsprozess $\beta_t = e^{-rt}$) und das Risikopapier $S := S^1$ ist eine geometrische Brown'sche Bewegung

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t\right). \tag{7.1}$$

Wir schreiben manchmal $S^{t,x}$ für

$$S_s^{t,x} = x \exp\left(\sigma(B_s - B_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(s - t)\right), \qquad s \geq t. \tag{7.2}$$

Das heißt, $(S_s^{t,x})_{s \geq t}$ ist eine geometrische Brown'sche Bewegung mit Startwert $S_t^{t.x} = x$.
Es sei $\mathbb{F} = \sigma(B)$ die von der Brown'schen Bewegung B erzeugte Filtration.
Es sei Q das äquivalente Martingalmaß.

7.1 Allgemeine Amerikanische Claims

Definition 7.1 *Eine Amerikanische Option C^f mit Auszahlungsfunktion $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ gibt dem Käufer zur Zeit τ die Auszahlung $f(S_\tau, \tau)$, wobei τ eine vom Käufer frei gewählte $\mathbb{F}$–Stoppzeit ist.*

Im folgenden nehmen wir an, dass $f(x)$ höchstens polynomial wächst, wenn $x \to 0$ oder $x \to \infty$. Dies soll Integrierbarkeit der Auszahlung sichern, sogar wenn wir zum äquivalenten Martingalmaß übergehen.

Beispiele 7.2 (i) Amerikanischer Call: $f(x, t) = (x - K)^+$

(ii) Amerikanischer Put: $f(x, t) = (K - x)^+$

(iii) Amerikanischer *Straddle* (**Stellagegeschäft**): $f(x, t) = |K - x|$

Definition 7.3 *Für* $s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$ *ist*

$$\mathcal{T}_{s,t} := \{\tau \text{ ist } \mathbb{F}\text{–Stoppzeit und } s \leq \tau \leq t\}.$$

Ferner ist $\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{s,T}$ *und* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{0,T}$.

Definition 7.4 *Ein* ***Hedge*** *für* C^f *ist eine zulässige Strategie* $\theta \in \Theta^a$ *mit der Eigenschaft*

$$V_t(\theta) \geq f(S_t, t) \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{T}. \tag{7.3}$$

Ein Hedge heißt ***minimal****, falls es eine Stoppzeit* $\tau \in \mathcal{T}$ *gibt mit* $V_\tau(\theta) = f(S_\tau, \tau)$.

Definition 7.5 *Ein Paar* $(\widetilde{\theta}, C)$ *heißt eine* ***zulässige Handels- und Konsumstrategie****, falls* $C = (C_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *adaptiert und monoton wachsend ist, sowie* $\widetilde{\theta}$ *eine zulässige Strategie, wobei die Selbstfinanzierungsbedingung* (6.3) *ersetzt wird durch*

$$V_t(\widetilde{\theta}, C) = V_0(\widetilde{\theta}, C) + \int_0^t \widetilde{\theta}^0_s dS^0_s + \int_0^t \widetilde{\theta}^1 dS_s \, - C_t. \tag{7.4}$$

Hier ist $V_t(\widetilde{\theta}, C) := \widetilde{\theta}^0 S^0_t + \widetilde{\theta}^1 S_t$ *der Wertprozess.*

Definition 7.6 *Für* $t \in \mathbb{T}$ *ist*

$$\mathcal{T}^*_t := \{\tau^* \in \mathcal{T}_t : \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau^*} f(S_{\tau^*}, \tau^*) \,|\, \mathcal{F}_t] = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau} f(S_\tau, \tau) \,|\, \mathcal{F}_t]\} \tag{7.5}$$

die Menge der optimales Stoppzeiten nach t*. Wir setzen* $\mathcal{T}^* := \mathcal{T}^*_0$.

Satz 7.7 *Setze für jedes* $t \in \mathbb{T}$

$$\overline{Z}_t := \operatorname*{ess\,sup}_{\tau\in\mathcal{T}_t} \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau} f(S_\tau, \tau) \,|\, \mathcal{F}_t] \tag{7.6}$$

und $Z_t = e^{rt}\overline{Z}_t$*. Dann existiert eine zulässige Handels– und Konsumstrategie* $(\widetilde{\theta}, C)$*, sodass*

$$Z_t = V_t(\widetilde{\theta}, C).$$

Beweis Das funktioniert ähnlich wie im Diskreten. Wir skizzieren hier nur die Ideen.

(i) Analog wie in Satz 4.14 zeigt man: $\overline{Z}$ ist die Snell'sche Einhüllende von $(e^{-rt} f(S_t, t))_{t\in\mathbb{T}}$, also das kleinste Supermartingal, das $(e^{-rt} f(S_t, t))_{t\in\mathbb{T}}$ dominiert.

(ii) Als Supermartingal besitzt $\overline{Z}$ eine Doob–Meyer Zerlegung

$$\overline{Z} = \overline{M} - \overline{C}$$

in ein $(Q, \mathbb{F})$–Martingal $\overline{M}$ und einen monoton wachsenden adaptierten Prozess $\overline{C}$ mit $C_0 = 0$.

(iii) Nach dem Martingaldarstellungssatz (Satz 5.61) existiert eine selbstfinanzierende zulässige Strategie $\theta \in \Theta^a$ mit $\overline{V}(\theta) = \overline{M}$. Setze nun $\widetilde{\theta}^1 = \theta^1$ und $\widetilde{\theta}^0 = \theta^0 - \overline{C}$. □

Bemerkung 7.8 θ ist ein minimaler Hedge für C^f.

Sei $(\widetilde{\theta}, C)$ wie oben. Setze
$$\tau_t^* := \inf\{s > t : \overline{Z}_s = e^{-rs} f(S_s, s)\}. \tag{7.7}$$
Wie im Diskreten gilt (vergleiche Satz 4.10 und Lemma 4.17)

Proposition 7.9 *Für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt*

(i) Aus $\tau_t^* \in \mathcal{T}_t^*$ und $\sigma \in \mathcal{T}_t^*$ folgt $\sigma \geq \tau_t^*$.

(ii) $(\overline{Z}_s^{\tau_t^*})_{s \in [t,T]}$ ist ein Q–Martingal. Speziell ist $C_{\tau^*} = 0$.

Satz 7.10 *Der Arbitragepreis von C^f existiert und ist*
$$\pi(C^f) = \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau^*} f(S_{\tau^*}, \tau^*)] = V_0(\theta), \tag{7.8}$$
wobei θ der Hedge aus dem Beweis von Satz 7.7 ist.

Beweis Es ist θ minimal, denn wegen $C_{\tau^*} = 0$ ist
$$\overline{V}_{\tau^*}(\theta) = \overline{V}_{\tau^*}(\widetilde{\theta}, 0) = \overline{Z}_{\tau^*} = e^{-r\tau^*} f(S_{\tau^*}, \tau^*).$$
Also ist
$$V_0(\theta) = \mathbf{E}^Q[\overline{V}_{\tau^*}(\theta)] = \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau^*} f(S_{\tau^*}, \tau^*)].$$
Läge der Kaufpreis von C^f unter $V_0(\theta)$, dann hätte man eine Arbitragemöglichkeit durch: Kaufe C^f und übe zur Zeit τ^* aus. Zudem lege ein Portfolio $-\theta^{\tau^*}$ (Sell-and-Go, siehe Lemma 3.8) an. Das heißt, man hält θ und die Option bis Zeit τ^*, löst die Position von θ auf, übt die Option aus und legt den Erlös im Bankkonto an. Hieraus ergibt sich ein sicherer Gewinn.

Läge der Verkaufspreis über $V_0(\theta)$, dann verkaufe C^f und hedge die Option durch $(\widetilde{\theta}, C)$. Sobald der Kunde die Option ausübt, wird θ aufgelöst. Hieraus ergibt sich ein sicherer Gewinn. □

7.2 Der Amerikanische Put

Die Analysis der amerikanischen Call Option ist ähnlich wie im Diskreten und liefert (bei $r \geq 0$) die Äquivalenz von amerikanischem und europäischem Call.

Da es für amerikanische Optionen keine Call–Put Parität gibt, müssen wir den amerikanischen Put gesondert anschauen. Das geht im Black–Scholes Modell leichter als in den diskreten Modellen, weil wir hier Differentialgleichungen als Hilfsmittel zur Verfügung haben.

Sei $K > 0$ fest.

Definition 7.11 *Für $t \in \mathbb{T}$ und $x \in \mathbb{R}^+$ setzen wir*
$$\begin{aligned} P(x,t) &= \mathbf{E}^Q[e^{-r(\tau_t^*-t)}(K - S_{\tau_t^*})^+ | S_t = x] \\ &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}^Q[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)^+ | S_t = x] \end{aligned} \tag{7.9}$$

Nach Satz 7.10 (angewandt auf einen Markt mit Handelszeiten $[t,T]$) ist $P(S_t, t)$ der Arbitragepreis des amerikanischen Put zur Zeit t.

Nach Proposition 7.9 ist

$$\tau_t^* = \inf\left\{s \geq t : \, P(S_s, s) = (K - S_s)^+\right\} \tag{7.10}$$

die kleinste optimale Stoppzeit nach t.

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Untersuchung von (7.9) mit Methoden der Analysis.

Lemma 7.12 *(i)* $x \mapsto P(x,t)$ *ist konvex und monoton fallend für alle* t.

(ii) $t \mapsto P(x,t)$ *ist monoton fallend.*

(iii) $P(x,t) > 0$ *für jedes* $x \geq 0$ *und* $t \in [0,T)$.

(iv) $\forall t$ *ist* $x \mapsto P(x,t)$ *Lipschitz-stetig mit Konstante* 1*, also* $\partial_1 P(x,t) \geq -1$.

