Einführung in die Stochastik

Wintersemester 2021/2022

Achim Klenke
Institut für Mathematik
Fachbereich 08
Universität Mainz
Staudingerweg 9
55099 Mainz
math@aklenke.de

Korrigierte Fassung vom 26.01.2022

Vorwort

Stochastik ist die mathematische und rechnerische Untersuchung aller Phänomene, die mit Zufall zu tun haben. Dabei unterteilen wir die Stochastik in zwei Teilgebiete:

1. **Wahrscheinlichkeitstheorie** (W-Theorie) Diese bildet mathematische Modelle, die zufälliges Geschehen beschreiben sollen und untersucht diese Modelle quantitativ und qualitativ.

2. **Statistik** Die Statistik möchte zu konkret vorgegebenen Datensätzen (möglicherweise zufälliger) Beobachtungen ein w-theoretisches Modell finden, das in gewissem Sinne gut zu den Daten passt und diese „erklären" kann. Außerdem ist die Statistik natürlich behilflich bei der Planung von Versuchen, damit die gewonnenen Datensätze auch brauchbar sind im Sinne einer statistischen Auswertung.

Es bleiben noch die Fragen:
Was ist Zufall?
Genau genommen beschäftigt sich die Mathematik mit dieser Frage gar nicht, sondern rechnet mit Modellen, deren Interpretation dem einzelnen überlassen wird. Grob gesprochen ist ein Experiment zufällig, wenn man vor dem Experiment auch bei genauer Kontrolle der Experimentierbedingungen den Ausgang nicht vorhersagen kann. Dies kann einerseits an grundsätzlicher Unmöglichkeit der Vorhersage liegen, wie die Quantenmechanik nahe legt, oder lediglich daran, dass man die Bedingungen eben doch nicht genau genug kennt, beziehungsweise aus ihnen den genauen Ausgang des Experiments nicht vorhersagen kann. Bei einem Würfelwurf ist der Ausgang zufällig, da wir die Startbedingungen nicht genau kennen. Bei der Geburt eines Kindes ist das Geschlecht meist vorher bekannt. Wenn man aber pränatale Diagnostik ignoriert, so kann man es als zufällig betrachten. Zufall beschreibt also immer auch den subjektiven Grad der Unkenntnis.

Was ist Wahrscheinlichkeit? Um Zufall zu quantifizieren, möchten wir jedem Ereignis A, das bei einem Zufallsexperiment auftreten kann, eine Zahl $\mathbf{P}[A] \in [0,1]$ zuordnen, die angibt, wie sehr wir das Eintreten von A erwarten. Die vielleicht prägnanteste Deutung ist die frequentistische Deutung: Wir gehen von der prinzipiellen unabhängigen Wiederholbarkeit des Experiments aus. Tritt dann bei n Experimenten $h_n(A)$-mal A ein, so sollte $h_n(A)/n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}[A]$ gelten. Diese Deutung des Zufalls wird in den Gesetzen der großen Zahl formalisiert.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Der Begriff des Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit werden an die Spitze der Betrachtungen gestellt und danach als gegeben angesehen. Nachdem wir den formalen Rahmen abgesteckt haben, bringen wir einige wichtige Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen.

1.1 Ereignisse

Sei Ω eine nichtleere Menge. Jedes $\omega \in \Omega$ stellt ein **Elementarereignis** dar. Durch Ω sind alle irgendwie gearteten Ausgänge eines betrachteten Zufallsexperimentes kodiert. Mit 2^Ω bezeichnen wir die Potenzmenge von Ω. Mit $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ bezeichnen wir das Mengensystem der (beobachtbaren) **Ereignisse**.

Beispiel 1.1 Werfen eines sechsseitigen Würfels.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \qquad \mathcal{A} = 2^\Omega.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \ni A &= \{1, 3, 5\} \\ &= \text{„ungerade Augenzahl“}. \end{aligned}$$ ◇

Beispiel 1.2 Dreimaliges Werfen eines sechsseitigen Würfels.

$$\begin{aligned} \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) :\, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{1, \ldots, 6\}\}, \\ \mathcal{A} = 2^\Omega. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Ereignisse A und B

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \ni A &= \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 = 4\,\} \\ &= \text{„Augensumme der ersten beiden Würfe ist genau vier“} \\ \mathcal{A} \ni B &= \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega : \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \geq 7\,\} \\ &= \text{„Augensumme aller drei Würfe ist mindestens sieben“}. \end{aligned}$$ ◇