(v) $(x,t) \mapsto P(x,t)$ *ist stetig.*

Beweis (i) Es ist

$$P(x,t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_t} \mathbf{E}^Q[e^{-r(\tau - t)}(K - S_\tau^{t,x})^+].$$

Die Abbildung $x \mapsto (K - \alpha x)^+$ ist konvex für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Positive Linearkombinationen konvexer Funktionen sind konvex, also ist für festes τ

$$x \mapsto \mathbf{E}^Q[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau^{t,x})^+]$$

konvex. Suprema konvexer Funktionen sind konvex, also ist $x \mapsto P(x,t)$ konvex.
Die gleiche Beweiskette gilt mit „fallend“ statt „konvex“.

(ii) Die Zeithomogenität der Brown'schen Bewegung liefert

$$P(x,t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t}} \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau}(K - S_\tau^{0,x})^+].$$

Also ist $t \mapsto P(x,t)$ fallend.

(iii) Es ist (nach der Markov-Ungleichung)

$$P(x,t) \geq \frac{K}{2} e^{-T} Q\left[\inf\{S_s^{t,x}, \, s \in [t,T]\} \leq \frac{K}{2}\right] > 0.$$

(iv) Wir benutzen ein Kopplungsargument mit zwei Aktienkursen $S^{t,x}$ und $S^{t,y}$, die durch die selbe Brown'sche Bewegung definiert werden. Sei $t \in \mathbb{T}$ und $y \geq x$. Sei $\tau \in \mathcal{T}_t$ eine optimale Stoppzeit für $S^{t,x}$, d.h.

$$P(x,t) = \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau}(K - S_\tau^{t,x})^+].$$

Dann ist τ auch eine Stoppzeit für $S^{t,y}$ wenngleich nicht notwendig optimal.
Für $a \leq b$ ist $(K-a)^+ - (K-b)^+ \leq b - a$. Also ist, wegen $S_s^{t,x} \leq S_s^{t,y}$

$$\begin{aligned} P(x,t) - P(y,t) &= \mathbf{E}^Q\left[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau^{t,x})^+\right] - P(y,t) \\ &\leq \mathbf{E}^Q\left[e^{-r(\tau-t)}\big((K - S_\tau^{t,x})^+ - (K - S_\tau^{t,y})^+\big)\right] \\ &\leq \mathbf{E}^Q\left[e^{-r(\tau-t)}\big(S_\tau^{t,y} - S_\tau^{t,x}\big)\right] \\ &= y - x, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass $\overline{S}^{t,x}$ und $\overline{S}^{t,y}$ Q–Martingale sind.

(v) Hier machen wir uns wieder zu Nutze, dass die Brown'sche Bewegung stationär ist, also die Märkte mit Handelszeitpunkten $[t,T]$ und $[0,T-t]$ äquivalent sind. Dies ermöglicht wieder ein einfaches Kopplungsargument, um zum Resultat zu kommen.

Sei $t_1 \leq t_2$. Sei $\tau \in \mathcal{T}_{0,T-t_1}$ mit $P(x,t) = \mathbf{E}^Q[e^{-r\tau}(K - S_\tau^{0,x})^+]$.

Dann ist $\tau \wedge (T-t_2) \in \mathcal{T}_{0,T-t_2}$ jedoch nicht notwendig optimal, also ist

$$P(x,t_2) \geq \mathbf{E}^Q\left[e^{-r(\tau\wedge(T-t_2))}\left(K - S^{0,x}_{\tau\wedge(T-t_2)}\right)^+\right].$$

Es ist $\overline{S}^{0,x} = (e^{-rs}S_s^{0,x})_{s\in\mathbb{T}}$ ein Q–Martingal, also ist $\left(|S_s^{0,x} - S_{T-t_2}^{0,x}|\right)_{s\in[T-t_2,T-t_1]}$ ein positives Q–Submartingal. Es folgt mit dem Optional Stopping Theorem (angewandt auf die Zeiten τ und $T-t_1 \geq \tau$)

$$\begin{aligned}
0 \leq P(x,t_1) - P(x,t_2) &\leq \mathbf{E}^Q\left[e^{-r\tau}(K - S_\tau^{0,x})^+ - e^{-r(\tau\wedge(T-t_2))}(K - S^{0,x}_{\tau\wedge(T-t_2)})^+\right] \\
&= \mathbf{E}^Q\left[\left(e^{-r\tau}K - \overline{S}_\tau^{0,x}\right)^+ - \left(e^{-r(\tau\wedge(T-t_2))}K - \overline{S}^{0,x}_{\tau\wedge(T-t_2)}\right)^+\right] \\
&\leq \mathbf{E}^Q\left[\left(e^{-r\tau}K - \overline{S}_\tau^{0,x}\right)^+ - \left(e^{-r\tau}K - \overline{S}^{0,x}_{\tau\wedge(T-t_2)}\right)^+\right] \\
&\leq \mathbf{E}^Q\left[\left|\overline{S}_\tau^{0,x} - \overline{S}^{0,x}_{\tau\wedge(T-t_2)}\right|\right] \\
&\overset{\text{OST}}{\leq} \mathbf{E}^Q\left[\left|\overline{S}_{T-t_1}^{0,x} - \overline{S}^{0,x}_{T-t_2}\right|\right] \\
&\longrightarrow 0, \quad \text{für } t_2 \downarrow t_1,
\end{aligned}$$

Also ist $t \mapsto P(x,t)$ stetig. Da $x \mapsto P(x,t)$ sogar Lip(1)-stetig ist, ist auch $(x,t) \mapsto P(x,t)$ stetig. □

Definition 7.13 *Seien*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{(x,t) :\ P(x,t) > (K-x)^+\} \\
\mathcal{D} &= \{(x,t) :\ P(x,t) = (K-x)^+\}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Wir nennen $\mathcal{C}$ den Fortsetzungsbereich und $\mathcal{D}$ den Stoppbereich.

Klar ist $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}$, weil $P(x,t) \geq (K-x)^+$. Außerdem ist

$$\tau_t^* = \inf\left\{s \in [t,T] :\ (S_s, s) \notin \mathcal{C}\right\}$$

Lemma 7.14 *Sei für $t \in \mathbb{T}$*

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_t &:= \{x :\ (x,t) \in \mathcal{C}\} \\
&= \{x :\ P(x,t) > (K-x)^+\}
\end{aligned}$$

der t–Schnitt der Menge $\mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{C}_t$ von der Form

$$\mathcal{C}_t = (S_t^*, \infty)$$

für ein $S_t^* \in (0,K)$.

Beweis Setze $S_t^* = \inf \mathcal{C}_t$. Wir müssen zeigen:

(i) $S_t^* \notin \mathcal{C}_t$

(ii) Aus $y > x \in \mathcal{C}_t$ folgt $y \in \mathcal{C}_t$.

(i) Für $S_t^* = 0$ folgt dies aus $P(0,t) = K$. Für $S_t^* > 0$ ist $P(x,t) - (K-x)^+ = 0$ für $x \in (0, S_t^*)$, also aufgrund der Stetigkeit von P auch $P(S_t^*, t) - (K - S_t^*)^+ = 0$, also $S_t^* \notin \mathcal{C}_t$.

(ii) Nach Lemma 7.12(iv) ist

$$P(y,t) \geq P(x,t) - (y-x) > (K-x)^+ - (y-x) \geq K - y.$$

Wegen $P(y,t) > 0$ ist auch $P(y,t) > (K-y)^+$, also $y \in \mathcal{C}_t$. □

Wir nennen S^* den **kritischen Preis** für die Option.

Proposition 7.15 *$t \mapsto S_t^*$ ist monoton wachsend und $S_t^* \leq K$ für $t < T$.*

Beweis Weil $t \mapsto P(x,t)$ fallend ist, ist für $s > t$ auch $\mathcal{C}_s \subset \mathcal{C}_t$, also

$$S_s^* = \inf \mathcal{C}_s \geq \inf \mathcal{C}_t = S_t^*.$$

ach Lemma 7.12(iii) ist $P(K,t) > 0 = (K-K)^+$, also $K \in \mathcal{C}_t,\ t < T$. □

7.3 Ewige Put–Option

Um S^* zu untersuchen, ist es mathematisch bequem, einen unbegrenzten Zeithorizont zu betrachten. Klar werden solche Optionen nicht am Markt gehandelt. Wir leiten hier das Grenzverhalten von S^* und $P(x,t)$ her, wenn $T \to \infty$.

Im folgenden erhalten alle Größen, die für festes T definiert sind, zur Kennzeichnung einen Index T.

Wegen $P^T(x,t) = P^{T-t}(x,0)$ ist $T \mapsto P^T(x,t)$ monoton wachsend und der Limes

$$P(x) := \lim_{T\to\infty} P^T(x,t) = \sup_{T>0} P^T(x,t) \qquad \text{für jedes } t \geq 0, \tag{7.12}$$

hängt nicht von t ab.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\infty &:= \big\{ x \geq 0 :\ P(x) > (K-x)^+ \big\} \\ &= \bigcup_{T>0} \mathcal{C}_t^T \qquad \text{für } t > 0, \end{aligned} \tag{7.13}$$

und

$$S^* = \inf \mathcal{C}^\infty = \inf_{T>0} S_t^{*,T} = \lim_{T\to\infty} S_t^{*,T} \qquad \text{für } t \geq 0. \tag{7.14}$$

Es ist dann

$$\mathcal{C}^\infty = (S^\infty, \infty).$$

Satz 7.16 *Sei* $\lambda = \frac{2r}{\sigma}$. *Dann ist*

$$S^* = \frac{\lambda}{\lambda+1} K \tag{7.15}$$

und

$$P(x) = \begin{cases} K - x, & \text{falls } x \leq S^*, \\ (K - S^*) \left(\frac{x}{S^*}\right)^{-\lambda}, & \text{falls } x > S^*. \end{cases} \tag{7.16}$$

Beweis Setze

$$\tau_x^T := \inf \left\{ t \in [0,T] : \ S_t^{0,x} \notin \mathcal{C}_t^T \right\}.$$

Dies ist die optimale Stoppzeit bis T also

$$P^T(x,t) = \mathbf{E}_T^Q \left[e^{-r\tau_x^T} (K - S_{\tau_x^T}^{0,x})^+ \right].$$

Setze nun noch

$$\tau_{x,z}^\infty = \inf \left\{ t \geq 0 : \ S_t^{0,x} \leq z \right\}$$

und

$$\begin{aligned} \tau_{x,*}^\infty = \tau_{x,S^*}^\infty &= \inf \left\{ t \geq 0 : \ S_t^{0,x} \leq S^* \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0 : \ S_t^{0,x} \notin \mathcal{C}^\infty \right\}. \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt: $\tau_x^T \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \tau_{x,*}^\infty$. Es folgt

$$P(x) = \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}_T^Q \left[e^{-r(\tau_{x,*}^\infty \wedge T)} \left(K - S_{\tau_{x,*}^\infty \wedge T}^{0,x} \right)^+ \right]$$

Setze nun

$$u(z) := \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}_T^Q \left[e^{-r(\tau_{x,z}^\infty \wedge T)} \left(K - S_{\tau_{x,z}^\infty \wedge T}^{0,x} \right)^+ \right] \tag{7.17}$$

Dann ist

$$\sup_{z \geq 0} u(z) = u(S^*) = P(x). \tag{7.18}$$

Wir müssen also das Maximum von u bestimmen, um S^* und $P(x)$ zu berechnen. Wir unterscheiden die Fälle $z > x$ und $z \leq x$.

Fall 1: Für $z > x$ ist $\tau_{x,z}^\infty = 0$, also $u(z) = (K - x)^+$.
Fall 2: Für $z \leq x$ ist $S_{\tau_{x,z}^\infty}^{0,x} = z$, also

$$u(z) = (K - z)^+ \lim_{T\to\infty} \mathbf{E}_T^Q \left[e^{-r(\tau_{x,z}^\infty \wedge T)} \right].$$

Wir brauchen die explizite Form

$$S_t^{0,x} = x \exp \left(\sigma \widetilde{B}_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right),$$

wobei $\widetilde{B}_t = B_t - \frac{\mu - r}{\sigma} t$ eine Q–Brown'sche Bewegung ist. Mit $\gamma = \sigma^{-1} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ ist dann

$$\begin{aligned} \tau_{x,z}^\infty &= \inf \left\{ t \geq 0 : \ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \widetilde{B}_t \leq \log \left(\frac{z}{x} \right) \right\} \\ &= \inf \left\{ t \geq 0 : \ (-\widetilde{B}_t) \geq -\sigma^{-1} \log \left(\frac{z}{x} \right) + \gamma t \right\}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.74 ist dann (merke: $-\widetilde{B}$ ist Q–Brown'sche Bewegung)

$$\mathbf{E}_T^Q\left[e^{-r\tau_{x,z}^{\infty}}\right] = \exp\left(\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2r}\right)\log\left(\frac{z}{x}\right)\right)$$

Wegen $\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 2r} = \frac{2r}{\sigma} = \lambda$ ist dann

$$u(z) = (K - z)^+\left(\frac{z}{x}\right)^{\lambda}, \qquad z \leq x.$$

Fassen wir die Fälle 1 und 2 zusammen, so erhalten wir in Summe:

$$u(z) = \begin{cases} (K-x)^+ & \text{falls } z \geq x \wedge K, \\ (K-z)\left(\frac{z}{x}\right)^{\lambda} & \text{falls } z \leq x \wedge K. \end{cases}$$

Für $z \leq x \wedge K$ ist daher

$$u'(z) = \frac{z^{\lambda-1}}{x^{\lambda}}(\lambda K - (\lambda+1)z).$$

Es folgt:

(i) Ist $x > z^* := \frac{\lambda}{\lambda+1}K$, dann ist u minimal in z^* mit

$$u(z^*) = (K - z^*)\left(\frac{z^*}{x}\right)^{\lambda}.$$

(ii) Ist $x \leq z^*$, so ist u maximal in x mit $u(x) = (K-x)^+$.

Wegen (7.18) ist $S^* = z^*$, und der Satz ist bewiesen. □

Kapitel 8

Rentenmärkte

Wir geben eine kurze Einführung in die Begriffe des Rentenmarktes und untersuchen in den folgenden Abschnitten dann Zinsstrukturmodelle unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades.

8.1 Einführung

Wir haben bisher immer ein Bankkonto als gegeben angesehen. Dieses hatte die Eigenschaften:

- jederzeit Ein- und Auszahlungen möglich
- Einlagen sind risikolos
- die Zinsrate ist möglicherweise veränderlich

Das Bankkonto ist jedoch nicht das natürliche Objekt am Finanzmarkt. Es muss erst aus anderen Objekten hergestellt werden. Die natürlichen Objekte am Markt sind die **Rentenpapiere**, auch (festverzinsliche) **Anleihen** genannt. Es gibt Staatsanleihen, Unternehmensanleihen usf.

Der Vorgang ist immer der selbe: Der Emittent gibt Papiere aus, die zu einem Fälligkeitstermin einen gewissen Auszahlungsbetrag versprechen. Außerdem können innerhalb der Laufzeit Auszahlungen vereinbart sein, so genannte **Zinscoupons**. Der Ausgabe- und Handelspreis wird am Markt gebildet. Kenngrößen einer Anleihe sind also

- Fälligkeitszeitpunkt $T \leq T^*$, (wobei T^* der Handelshorizont ist)
- Auszahlungswert zur Zeit T
- Zinscoupons $(c_{t_i}),\ i = 1, \ldots, n$ zu Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$.

Im folgenden wollen wir die Annahmen treffen:

- Der Auszahlungswert ist stets 1. Da wir sowieso auch Handel mit Bruchstücken erlauben wollen, ist dies keine Einschränkung.
- Es gibt keine Zinscoupons. Die Bonds heißen dann auch **Zero Bond** oder **Nullcouponanleihe**. Auch dies ist keine wesentliche Einschränkung, weil Zinserträge sonst wieder angelegt werden können. Rechnerisch ist der Fall ohne Coupons etwas einfacher.

- Es gibt kein Ausfallrisiko des Emittenten. Dies ist eine wesentliche Annahme, die im Markt durchaus nicht immer gegeben ist. In der Tat, spielt die Bonität des Emittenten eine große Rolle bei der Bildung des Handelspreises. Einfache mathematische Modelle müssen jedoch erst einmal ohne die Behandlung des Ausfallrisikos auskommen.

Offenbar haben zwei Zero Bonds mit gleicher Fälligkeit stets den selben Handelswert.

Definition 8.1 *Mit $B(t,T)$ bezeichnen wir den Handelswert zur Zeit t eines Zero Bonds ohne Ausfallrisiko, der bei Fälligkeit zur Zeit T die Auszahlung 1 liefert.*

Wir nehmen einen Markt an, in dem zu jedem Fälligkeitstermin $T \in \mathbb{T} = [0, T^*]$ ein Zero Bond existiert.

Definition 8.2 *Ein **Zinsstrukturmodell** (*term structure model*) ist ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell, bestehend aus einem filtrierten Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{T}, \mathbb{F})$ und $\mathbb{F}$–adaptierten positiven RCLL Prozessen $(B(t,T))_{t\in[0,T]}$, $T \in \mathbb{T}$, mit $B(T,T) = 1$.*

Die Bonds zu verschiedenen Fälligkeiten stehen in einem komplexen Verhältnis zueinander, das wir weiterhin untersuchen wollen.

Wichtige Kenngrößen

Definition 8.3 *Die **Rendite** (*Yield*) des Bonds $B(t,T)$ ist definiert als*

$$R(t,T) := -\frac{\log(B(t,T))}{T-t}, \qquad t < T \leq T^*. \tag{8.1}$$

*Für festes t heißt die Abbildung $T \mapsto R(t,T)$ die **Ertragskurve** (*Yield curve*) oder **Zinsstrukturkurve**.*

Typische Ertragskurven sind wachsend und konkav, da lang laufende Papiere stärker im Kurs schwanken und einen Risikoabschlag verlangen.

Tatsächliche Renditen von gewissen Bundesanleihen (Nullcoupon, mit Fälligkeit jeweils zum 04.07. eines Jahres, soweit vorhanden), aus dem Internet ausgesucht am 31.05.2017:

Restlaufzeit in Jahren	Rendite in %
0	-0.69
1	-0.78
2	-0.72
3	-0.67
4	-0.57
5	-0.41
6	-0.25
7	-0.11
8	0.03
9	0.20
10	0.28

Restlaufzeit in Jahren	Rendite in %
11	0.39
12.5	0.48
13.5	0.55
17	0.73
19.5	0.85
22	0.92
23	0.95
25	1.04
27	1.12
29	1.15

Tatsächliche Renditen von gewissen Bundesanleihen (Nullcoupon, mit Fälligkeit jeweils zum 04.01. eines Jahres), aus dem Internet ausgesucht am 15.02.2005:

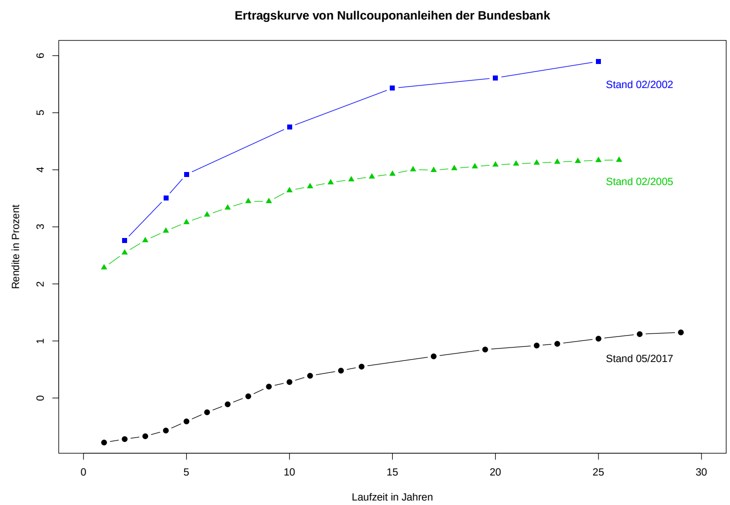

Abbildung 8.1: Zinsertragskurve vom 31.05.2017, Bundesanleihen

Restlaufzeit in Jahren	Rendite in %
1	2.286
2	2.547
3	2.762
4	2.929
5	3.079
6	3.211
7	3.334
8	3.447
9	3.447
10	3.638
11	3.708
12	3.777
13	3.829

Restlaufzeit in Jahren	Rendite in %
14	3.878
15	3.927
16	4.005
17	3.993
18	4.025
19	4.057
20	4.088
21	4.105
22	4.121
23	4.137
24	4.151
25	4.167
26	4.171

Zum Vergleich Anleihen mit ähnlichen Laufzeiten, ausgesucht am 28.01.2002:

Restlaufzeit in Jahren	Rendite in %
2	2.76
4	3.51
5	3.92
10	4.75
15	5.43
20	5.61
25	5.90

Die beiden Tabellen ähneln sich darin, dass die Ertragskurve konkav ist und monoton wachsen. Insgesamt sind jedoch die Zinsen im Februar 2005 deutlich niedriger als im Januar 2002.

In Zeiten erwarteter Zinssenkungen, beispielsweise in der Hochzinsphasen 1973/74, 1980-82, 1991-93, oder auf Grund einer erwarteten Verschlechterung der wirtschaftlichen Entwicklung, kann die Kurve auch fallend sein. Man spricht dann von einer **Inversion**.

Im Extremfall sehr kurzfristiger Anlagen erhalten wir:

Definition 8.4 *Die **momentane Zinsrate** (*instantaneous interest rate*) ist definiert als*

$$r_t := R(t,t) := -\frac{d}{dT} \log B(t,T)\Big|_{T=t}, \tag{8.2}$$

falls die Ableitung existiert.

Bemerkung 8.5 Die Abbildung $B \to R$ ist eineindeutig mit

$$B(t,T) = \exp\big(- R(t,T) \cdot (T-t)\big). \tag{8.3}$$

Jedoch ist die Abbildung $B \to r$ *nicht* eineindeutig. Es reicht also nicht, ein Modell für r aufzustellen.

Anleihen-Termingeschäfte

Um eine vollständige Beschreibung des Zinsmarktes durch kurzfristige Anlagen zu erhalten, müssen wir zudem Termingeschäfte (Forwards) über kurzfristige Anleihen betrachten.

Zur Erinnerung (Siehe Abschnitt 1.4, Seite 11): Ein Termingeschäft ist die Vereinbarung zwischen zwei Handelspartnern (short und long), dass zu einem Fälligkeitstermin ein Partner (short) dem anderen (long) ein bestimmtes Gut zu einem vereinbarten festen Preis K abkauft.

Welches ist aber, bei einem zur Zeit t eingegangenen Termingeschäft der „faire“ Preis K für ein Termingeschäft mit Fälligkeit $T_1 \geq t$ über einen T_2–Zero Bond ($T_2 \geq T_1$)?

Das Arbitrageprinzip liefert den fairen Preis durch Angabe einer Replikationsstrategie (Hedge), hier für die short Position: Zur Zeit t kaufe K Anleihen mit Fälligkeit T_1 und verkaufe eine mit Fälligkeit T_2. Zur Zeit T_1 liefern die T_1–Anleihen eine Auszahlung K, mit dem dem Partner eine T_2–Anleihe abgekauft wird. So ist das Portfolio wieder auf Null. Die Anfangsinvestition muss Null sein, also ist

$$K = \frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}$$

der faire Preis. Wir erhalten so zur Zeit t die Termin–Rendite

$$-\frac{\log K}{T_2 - T_1} = -\frac{\log B(t,T_2) - \log B(t,T_1)}{T_2 - T_1}.$$

Lassen wir $T_2 \downarrow T_1$ gehen, so erhalten wir:

Definition 8.6 *Die **Termin–Zinsrate** ist definiert als*

$$f(t,T) := -\frac{d}{dT} \log B(t,T). \tag{8.4}$$

Speziell ist $r_t = f(t,t)$.

Bemerkung 8.7 Offenbar gelten

$$f(t,T) = R(t,T) + (T-t)\frac{d}{dT}R(t,T) \tag{8.5}$$

und

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right). \tag{8.6}$$

Speziell ist $B \to f$ eineindeutig.

Das Bankkonto

Das Bankkonto erhalten wir nun durch sukzessives Investment in Anleihen mit sehr kurzer Restlaufzeit. Wir betrachten für festes $\varepsilon > 0$ die Handelsstrategie θ^ε, die festgelegt ist durch: Zur Zeit $t = 0$ ist der Wert $V_0(\theta^\varepsilon) = 1$.

Zur Zeit 0:	kaufe $\frac{1}{B(0,\varepsilon)}$ Anteile der ε–Anleihe
Zur Zeit ε:	verwende die Auszahlung der ε–Anleihe und kaufe $\frac{1}{B(0,\varepsilon)} \cdot \frac{1}{B(\varepsilon,2\varepsilon)}$ Anteile der 2ε–Anleihe
$\vdots$	$\vdots$
Zur Zeit $n\varepsilon$:	verwende die Auszahlung der $n\varepsilon$–Anleihe und kaufe $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} B(k\varepsilon,(k+1)\varepsilon)^{-1}$ Anteile der $(k+1)\varepsilon$–Anleihe

Wir nehmen an, dass genügend Stetigkeit im Modell ist, so dass der Limes

$$S^0 := \lim_{\varepsilon \to 0} V(\theta^\varepsilon)$$

existiert und stetig ist. Wenn wir zudem noch annehmen (was nicht ganz unrealistisch ist), dass $B(t,T) \leq 1,\ t \leq T$, so ist S^0 wachsend, stetig und von endlicher Variation, sowie $\mathbb{F}$–adaptiert. Wir können S^0 also als **Bankkonto** betrachten.

Wenn wir ein solches Bankkonto haben, dann definieren wir noch den Diskontierungsfaktor $\beta_t := \frac{1}{S_t^0}$ sowie für jeden stochastischen Prozess X den diskontierten Prozess $\overline{X}$ durch $\overline{X}_t = \beta_t X_t$.

Bemerkung 8.8 Nach Konstruktion gilt

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right). \tag{8.7}$$

Um Arbitrage auszuschließen, machen wir die folgende Annahme.

Marktannahme Es existiert ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß Q. D.h. $Q \approx \mathbf{P}$ und $(B(t,T))_{t\in[0,T]}$ ist ein Q–Martingal für jedes $T \in \mathbb{T}$.

Diese Annahme impliziert starke Bedingungen für die Zinsstruktur, wie wir gleich sehen werden. Insbesondere gilt:

Lemma 8.9 *Ist Z handelbar (also Werteprozess einer Strategie), stetig und von endlicher Variation, mit $Z_0 = 1$, so ist $Z = S^0$.*

Beweis $\overline{Z}$ ist ein stetiges Q–Martingal mit endlicher Variation, also fast sicher konstant

$$1 = \overline{Z}_0 = \overline{Z}_t = \frac{Z_t}{S_t^0}. \qquad \square$$

Bemerkung 8.10 Durch die alleinige Angabe des Bankkontos ist der Zinsmarkt nicht vollständig bestimmt. Speziell ist der Markt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{F}, \mathbb{T}, S^0)$ im Allgemeinen nicht vollständig, weil beispielsweise der konstante Claim $B(0,T)$ nicht repliziert werden kann. Es ist aber $(\beta_t B(t,T))_{t\in[0,T]}$ ein $(Q, \mathbb{F})$–Martingal, also

$$B(t,T) = S_t^0\, \mathbf{E}^Q\left[\frac{1}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\, ds\right)|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{8.8}$$

Allgemeiner gilt für jeden replizierbaren Claim C (mit Fälligkeit T), dass der Handelspreis C_t zur Zeit t gegeben ist durch

$$C_t = S_t^0 \mathbf{E}^Q\left[\beta_T C\,|\,\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}^Q\left[C \cdot \exp\left(-\int_t^T r_s\, ds\right)|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{8.9}$$

Termingeschäfte

Sei S^1 ein weiteres handelbares Gut, also $\overline{S}^1$ ein stetiges $(Q, \mathbb{F})$–Martingal. Welches ist zur Zeit t der faire Terminpreis für S^1 zur Fälligkeit T?

Hedge (für die long Position):

Zeit 0: Kaufe S^1 und verkaufe $\dfrac{S_0^1}{B(0,T)}$ T–Anleihen.

Zeit T: Verkaufe dem Partner „short" das Papier S^1 zum Preis $\frac{S_0^1}{B(0,T)}$

Wir erhalten:

Lemma 8.11 *Der faire Terminpreis zur Fälligkeit T für das Papier S^1 ist zur Zeit $t \le T$*

$$F(t,T) := \frac{S_t^1}{B(t,T)}. \tag{8.10}$$

8.2 Zinsratenmodelle

Wir betrachten jetzt Modelle, bei denen der einzige Zufall in der momentanen Zinsrate r liegt. Also ist $\mathbb{F} = \sigma(r)$ die von der Zinsrate erzeugte Filtration und $S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r_s\, ds\right)$ sowie

$$B(t,T) = S_t^0\, \mathbf{E}^Q\left[\frac{1}{S_T^0}\,|\,\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\, ds\right)|\,\mathcal{F}_t\right], \tag{8.11}$$

wobei Q das eindeutige ÄMM ist. Im folgenden betrachten wir nur noch Q und lassen es in der Notation weg. Wir suchen ein geeignetes Modell für eine Dynamik von r.