Beispiel 1.3 Wie Beispiel 1.2, jedoch können wir den dritten Wurf nicht mehr beobachten. Dann ist

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \left\{ \tilde{A} \times \{1,\ldots,6\} : \ \tilde{A} \subset \{1,\ldots,6\}^2 \right\} \\ &= \left\{ \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) \in \Omega : \ (\omega_1,\omega_2) \in \tilde{A}\}, \ \tilde{A} \subset \{1,\ldots,6\}^2 \right\}.\end{aligned}$$

Dann ist $A \in \mathcal{A}$, aber $B \notin \mathcal{A}$. Klar, denn die Augensumme kennen wir nicht, wenn wir den letzten Wurf nicht kennen. $\diamond$

Beispiel 1.4 Ein Glücksrad bleibt bei einem zufälligen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ stehen. Wir können den Winkel nur mit einer Genauigkeit $\frac{2\pi}{N}$ messen, wobei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Skalenstriche des Winkelmessers ist. Genauer: das Messgerät liefert auf Vielfache von $\frac{2\pi}{N}$ abgerundete Werte $\hat{\alpha} = \frac{2\pi}{N} \left\lfloor \frac{N}{2\pi}\alpha \right\rfloor$. Wir wählen

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 2\pi) \\ \mathcal{A} &= \left\{ \tilde{A} + [0, 2\pi/N) : \ \tilde{A} \subset \left\{0, \frac{2\pi}{N}, 2\,\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\,\frac{2\pi}{N}\right\}\right\} \\ &= \left\{ \left\{ \omega \in \Omega : \ \frac{2\pi}{N}\left\lfloor \frac{N}{2\pi}\omega \right\rfloor \in \tilde{A} \right\} : \ \tilde{A} \subset \left\{0, \frac{2\pi}{N}, 2\,\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\,\frac{2\pi}{N}\right\}\right\} \\ &= \left\{ X^{-1}(\tilde{A}) : \ \tilde{A} \subset \left\{0, \frac{2\pi}{N}, 2\,\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\,\frac{2\pi}{N}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Dabei ist X die Abbildung, die die Projektion des Winkels auf die vom Messgerät darstellbaren Winkel beschreibt:

$$X : \Omega \to \left\{0, \frac{2\pi}{N}, 2\,\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\,\frac{2\pi}{N}\right\}, \quad \omega \mapsto \frac{2\pi}{N}\left\lfloor \frac{N}{2\pi}\omega \right\rfloor.$$

Es tritt also $A = \tilde{A} + [0, 2\pi/N)$ genau dann ein, wenn unser Messgerät einen Wert $\hat{\alpha} \in \tilde{A}$ anzeigt. Der wahre Wert liegt dann in $\hat{\alpha} + [0, 2\pi/N)$. $\diamond$

Wir führen folgende Sprechweisen ein (für $A, B \in \mathcal{A}$):

Formal	in Worten
$\emptyset$	das unmögliche Ereignis
Ω	das sichere Ereignis
A	„A tritt ein“
$A^c := \Omega \setminus A$	„A tritt nicht ein“, A^c heißt **Gegenereignis** von A.
$A \cap B$	„A und B treten ein“
$A \cup B$	„A oder B treten ein“
$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$	„A oder B treten ein, aber nicht beide“,
$A \subset B$	„A impliziert B“.

Damit alle logischen Implikationen, die wir aus der Beobachtung von Ereignissen ziehen können, auch wieder Ereignisse sind, muss $\mathcal{A}$ gewisse Abgeschlossenheitsbedingungen erfüllen. Es müssen gelten:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$,

(iv) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

Um Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen und Limiten von Folgen von Wahrscheinlichkeiten zu betrachten, ist es nützlich, statt (iv) sogar zu fordern:

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Definition 1.5 *Erfüllt $\mathcal{A}$ (i), (ii) und (iv), so heißt $\mathcal{A}$ eine* ***Algebra*** *auf Ω. Erfüllt $\mathcal{A}$ (i), (ii) und (iii), so heißt $\mathcal{A}$ eine* ***σ-Algebra*** *auf Ω. Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt dann ein* ***Messraum*** *oder* ***Ereignisraum****. Die Elemente $A \in \mathcal{A}$ heißen* ***Ereignisse****.*

Im Folgenden werden stets Messräume den Grundraum an Ereignissen liefern.

Satz 1.6 *Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

(i') $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii') $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii') $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Beweis Wir zeigen nur, dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Aussagen (i'), (ii') und (iii') gelten. Die andere Richtung geht analog.

Es gelten also (i), (ii), (iii).

(i') Nach (i) und (ii) ist $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{A}$.

(ii') Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann ist $B \setminus A = B \cap A^c = (B^c \cup A)^c \in \mathcal{A}$.

(iii') Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Nach den de Morgan'schen Regeln (und (ii) und (iii)) ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}. \qquad \square$$

Beispiele 1.7 (i) Ist $\Omega \neq \emptyset$ beliebig, so sind $\{\emptyset, \Omega\}$ und 2^{Ω} die gröbste und die feinste σ-Algebra auf Ω.

(ii) Ist Ω endlich, so ist jede Algebra auf Ω auch eine σ-Algebra.

(iii) In den Beispielen 1.1–1.4 ist stets $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. ◇

Sei $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$. Wenn wir das Eintreten (oder Nichteintreten) von jedem $A \in \mathcal{E}$ beobachten können, wie sieht dann das System aller beobachtbarer, oder sich logisch erschließender, Ereignisse aus?

Satz 1.8 *Der Schnitt aller σ-Algebren $\mathcal{A}'$, die $\mathcal{E}$ enthalten,*

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}' \supset \mathcal{E} \colon \mathcal{A}' \text{ ist } \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{A}'$$

ist eine σ-Algebra.

Definition 1.9 *$\sigma(\mathcal{E})$ heißt die von $\mathcal{E}$ **erzeugte σ-Algebra**. Gilt $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$, dann heißt $\mathcal{E}$ ein **Erzeuger** von $\mathcal{A}$. $\mathcal{E}$ heißt **schnittstabil** (oder $\cap$-stabil), falls $(A, B \in \mathcal{E} \implies A \cap B \in \mathcal{E})$.*

Beweis (i) Offenbar ist $\emptyset \in \sigma(\mathcal{E})$.

(ii) Ist $A \in \sigma(\mathcal{E})$, so ist $A \in \mathcal{A}'$ für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \supset \mathcal{E}$. Also ist $A^c \in \mathcal{A}'$ für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \supset \mathcal{E}$. Mithin ist $A^c \in \sigma(\mathcal{E})$.

(iii) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{E})$, so ist jedes $A_n \in \mathcal{A}'$ für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \supset \mathcal{E}$. Also ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}'$ für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \supset \mathcal{E}$ und damit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{E})$. □

Beispiele 1.10 (i) Seien $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und $\mathcal{E} = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\big\}$. Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = 2^{\Omega}$.

(ii) Seien

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, \ldots, 6\}^2, \\ \mathcal{A} &= \big\{\{\omega \in \Omega : \omega_1 \in \tilde{A}\} : \tilde{A} \subset \{1, \ldots, 6\}\big\} \text{ und} \\ \mathcal{E} &= \big\{\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, 6\},\ k = 1, \ldots, 6\big\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$.

(iii) Seien

$$\begin{aligned} \Omega &= [0, 2\pi), \\ \mathcal{A} &= \left\{\tilde{A} + [0, 2\pi/N) : \tilde{A} \subset \left\{0, \frac{2\pi}{N}, \ldots, \frac{2\pi(N-1)}{N}\right\}\right\} \text{ und} \\ \mathcal{E} &= \left\{ \left[\frac{2\pi k}{N}, \frac{2\pi(k+1)}{N}\right) : k \in \{0, \ldots, N-1\}\right\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

(iv) Seien $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{E} = \big\{U \subset \mathbb{R}^d : U \text{ ist offen}\big\}$. Dann ist $\mathcal{E}$ ein schnittstabiler Erzeuger der so genannten **Borel'schen σ-Algebra** $\mathcal{B}^d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{E})$ auf $\mathbb{R}^d$. ◇

Wir kommen jetzt zu einem Satz, der Aufschluss über die Struktur von σ-Algebren auf abzählbaren Räumen Ω gibt.