Im scheinbaren Gegensatz zu Bemerkung 8.5 kann hier die gesamte Zinsstruktur B aus r zurückgewonnen werden. Dieser Gegensatz löst sich auf, wenn man bedenkt, dass in der allgemeinen Situation die Filtration $\mathbb{F}$ größer ist als $\sigma(r)$. Dann nämlich ist die rechte Seite von (8.11) nicht mehr nur eine Funktion von r.

Bevor wir zwei solche Modelle vorstellen (Vasicek und Cox-Ingersoll-Ross), wiederholen wir noch einmal die Warnung zur Brauchbarkeit solcher Modelle: Durch Modelle, die nur die Zinsrate modellieren, können die Feinheiten des Verlaufs der Ertragskurve nicht realistisch dargestellt werden. Zinsratenmodelle sind also immer zu grob.

8.2.1 Vasicek Modell

Definition 8.12 *In dem Modell von **Vasicek** (1977) ist r ein Ornstein–Uhlenbeck Prozess, also (starke) Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t, \tag{8.12}$$

wobei $r_0, a, b, \sigma > 0$ und W eine Brown'sche Bewegung ist, sowie $\mathbb{F} = \sigma(W)$.

Die SDGL besitzt die Lösung

$$r_t = e^{-at}\left(r_0 + b(e^{at} - 1) + \sigma \int_0^t e^{au}\,dW_u\right). \tag{8.13}$$

Speziell ist r ein Gauß'scher Prozess (alle endlich-dimensionalen Verteilungen sind normal) mit stetigen Pfaden. Der Erwartungswert ist

$$\mathbf{E}[r_t] = e^{-at}\left(r_0 + b(e^{at} - 1)\right), \tag{8.14}$$

die Kovarianz ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}[r_s, r_t] &= e^{-a(t+s)}\sigma^2 \mathbf{E}\left[\left(\int_0^{s\wedge t} e^{au}\,dW_u\right)^2\right] \\
&= e^{-a(t+s)}\sigma^2 \int_0^{s\wedge t} e^{2au}\,du \\
&= \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(t+s)}(e^{2a(s\wedge t)} - 1) \\
&= \frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{-a|t-s|} - e^{-a(t+s)}\right).
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Insbesondere ist

$$\mathbf{Var}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right). \tag{8.16}$$

Nach der Markoveigenschaft von r ist der Preis des Zero Bonds

$$B(t,T) = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\,ds\right)\,\Big|\mathcal{F}_t\right] \quad = \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\,ds\right)\Big|r_t\right] \tag{8.17}$$

Gegeben r_t ist aber $\int_t^T r_s\,ds$ normalverteilt mit Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\int_t^T r_s\,ds|r_t] &= \int_t^T e^{-a(u-t)}(r_t + b(e^{a(u-t)} - 1))\,du \\
&= b(T-t) + (r_t - b)\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)
\end{aligned} \tag{8.18}$$

und Varianz

$$\begin{aligned}\mathbf{Var}\left[\int_t^T r_u\,du\Big|r_t\right] &= \int_t^T du \int_t^T dv\,\mathbf{Cov}\left[r_u, r_v\big|r_t\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2a}\int_t^T du \int_t^T dv\,\left(e^{-a|u-v|} - e^{-a(u+v-2t)}\right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2a^3}\left(-3 + 2a(T-t) + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}\right).\end{aligned} \tag{8.19}$$

Ist $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ normalverteilt, so ist $\mathbf{E}[e^{-X}] = e^{-\mu+\sigma^2/2}$. Also ist

$$B(t,T) = e^{-b(T-t)}\Psi(T-t, r_t - b), \tag{8.20}$$

wobei

$$\Psi(s,x) = \exp\left(-\frac{x}{a}(1-e^{-as}) + \frac{\sigma^2}{4a^3}(2as - 3 + 4e^{-as} - e^{-2as})\right). \tag{8.21}$$

Die Rendite ist dann

$$R(t,T) = -\frac{\log B(t,T)}{T-t} = b - \frac{\log \Psi(T-t, r_t - b)}{T-t}.$$

Klar ist

$$R_\infty := \lim_{T\to\infty} R(t,T) = b - \frac{\sigma^2}{2a^2},$$

und wir können $R(t,T)$ ausdrücken durch die Differenz zur asymptotischen Rendite

$$R(t,T) = R_\infty - \frac{1}{a(T-t)}\left[(R_\infty - r_t)(1-e^{-at}) - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-at})^2\right].$$

Ein Vorteil des Vasicek Modells ist, dass r Gauß'sch ist und man daher alles mühelos ausrechnen kann. Der Nachteil ist, dass r_t negativ werden kann. Dies wird im folgenden Modell vermieden.

8.2.2 Cox–Ingersoll–Ross Modell

Im Cox–Ingersoll–Ross Modell (CIR) soll eine Dynamik für die Entwicklung der Zinsraten angegeben werden, die keine negativen Zinssätze zulässt. Die Idee ist, den Abstand vom Ursprung eines mehrdimensionalen Ornstein–Uhlenbeck Prozesses zu nehmen. Wir diskutieren kurz letztgenannten Prozess und analysieren dann das CIR Modell.

Motivation: Betrachte den n–dimensionalen isotropen Ornstein–Uhlenbeck Prozess, der definiert ist durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t^i = -\frac{b}{2}X_t^i\,dt + \frac{\sigma}{2}\,dB_t^i, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{8.22}$$

wobei $B = (B^1,\ldots,B^n)$ eine n–dimensionale Brown'sche Bewegung ist und $b,\sigma > 0$. Betrachte den Prozess

$$Y_t := (X_t^1)^2 + \ldots + (X_t^n)^2.$$

Dann ist nach der Itô-Formel

$$\begin{aligned}Y_t &:= \sum_{i=1}^n \left(\langle X^i\rangle_t + \int_0^t 2X_s^i\,dX_s^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^t \left(\frac{\sigma^2}{4} - b(X_s^i)^2\right)\,ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma X_s^i\,dB_s^i.\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$Z_t := Y_t - \int_0^t (n\frac{\sigma^2}{4} - bY_s)\, ds$$

ein stetiges Martingal ist mit quadratischer Variation

$$\langle Z \rangle_t = \sigma^2 \int_0^t Y_s\, ds.$$

Also ist Y die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dY_t = \left(\frac{n\sigma^2}{4} - bY_t\right) dt + 2\sigma\sqrt{Y_t}\, dW_t, \tag{8.23}$$

wobei W eine Brown'sche Bewegung ist. (8.23) hat keine Lipschitz–Koeffizienten, aber man kann dennoch zeigen, dass diese Gleichung eine eindeutige starke Lösung hat.

Die eindimensionale Brown'sche Bewegung kehrt fast sicher unendlich oft zum Ursprung zurück, die zweidimensionale Brown'sche Bewegung kehrt fast sicher gar nicht zum Ursprung zurück. Ähnlich verhält es sich mit Y. Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} &\text{Ist } n < 2, \text{ so ist } \mathbf{P}[Y_t = 0 \text{ unendlich oft }] = 1 \\ &\text{Ist } n \geq 2, \text{ so ist } \mathbf{P}[Y_t = 0 \text{ für ein } t > 0] = 0 \end{aligned} \tag{8.24}$$

Definition 8.13 *Das* ***Cox–Ingersoll–Ross Modell*** *(CIR) ist dasjenige Zinsstrukturmodell, wo die Zinsrate r die Lösung ist von*

$$dr_t = (a - b\, r_t)\, dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t. \tag{8.25}$$

Dabei ist $a, b, \sigma, r_0 > 0$ und W eine Brown'sche Bewegung sowie $\mathbb{F} = \sigma(W)$.

Ist $n = 4a/\sigma^2$ ganzzahlig, so ergibt sich die Interpretation wie oben. In jedem Fall gilt (8.24). Wir nehmen also im Folgenden $n \geq 2$ an.

Gleichgewicht des CIR Modells

Wir betrachten die Frage nach dem Langzeitverhalten des Modells. Gibt es einen Gleichgewichtszustand, gegen den r_t konvergiert?

Dazu schauen wir uns erst einmal den Fall an, wo $n := \frac{4a}{\sigma^2} \in \mathbb{N}$ ganzzahlig ist. In diesem Fall hat r die Darstellung

$$r_t = \sum_{i=1}^n (X_t^i)^2,$$

wobei $X^1, \ldots, X^n$ unabhängige Ornstein–Uhlenbeck Prozesse sind, also Lösungen von

$$dX_t^i = -\frac{b}{2} X_t^i\, dt + \frac{\sigma}{2}\, dB_t^i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

wo $B^1, \ldots, B^n$ unabhängige Brown'sche Bewegungen sind. Dabei können wir als Startbedingung annehmen

$$X_0^1 = \sqrt{r_0}\,, \qquad X_0^2 = \ldots = X_0^n = 0.$$

Es sind dann $X_t^1, \ldots, X_t^n$ unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswerten

$$\mathbf{E}[X_t^1] = e^{-bt/2}\sqrt{r_0}, \qquad \mathbf{E}[X_t^2] = \ldots = \mathbf{E}[X_t^n] = 0$$

und Varianz

$$\mathbf{E}[X_t^i] = K := \frac{\sigma^2}{4b}(1 - e^{-bt}).$$

(Siehe (8.14) und (8.16).) In dem Fall, wo $r_0 = 0$ ist, ist r_t/K also χ^2–verteilt mit n Freiheitsgraden, hat also die Dichte

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$$

Hier ist Γ die übliche Gamma–Funktion. Allgemeiner ist r_t/K χ^2–verteilt mit n Freiheitsgraden und Dezentralitätsparameter

$$z := \frac{4br_0}{\sigma^2(e^{bt} - 1)}.$$

Wir wollen die Verteilung hier nicht explizit ausrechnen, sondern stattdessen nur das Gleichgewicht, also den Limes $t \to \infty$ betrachten. Offenbar konvergiert jedes X_t^i in Verteilung gegen $\mathcal{N}_{0,\sigma^2/4b}$. Also konvergiert $\frac{4b}{\sigma^2} r_t$ in Verteilung gegen die χ^2–Verteilung mit n Freiheitsgraden. Mit anderen Worten, die Limesverteilung von r_t für $t \to \infty$ hat die Dichte

$$p(dx) = \left(\frac{2b}{\sigma^2}\right)^{2a/\sigma^2} \Gamma(2a/\sigma^2)^{-1} r^{(2a/\sigma^2)-1} e^{-(2b/\sigma^2)r}. \tag{8.26}$$

Kolmogorov'sche Vorwärtsgleichung

Wir haben diese Formel bislang nur für n ganzzahlig hergeleitet. Es ist instruktiv, einen weiteren Zugang zu betrachten, der für alle Werte von n das Gleichgewicht charakterisiert.