Satz 1.11 *Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und Ω abzählbar. Dann existieren $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit*

$$E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \text{falls } i \neq j, \tag{i}$$

$$\bigcup_{i:\, E_i \subset A} E_i = A \quad \text{für jedes } A \in \mathcal{A}, \tag{ii}$$

$$\sigma(\{E_i,\ i \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{A}. \tag{iii}$$

*Die E_i heißen unzerlegbare Ereignisse oder **Atome** von $\mathcal{A}$. Bis auf Nummerierung sind die Atome eindeutig festgelegt (dies folgt aus (ii)).*

Beweis Zu jedem $\omega \in \Omega$ bilden wir

$$E(\omega) := \bigcap_{A:\, \mathcal{A} \ni A \ni \omega} A.$$

Dies ist im allgemeinen ein überabzählbarer Schnitt, also nicht automatisch in $\mathcal{A}$. Setze für $\omega, \omega' \in \Omega$

$$\mathcal{C}_{\omega,\omega'} = \big\{A \in \mathcal{A} : \omega \in A,\ \omega' \notin A\big\}.$$

Ist $\mathcal{C}_{\omega,\omega'} = \emptyset$, so setze $A_{\omega,\omega'} := \Omega$, andernfalls wählen wir ein beliebiges

$$A_{\omega,\omega'} \in \mathcal{C}_{\omega,\omega'}.$$

Ist $\mathcal{C}_{\omega,\omega'} = \emptyset$, so ist $\omega' \in A$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\omega \in A$, also ist $\omega' \in E(\omega)$ und damit $\{\omega' : \mathcal{C}_{\omega,\omega'} = \emptyset\} \subset E(\omega)$. Mithin gilt (wegen $\omega' \notin A_{\omega,\omega'}$, falls $\mathcal{C}_{\omega,\omega'} \neq \emptyset$)

$$E(\omega) \subset \bigcap_{\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}} A_{\omega,\omega'} = \bigcap_{\omega' \in \Omega :\, \mathcal{C}_{\omega,\omega'} \neq \emptyset} A_{\omega,\omega'} \subset \{\omega' : \mathcal{C}_{\omega,\omega'} = \emptyset\} \subset E(\omega).$$

Insgesamt ist also

$$E(\omega) = \bigcap_{\omega' \in \Omega \setminus \{\omega\}} A_{\omega,\omega'} \in \mathcal{A}$$

als abzählbarer Schnitt.

„(i)“ Per Konstruktion gilt für $\omega, \omega' \in \Omega$ stets entweder $E(\omega) = E(\omega')$ oder $E(\omega) \cap E(\omega') = \emptyset$.

„(ii)“ Sei $A \in \mathcal{A}$. Offenbar ist $\omega \in E(\omega) \subset A$, falls $\omega \in A$, also

$$A \subset \bigcup_{\omega \in A} E(\omega) \subset \bigcup_{\omega : E(\omega) \subset A} E(\omega) \subset A.$$

Hieraus folgt die zweite Eigenschaft.

„(iii)“ Bilde jetzt eine Abzählung $\{E_1, E_2, \ldots\}$ von $\{E(\omega) : \omega \in \Omega\}$. Falls $n := \#\{E(\omega) : \omega \in \Omega\} < \infty$, so setze $E_{n+1} = E_{n+2} = \ldots = \emptyset$. Da die Vereinigung in (ii) abzählbar ist, ist jedes $A \in \mathcal{A}$ auch in $\sigma(\{E_i,\, i \in \mathbb{N}\})$. Wegen $E_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $\sigma(\{E_i,\, i \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{A}$. □

Indem wir alle Punkte in den E_i identifizieren, können wir annehmen, dass jedes E_i einelementig ist oder leer. Es ist also $(\Omega, \mathcal{A})$ äquivalent (i.e.S. isomorph) zu $(\tilde{\Omega}, 2^{\tilde{\Omega}})$, wobei $\tilde{\Omega} := \{E_i : i \in \mathbb{N},\, E_i \neq \emptyset\}$. Es reicht daher bei abzählbaren Räumen Ω stets, $\mathcal{A} = 2^\Omega$ zu betrachten. Dessen ungeachtet ist es aus systematischen Gründen manchmal nützlich, kleinere σ-Algebren zu betrachten (vergleiche Beispiel 1.3).