Wir nehmen an, dass r_0 zufällig ist und verteilt wie das Gleichgewicht, also $\mathbf{P}[r_t \in dx] = p(x)dx$ für alle $t \geq 0$ und $x \geq 0$. Betrachte eine Testfunktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, die zweimal stetig differenzierbar ist. Dann ist

$$\mathbf{E}[f(r_t)] = \mathbf{E}[f(r_0)] = \int_0^\infty p(x) f(x)\, dx$$

für alle t, also

$$\frac{d}{dt}\mathbf{E}[f(r_t)] = 0.$$

Nach der Itô-Formel ist aber

$$df(r_t) = (a - br_t) f'(r_t)\, dt + \sigma\sqrt{r_t}\, f'(r_t)\, dW_t + \frac{\sigma^2}{2} r_t f''(r_t)\, dt.$$

Also ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{E}\left[(a - br_t) f'(r_t) + \frac{\sigma^2}{2} r_t f''(r_t)\right] \\
&= \int_0^\infty \Big((a - bx) f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} x f''(x)\Big) p(x)\, dx \\
&\overset{\text{p. I.}}{=} \int_0^\infty \left[-(a - bx)p'(x) + b\, p(x) + \frac{\sigma^2}{2}(x\, p''(x) + 2\, p'(x))\right] f(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Da f beliebig war, muss p die folgende Differentialgleichung erfüllen

$$\frac{\sigma^2}{2} x p''(x) + \big(bx + \sigma^2 - a\big)\, p'(x) + b\, p(x) = 0. \tag{8.27}$$

Durch die Nebenbedingung $p(x) \geq 0$ und $\int_0^\infty p(x)\, dx = 1$ ist p dann eindeutig festgelegt als

$$p(x) = C\, r^{(2a/\sigma^2)-1} e^{-(2b/\sigma^2) r},$$

wobei die Normierungskonstante C gegeben ist durch

$$C = \frac{\big(2b/\sigma^2\big)^{2a/\sigma^2}}{\Gamma(2a/\sigma^2)}.$$

Bond Preise

Wie im Vasicek Modell hat r die Markoveigenschaft und ist zeitlich homogen. Also hat der Bondpreis die Gestalt

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\, ds\right) \Big| r_t\right] \\ &= \Psi(T-t, r_t), \end{aligned}$$

wobei

$$\Psi(t,x) := \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s\, ds\right) \Big| r_0 = x\right].$$

Wir müssen also die Laplace-Transformierte von $\int_0^t r_s\, ds$ ausrechnen.

Lemma 8.14 *Seien $a^i, x^i \geq 0$, $i = 1,2,3$ und seien $r^i = r^{i,a_i,x_i}$, Lösungen von*

$$dr_t^i = (a^i - br_t^i)\, dt + \sigma\sqrt{r_t^i}\, dW_t^i, \qquad r_0^i = x^i, \tag{8.28}$$

wobei W^1, W^2, W^3 unabhängige Brown'sche Bewegungen sind. Dann ist

$$r^{1,a^1,x^1} + r^{2,a^2,x^2} \overset{\mathcal{D}}{=} r^{3,a^1+a^2,x^1+x^2}. \tag{8.29}$$

Beweis Klar ist $r_0^1 + r_0^2 = x^1 + x^2 = r_0^3$. Außerdem ist

$$\begin{aligned} Z_t &:= r_t^1 + r_t^2 - \int_0^t \big(a^1 + a^2 - b(r_s^1 + r_s^2)\big)\, ds \\ &= \int_0^t \sigma\sqrt{r_s^1}\, dW_s^1 + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s^2}\, dW_s^2 \end{aligned}$$

ein stetiges quadratintegrierbares Martingal mit quadratischer Variation

$$\langle Z\rangle_t = \int_0^t \sigma^2 \left(r_s^1 + r_s^2\right)\, ds.$$

Also gilt

$$d(r_t^1 + r_t^2) = \big(a^1 + a^2 - b(r_t^1 + r_t^2)\big)\, dt + \sigma\sqrt{r_t^1 + r_t^2}\, dW_t,$$

wobei W eine Brown'sche Bewegung ist. Dies ist aber genau die Definitionsgleichung für r^3. $\square$

Proposition 8.15 *Es gibt Funktionen C und D, sodass*

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s\,ds\right)\right] = e^{-r_0 C(t) - aD(t)}.$$

Beweis Sei $r = r^1 + r^2$, wo $r^1 = r^{1,0,r_0}$ und $r^2 = r^{2,a,0}$ unabhängig sind. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s\,ds\right)\right] &= \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s^1\,ds\right)\right]\cdot\mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_0^t r_s^2\,ds\right)\right]\\ &=: f(r_0)\cdot g(a).\end{aligned}$$

Seien nun $x, y \geq 0$ und $\widetilde{r}^1 = \widetilde{r}^{1,0,x}$ sowie $\widetilde{r}^1 = \widetilde{r}^{2,0,y}$ unabhängig und wie in Lemma 8.14. Dann ist

$$\begin{aligned}f(x+y) &= \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_0^t \widetilde{r}_s^1 + \widetilde{r}_s^2\,ds\right)\right]\\ &= f(x+y).\end{aligned}$$

Also ist f monoton fallender Gruppenhomomorphismus $(\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^+,\cdot)$. Also ist f differenzierbar und $f(x) = \exp(f'(0)x)$. Setze nun $C(t) = -f'(0)$.

Analog: $D(t) = -g'(0)$. □

Lemma 8.16 $D(t) = \int_0^t C(s)\,ds.$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Seien $r^1 = r^{1,1,0}$, $r^2 = r^{2,1,0}$ und $r^3 = r^{3,0,r_\varepsilon^1}$. Nach Lemma 8.14 gilt wegen der zeitlichen Homogenität von r

$$\int_\varepsilon^{t+\varepsilon} r_s^1\,ds \overset{\mathcal{D}}{=} \int_0^t r_s^2\,ds + \int_0^t r_s^3\,ds.$$

Da r^1 die Markoveigenschaft hat, gilt auch

$$\int_0^{t+\varepsilon} r_s^1\,ds \overset{\mathcal{D}}{=} \int_0^t r_s^2\,ds + \int_0^t r_s^3\,ds + \int_0^\varepsilon r_s^1\,ds.$$

Wir kürzen ab: $R_t^i = \int_0^t r_s^i\,ds$, also $D(t) = -\log\mathbf{E}[e^{-R_t^i}],\ i = 1,2$. Es ist $\mathbf{E}[r_s^1] \leq s$, also $\mathbf{E}[R_\varepsilon^1] \leq \varepsilon^2$.

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}D(t) &= -\frac{d}{dt}\left(\log \mathbf{E}[\exp(-R_t^1)]\right)\\
&= e^{D(t)}\frac{d}{dt}\mathbf{E}[e^{-R_t^1}]\\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\left(1-e^{D(t)}\mathbf{E}\left[e^{-R_{t+\varepsilon}^1}\right]\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\left(1-e^{D(t)}\mathbf{E}\left[e^{-R_t^2}e^{-R_t^3}e^{-R_\varepsilon^1}\right]\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\left(1-e^{D(t)}\mathbf{E}\left[e^{-R_t^2}e^{-R_t^3}\right]\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\left(1-e^{D(t)}\underbrace{\mathbf{E}\left[e^{-R_t^2}\right]}_{=e^{D(t)}}\mathbf{E}\left[e^{-R_t^3}\right]\right)\\
&= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\left(1-\mathbf{E}\left[e^{-r_\varepsilon^1 C(t)}\right]\right)\\
&= C(t)\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon^{-1}\mathbf{E}\left[r_\varepsilon^1\right]\\
&= C(t).
\end{aligned}$$

□

Nach Voraussetzung ist der diskontierte Bondpreis ein Martingal

$$\frac{B(t,T)}{S_t^0} = \Psi(T-t,r_t)\exp\left(-\int_0^t r_s\,ds\right).$$

Also verschwinden die dt–Terme in

$$\begin{aligned}
&d\Big(\exp\Big(-\int_0^t r_s\,ds\Big)\Psi(T-t,r_t)\Big)\\
&\qquad = \exp\Big(-\int_0^t r_s\,ds\Big)\left[-r_t\Psi\,dt+\partial_2\Psi\,dr_t+\frac{1}{2}\partial_2^2\Psi\,d\langle r\rangle_t-\partial_1\Psi\,dt\right]
\end{aligned}$$

Wegen $d\langle r\rangle_t = \sigma^2 r_t\,dt$ ist dann

$$0 = -r_t\Psi+\frac{\sigma^2}{2}r_t\partial_2^2\Psi+(a-br_t)\partial_2\Psi-\partial_1\Psi. \tag{8.30}$$