Definition 1.12 *Ist Ω abzählbar, so nennen wir $(\Omega, 2^\Omega)$ einen **diskreten Messraum**.*

Ist $\Omega = \mathbb{R}^d$, so können wir auf 2^Ω in vielen Beispielen nicht in konsistenter Weise Wahrscheinlichkeiten definieren. Hier wählen wir typischerweise die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Später werden wir den folgenden Satz benötigen, dessen Beweis beim ersten Lesen ausgelassen werden kann.

Satz 1.13 *Sei für $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$*

$$L_x := (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_d].$$

Dann ist

$$\mathcal{E} := \{L_x : x \in \mathbb{R}^d\}$$

ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis Offenbar ist $\mathcal{E}$ schnittstabil, denn $L_x \cap L_y = L_{x \wedge y}$, wo $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, \ldots, x_d \wedge y_d)$.

Da $(L_x)^c$ offen ist, ist $(L_x)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, also $L_x = ((L_x)^c)^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Daher gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Sei
$$\tilde{L}_x = (-\infty, x_1) \times \ldots \times (-\infty, x_d).$$
Dann ist
$$\tilde{L}_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_{x-(1/n,\ldots,1/n)} \in \sigma(\mathcal{E}).$$

Also ist für $x \in \mathbb{R}^d$ und $\varepsilon > 0$ (mit e^i der i-te Einheitsvektor)

$$\begin{aligned} Q_{x,\varepsilon} &:= \{y \in \mathbb{R}^d : \|x-y\|_\infty < \varepsilon\} \\ &= \tilde{L}_{x+(\varepsilon,\ldots,\varepsilon)} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{d} L_{x-\varepsilon e^i} \right) \quad \in \sigma(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Für jede offene Menge $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^d$ existieren $x^1, x^2, \ldots$ und $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots$, so, dass

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_{x^i,\varepsilon^i} \in \sigma(\mathcal{E}).$$

Also ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathcal{E})$. □

1.2 Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten einen Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und wollen jedem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eine Maßzahl $\mathbf{P}[A] \in [0,1]$ zuordnen, die wir als Wahrscheinlichkeit interpretieren. Offenbar muss die Abbildung $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ ein paar einfache Eigenschaften erfüllen:

(i) $\mathbf{P}[\emptyset] = 0, \mathbf{P}[\Omega] = 1.$

(ii) Sind $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$, so gilt $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$.

Statt (ii) fordern wir Additivität auch für abzählbare Folgen disjunkter Ereignisse.

Definition 1.14 (Kolmogorov'sche Axiome) *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Eine Abbildung $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ heißt* ***Wahrscheinlichkeitsmaß*** *auf $(\Omega, \mathcal{A})$, (oder eine* ***Wahrscheinlichkeitsverteilung****) falls gilt:*

(i) Normierung: $\mathbf{P}[\Omega] = 1$,

(ii) σ-Additivität: Für jede Folge $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt

$$\mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i].$$

Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ heißt ***Wahrscheinlichkeitsraum*** *(W-Raum).*

Ist Ω höchstens abzählbar und $\mathcal{A} = 2^\Omega$, so nennen wir $(\Omega, 2^\Omega, \mathbf{P})$ einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Ebenfalls nennen wir das Paar $(\Omega, \mathbf{P})$ einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

Beispiel 1.15 Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und sei $x \in \Omega$. Dann wird durch

$$\mathbf{P}[A] = \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. Wir nennen $\delta_x := \mathbf{P}$ das **Dirac-Maß** in x oder die **Einheitsmasse** in x. ◇

Beispiel 1.16 Seien Ω endlich und $\mathbf{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega}$. Dann ist $(\Omega, \mathbf{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir nennen $\mathbf{P}$ die **Gleichverteilung** auf Ω. Das Paar $(\Omega, \mathbf{P})$ nennen wir einen **Laplace-Raum**. ◇

Beispiele 1.17 (i) Einfacher Würfelwurf mit einem fairen Würfel. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathbf{P}[A] = \frac{1}{6}\#A$. $(\Omega, \mathbf{P})$ ist augenscheinlich ein Laplace-Raum.

(ii) Dreifacher Wurf eines fairen Würfels. $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$. $\mathbf{P}[A] = \frac{1}{216}\#A$. Auch hier ist $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Laplace Raum.