Nun ist aber

$$\Psi(T-t,r_t) = \exp\left(-r_tC(T-t)-a\int_0^{T-t}C(s)\,ds\right),$$

also

$$\begin{aligned}
\partial_2\Psi &= -C(T-t)\Psi\\
\partial_2^2\Psi &= C^2(T-t)\Psi\\
\partial_1\Psi &= \left(-r_tC'(T-t)-aC(T-t)\right)\Psi.
\end{aligned}$$

Einsetzen in (8.30) liefert

$$-1 + C' + \frac{\sigma^2}{2} C^2 + bC = 0, \qquad C(0) = 0. \tag{8.31}$$

Diese DGL erster Ordnung vom Riccati-Typ lässt sich eindeutig lösen:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{2(e^{\gamma t} - 1)}{\gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)} \\ D(t) &= -\frac{2}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\gamma e^{t(\gamma+b)/2}}{\gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)} \right), \end{aligned} \tag{8.32}$$

wobei

$$\gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2}.$$

Zusammenfassend haben wir:

Satz 8.17 (Bondpreis im CIR Modell) *Zur Zeit t beträgt der Preis für eine Nullcouponanleihe mit Fälligkeit T im CIR Modell*

$$B(t, T) = \exp\big(- r_t C(T - t) - aD(T - t)\big),$$

wo C und D durch (8.32) *gegeben sind.*

8.3 Das Heath–Jarrow–Morton Modell

Wir betrachten jetzt ein Modell, bei dem nicht nur die Zinsrate r einer zufälligen Dynamik unterliegt, sondern die gesamte Zinsstruktur veränderlich ist. Wie in Abschnitt 8.1 gesehen, kann ein Zinsstrukturmodell äquivalent durch die Angabe der Termin–Zinsraten

$$f(t, T) = -\frac{d}{dT} \log B(t, T)$$

bestimmt werden. Die Idee ist, dass die Funktion

$$\mathbb{T} = [0, T^*] \to [0, \infty), \qquad T \mapsto f(0, T)$$

als Anfangsdatum genommen wird. Danach folgt $t \mapsto f(t, \cdot)$ einer zufälligen Dynamik. Genauer: Wir nehmen an, dass W eine Brown'sche Bewegung ist und $\mathbb{F} = \sigma(W)$ die erzeugte Filtration. Ferner seien zufällige, hinreichend glatte Funktionen $(t, T) \mapsto a(t, T) \in \mathbb{R}$ und $(t, T) \mapsto \sigma(t, T) \geq 0$ gegeben, sodass für jedes $T \in [0, T^*]$

$$(a(t, T))_{t \in [0,T]}, \quad (\sigma(t, T))_{t \in [0,T]} \quad \text{sind } \mathbb{F}\text{–adpatiert und messbar}$$

sowie

$$\int_0^T \sigma^2(t, T)\, dt < \infty, \qquad \int_0^T |a(t, T)|\, dt < \infty.$$

Definition 8.18 *Im **Heath–Jarrow–Morton Modell** (HJM) ist die Termin–Zinsrate die Lösung der stochastischen Integralgleichung*

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \sigma(u, T) dW_u + \int_0^t a(u, T)\, du, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{8.33}$$

In welchen Zusammenhang müssen σ und a stehen, damit der Markt arbitragefrei ist? Wir müssen prüfen, unter welchen Bedingungen ein äquivalentes Martingalmaß existiert.

Der Bondpreis ist

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right),$$

die Zinsrate ist $r_t = f(t,t)$. Das Differential im Argument der Exponentialfunktion ist also (siehe Korollar 5.41)

$$\begin{aligned} d\left(\int_t^T f(t,u)\,du\right) &= \left[f(t,t)\,dt - \int_t^T d_t f(t,u)\,du\right] \\ &= r_t\,dt - \int_t^T \left[a(t,u)\,dt - \sigma(t,u)\,dW_t\right]\,du \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} r_t\,dt - \left[\int_t^T a(t,u)\,du\right]\,dt - \left[\int \sigma(t,u)\,du\right]\,dW_t \\ &= r_t\,dt - a^*(t,T)\,dt - \sigma^*(t,T)\,dW_t, \end{aligned}$$

wobei wir abgekürzt haben

$$a^*(t,T) := \int_t^T a(t,u)\,du, \qquad \sigma^*(t,T) := \int_t^T \sigma(t,u)\,du. \tag{8.34}$$

Wir wollen das Differential des diskontierten Bondpreises $\beta_t B(t,T)$ bestimmen. Dabei ist wie üblich $\beta_t = 1/S_t^0$ und S_t^0 das Bankkonto

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t f(u,u)\,du\right).$$

Dann ist mit der Itô-Formel

$$d\beta_t B(t,T) = \beta_t B(t,T)\left(\left[-a^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2\right]dt - \sigma^*(t,T)\,dW_t\right).$$

Damit dies ein Martingal ist, müssen die dt–Terme verschwinden, also muss gelten

$$\int_t^T a(t,u)\,du = \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(t,u)\,du\right)^2, \quad 0 \le t \le T \le T^*. \tag{8.35}$$

Durch Ableiten nach T bekommen wir die äquivalente Bedingung

$$a(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du, \qquad 0 \le t \le T \le T^*. \tag{8.36}$$

Jede diese Bedingungen ist äquivalent dazu, dass $\mathbf{P}$ ein Martingalmaß ist. Wir haben aber noch eine Freiheit, um aus $\mathbf{P}$ ein äquivalentes Martingalmaß zu machen via Girsanov–Transformation. Sei dazu $\gamma : [0,T^*] \to \mathbb{R}$ messbar und adaptiert. Wir nehmen zudem an, dass γ die Voraussetzungen des Satzes von Girsanov (Satz 5.70) erfüllt, also beispielsweise die Novikov Bedingung (vergleiche Proposition 5.69)

$$\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{T^*} (\gamma_t)^2\,dt\right)\right] < \infty. \tag{8.37}$$

Wir bezeichnen
$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \gamma_u \, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_u^2 \, du\right) \tag{8.38}$$
und
$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \gamma_u \, du.$$
Unter dem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß $dQ = Z_{T^*} d\mathbf{P}$ ist $\widetilde{W}$ eine Brown'sche Bewegung.

Das Differential des diskontierten Bondpreises ist
$$d(\beta_t B(t,T)) = \beta_t B(t,T)\left(\left[-a^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2 - \sigma^*(t,T)\gamma_t\right] dt - \sigma^*(t,T)\, d\widetilde{W}_t\right).$$
Also ist $\beta_t B(t,T)$ genau dann ein $(Q,\mathbb{F})$–Martingal, wenn
$$a^*(t,T) = \frac{1}{2}\left(\sigma^*(t,T)\right)^2 - \sigma^*(t,T)\gamma_t, \qquad 0 \le t \le T \le T^*, \tag{8.39}$$
oder äquivalent dazu
$$a(t,T) = \sigma(t,T)\sigma^*(t,T) - \sigma(t,T)\gamma_t, \qquad 0 \le t \le T \le T^*. \tag{8.40}$$

Wir haben damit gezeigt:

Satz 8.19 (Heath–Jarrow–Morton (1992)) *Das Heath–Jarrow–Morton Modell ist arbitragefrei, falls $\sigma(u,T) > 0$ für alle u, T, und falls es ein γ gibt, das* (8.38) *und* (8.39) *(oder äquivalent* (8.40)*) erfüllt.*

Bemerkung 8.20 Unter Q hat $B(t,T)_{t\in[0,T]}$ die Drift
$$B(t,T)\left(r_t - a^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2\right) dt$$
und Volatilität $\sigma^*(t,T)$. Die Drift übertrifft die aktuelle Zinsrate um
$$a^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2.$$
Wir können also die Größe
$$\frac{a^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2}{\sigma^*(t,T)} \tag{8.41}$$
als Risikoprämie (*market price of risk*) auffassen. Vergleiche dazu Definition 6.12. Die Risikoprämie muss für Anleihen jeder Fälligkeit T gleich sein, damit der Markt arbitragefrei ist, also darf der Ausdruck in (8.41) nicht von T abhängen. Diese Eigenschaft ist dann aber gleichwertig zu (8.38), denn wir können dann setzen
$$\gamma_t = \frac{a^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2}{\sigma^*(t,T)}.$$

Bemerkung 8.21 Unter der Bedingung (8.39) gilt
$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \big(\sigma(u,T)\sigma^*(u,T) - \sigma(u,T)\gamma_u\big)\, du + \int_0^t \sigma(u,T)\, dW_u \\ &= f(0,T) + \int_0^t \sigma(u,T)\sigma^*(u,T)\, du + \int_0^t \sigma(u,T)\, d\widetilde{W}_u \end{aligned}$$

Um ein HJM Modell in der Praxis einzusetzen, braucht man also a gar nicht. Die Modell-Parameter sind $f(0,\cdot)$ und σ, und wir können das arbitragefreie HJM Modell definieren durch

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(u,T)\sigma^*(u,T)\,du + \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u. \tag{8.42}$$

Alternativ zu σ kann man natürlich auch eine differenzierbare Funktion σ^* vorgeben mit $\sigma^*(T,T) = 0$ und

$$\sigma(t,T) := \frac{d}{dT}\sigma^*(t,T).$$

Es gilt dann

$$d_t B_t(t,T) = B(t,T)\left(r_t\,dt - \sigma^*(t,T)\,dW_t\right). \tag{8.43}$$

8.4 Zinsratenmodelle als HJM Modelle

Die in Abschnitt 8.2 betrachteten Zinsratenmodelle fallen bei genauerer Betrachtung auch in die Klasse der HJM Modelle. Wir betrachten dafür jetzt ein Zinsratenmodell, wo r die (starke) Lösung einer stochastischen Differentialgleichung ist:

$$dr_t = \alpha(r_t,t)\,dt + \beta(r_t,t)\,dW_t, \tag{8.44}$$

für geeignete, nicht-zufällige Funktionen α und β. Dann ist r Markov'sch. Sei $\mathbb{F} = \sigma(W)$. Dann ist der Bondpreis (siehe (8.6))

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right) = e^{-g(r_t,t,T)},$$

wobei (siehe (8.17))

$$g(x,t,T) := -\log \mathbf{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\,ds\right)\Big| r_t = x\right].$$

Speziell ist $\mathbf{P}$ schon das Martingalmaß für dieses Modell.

Proposition 8.22 *Sind α und β hinreichend glatt, so ist das durch* (8.44) *definierte Zinsratenmodell ein HJM Modell mit*

$$\sigma(t,T) = \beta(r_t,t)\partial_1\partial_3 g(r_t,t,T)$$

und

$$\sigma^*(r,T) = \beta(r_t,t)\partial_1 g(r_t,t,T).$$

Beweis Wir nehmen an, dass die zweiten partiellen Ableitungen von g existieren und vertauschen. Dann ist

$$\partial_3 g(r_t,t,T) = f(t,T).$$

Nach der Itô-Formel ist

$$\begin{aligned} d_t g(r_t,t,T) &= \partial_1 g(r_t,t,T)\,dr_t + \partial_2 g(r_t,t,T)\,dt + \frac{1}{2}\partial_1^2 g(r_t,t,T)\,d\langle r\rangle_t \\ &= \beta\partial_1 g(r_t,t,T)\,dW_t + \left(\partial_2 + \alpha\partial_1 + \frac{1}{2}\beta^2\partial_1^2\right) g(r_t,t,T)\,dt \end{aligned}$$

Also ist das Differential des diskontierten Bond Preises

$$\begin{aligned} d_t\left(\frac{B(t,T)}{S_t^0}\right) &= \frac{B(t,T)}{S_t^0}\left(-d_t g(r_t,t,T) + \frac{1}{2} d\langle g(r_t,t,T)\rangle_t - r_t\,dt\right) \\ &= -\frac{B(t,T)}{S_t^0}\beta\partial_1 g(r_t,t,T)\,dW_t \\ &\quad + \frac{B(t,T)}{S_t^0}\left[-\left(\partial_2 + \alpha\partial_1 + \frac{1}{2}\beta^2\partial_1^2\right) g(r_t,t,T) + \frac{1}{2}(\beta\partial_1 g)^2 - r_t\right] dt \end{aligned} \tag{8.45}$$

Da wir schon wissen, dass $(B(t,T)/(S_t^0))_{t\in[0,T]}$ ein Martingal ist, verschwindet der dt–Term und es bleibt

$$d_t B(t,T) = B(t,T)\left[-\sigma^*(t,T)\,dW_t + r_t\,dt\right],$$

wobei $\sigma^*(t,T) = \beta(r_t,t)\partial_1 g(r_t,t,T)$. Also ist das Modell ein HJM Modell mit Volatilität σ^*. □

Bemerkung 8.23 Man kann auch direkt mit der Itô-Formel zeigen, dass in (8.45) der Ausdruck in den eckigen Klammern verschwindet. Schreiben wir nämlich $H_t(r) = \exp(-\int_t^T r_s\,ds)$ und

$$F(x,t) = \mathbf{E}^{t,x}[H_t(r)],$$

dann ist $g(x,t,T) = -\log F(x,t)$ und

$$\frac{d}{dt}H_t(r) = r_t H_t(r).$$

Die **Kolmogorov'sche Rückwärtsgleichung** für r liefert jetzt

$$\partial_2 F(x,t) = -\alpha(x,t)\partial_1 F(x,t) - \frac{1}{2}\beta^2\partial_1^2 F(t,x) + xF(t,x).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \partial_2 g(x,t,T) &= \alpha\frac{\partial_1 F}{F} + \frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial_1^2 F}{F} - x \\ &= -\alpha\partial_1 g - \frac{1}{2}\beta^2\partial_1^2 g + \frac{1}{2}(\beta\partial_1 g)^2 - x \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur Vorwärtsgleichung (siehe Seite 112) treten hier die Ableitungen nach dem Startzeitpunkt t des Markovprozesses r und nicht die nach dem Endzeitpunkt T auf. □

Vasicek Modell

Im Vasicek Modell ist $\alpha(x,t) = a(b-x)$ für $a,b>0$ und $\beta(x,t) = \beta > 0$. Der logarithmische Bondpreis ist (siehe (8.21))

$$g(x,t,T) = b(T-t) + \frac{x-b}{a}(1-e^{-a(T-t)}) - \frac{\beta^2}{4a^3}\left(2a(T-t) - 3 + 4e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)}\right).$$

Also ist $\partial_1 g(x,t,T) = \frac{1}{a}(1-e^{-a(T-t)})$ und

$$\sigma(t,T) = \beta\partial_3\partial_1 g(r_t,t,T) = \beta e^{-a(T-t)}.$$

Weiterhin erhält man die Anfangsbedingung aus

$$\begin{aligned} f(0,T) &= -\frac{d}{dT}\log B(0,T) = \partial_3 g(r_0,0,T) \\ &= b + (r_0-b)e^{-aT} - \frac{\beta^2}{2a^2}\left(1-e^{-aT}\right)^2. \end{aligned}$$

Cox–Ingersoll–Ross Modell

Hier ist
$$dr_t = (a - b\,r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t,$$
also $\alpha(x,t) = (a - bx),\ \beta(x,t) = \sigma\sqrt{x}$. Der logarithmische Bondpreis ist
$$-\log B(t,T) = g(r_t, t, T)$$
wo
$$g(x,t,T) = xC(T-t) + aD(T-t)$$
ist mit C und $D(t) = \int_0^t C(s)\,ds$ aus (8.32):
$$C(t) = \frac{2(e^{\gamma t} - 1)}{\gamma - b + e^{\gamma t}(\gamma + b)}, \qquad \gamma = \sqrt{b^2 + 2\sigma^2}.$$
Es ist dann
$$\begin{aligned} f(0,T) &= -\frac{d}{dT}\log B(t,T) \\ &= r_0 C'(T) + aC(T) \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} \sigma(t,T) &= \beta(r_t,t)\partial_3\partial_1 g(x,t,T) \\ &= \sigma\sqrt{r_t}\,C'(T-t). \end{aligned}$$

8.5 Mehrfaktoren HJM Modell

Im HJM Modell können wir die Zinsrate bestimmen als
$$r_t = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma(u,t)\,dW_u + \int_0^t a(u,t)\,du. \tag{8.46}$$
Speziell ist r also an $\mathbb{F} = \sigma(W)$ adaptiert. Unter schwachen Voraussetzungen an σ (z.B. strikt positiv fast sicher) gilt aber auch $\mathbb{F} = \sigma(r)$. Wir haben also mit dem HJM Modell doch nur wieder ein Zinsratenmodell hergestellt – mit all den Unzulänglichkeiten, die diese Modelle haben. Zum Beispiel sind alle Termin-Zinsraten perfekt korreliert.

Reichere Modelle, bei denen sich die Filtration nicht aus der Zinsrate zurückgewinnen lässt, erhält man durch die folgende einfache Verallgemeinerung des HJM Modells. Seien $W^1, \ldots, W^n$ unabhängige Brown'sche Bewegungen und $a(t,T)$ und $\sigma_i(t,T),\ i = 1, \ldots, n$, Funktionen, mit
$$\int_0^T |a(t,T)|\,dt < \infty, \qquad \int_0^T (\sigma_i(t,T))^2\,dt < \infty.$$

Definition 8.24 *Das* ***Mehrfaktoren HJM Modell*** *mit n Faktoren ist dasjenige Zinsstrukturmodell, bei dem die Termin–Zinsrate die Lösung der folgenden stochastischen Integralgleichung ist*
$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t a(u,T)\,du + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(u,T)\,dW_u^i, \qquad 0 \le t \le T. \tag{8.47}$$

Beispiel 8.25 (Ho–Lee-Modell mit zwei Faktoren) Dieses Modell ist ein HJM Modell mit zwei Faktoren. Die Integralgleichung für die Termin–Zinsraten ist

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma_1 \, dW_u^1 + \int_0^t \sigma_2 e^{-\lambda(T-u)} \, dW_u^2 + \int_0^t a(u,T) \, du, \tag{8.48}$$

wobei $\sigma_1, \, \sigma_2, \lambda > 0$ Konstanten sind und

$$a(t,T) = \sigma_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda(T-t)}\right) e^{-\lambda(T-t)}. \tag{8.49}$$

Die Bedingung (8.49) stellt sicher, dass $\mathbf{P}$ das Martingalmaß ist.

Interpretation:

- W_1 produziert Fluktuationen, die im ganzen Verlauf der Zinskurve in gleicher Weise zu spüren sind.
- W_2 produziert kurzreichweitige Fluktuationen.

Der Bondpreis kann berechnet werden zu

$$\begin{aligned} -\log(B(t,T)) &= \int_t^T f(t,u) \, du \\ &= \sigma_1(T-t) + \frac{\sigma_2}{\lambda} \left(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}\right) \int_0^t e^{\lambda s} dW_s^2 + \int_0^t f(0,u) \, du + \int_0^t \int_t^T a(s,u) \, du \, ds. \end{aligned} \tag{8.50}$$

Die momentane Zinsrate ist

$$r_t = \sigma_1 W_t^1 + \sigma_2 e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \, dW_s^2 + f(0,t) + \int_0^t a(s,t) \, ds. \tag{8.51}$$

Insbesondere sieht man, dass nicht W^1 und W_2 beide aus r rekonstruiert werden können. Mithin lässt sich auch B nicht aus r rekonstruieren. Wir haben also ein Modell vorliegen, das echt reicher ist, als ein Zinsratenmodell.

Index