(iii) Wurf einer gefälschten Münze. Seien $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ und $\mathbf{P}[\{\text{Kopf}\}] = p$ für ein $p \in [0, 1]$. Dann ist $\mathbf{P}[\{\text{Zahl}\}] = 1 - p$. Wir nennen ein solches Zufallsexperiment mit nur zwei Ausgängen ein **Bernoulliexperiment**. Interpretieren wir „Kopf“ als Erfolg, so nennen wir p die Erfolgswahrscheinlichkeit.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß Ber_p auf $\Omega = \{0, 1\}$ mit $\mathrm{Ber}_p(\{1\}) = p$ nennen wir **Bernoulli Verteilung** mit Erfolgsparameter p.

(Ω, Ber_p) ist genau dann ein Laplace-Raum, wenn $p = \frac{1}{2}$ gilt.

(iv) Bernoulli-Experiment der Länge n. Seien $\Omega = \{0, 1\}^n$ und

$$\mathbf{P}[\{\omega\}] = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i}(1 - p)^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i}, \qquad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega. \tag{1.1}$$

Dann beschreibt $(\Omega, \mathbf{P})$ die n-fache „unabhängige“ Ausführung eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. (Wir haben hier einen intuitiven Begriff der Unabhängigkeit angenommen. Mathematisch wird die Unabhängigkeit gerade durch (1.1) *definiert*. Eine ausführliche Definition der Unabhängigkeit folgt im nächsten Kapitel.)
Für $p = \frac{1}{2}$ ist $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Laplace-Raum. ◇

Beispiel 1.18 Ist Ω höchstens abzählbar und $p : \Omega \to [0, 1]$ eine Abbildung mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$, so wird durch

$$\mathbf{P}[A] = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \qquad \text{für } A \subset \Omega,$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\Omega, 2^\Omega)$ definiert. Wir nennen p die **Gewichtsfunktion** von $\mathbf{P}$ und $p(\omega)$ das Gewicht auf ω. ◇

Beispiel 1.19 Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $(\Omega_i, \mathbf{P}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ diskrete Wahrscheinlichkeitsräume. Dann wird auf

$$\Omega := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ definiert durch die Gewichtsfunktion

$$p(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \mathbf{P}[\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}] = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}_i[\{\omega_i\}].$$

Wir nennen

$$\mathbf{P} =: \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{P}_n$$

das **Produktmaß** der $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$. Der **Produktraum** $(\Omega, \mathbf{P}) = (\prod_{i=1}^n \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^n \mathbf{P}_i)$ beschreibt die unabhängige Ausführung der Experimente $(\Omega_i, \mathbf{P}_i)$.

Ist speziell $\Omega_1 = \ldots = \Omega_n$ und $\mathbf{P}_1 = \ldots = \mathbf{P}_n$, so schreiben wir $(\Omega, \mathbf{P}) = (\Omega_1^n, \mathbf{P}_1^{\otimes n})$. Das Bernoulli-Experiment der Länge n ist ein Produkt von (einfachen) Bernoulli-Experimenten. $\diamond$

Definition 1.20 (Fast sichere Eigenschaften) *Sei $E(\omega)$ eine Eigenschaft, die dem Punkt $\omega \in \Omega$ zukommen kann. Wir sagen, dass E **fast sicher** (oder $\mathbf{P}$-fast sicher), kurz „f.s.“, gilt, wenn es eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mathbf{P}[N] = 0$ gibt, so dass $E(\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt.*

Beispiel 1.21 Seien $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Ferner sei $\mathbf{P}$ wie in Beispiel 1.18 durch die Gewichte $p(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ definiert. Sei $p(n) = \binom{10}{n} 2^{-10}$ für $n = 0, 1, \ldots, 10$ und $p(n) = 0$ für $n \geq 11$. Dann ist $n \leq 10$ fast sicher.

Etwas klarer wird die auf den ersten Blick vielleicht etwas klobige Definition von „fast sicher“, wenn wir auf $\Omega = \mathbb{N}_0$ die σ-Algebra $\mathcal{A}$ betrachten, die durch $\mathcal{E} = \{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{10\}\}$ erzeugt wird. Für $A \subset \{0, \ldots, 10\}$ setzen wir $\mathbf{P}[A] = \sum_{n \in A} \binom{10}{n} 2^{-10}$. Dies ist im wesentlichen der selbe W-Raum wie oben, jedoch können die Punkte $n \geq 11$ nicht unterschieden werden, denn $\{11\}$, $\{12\}$ usw. sind keine Ereignisse. Dennoch gilt beispielsweise $n \leq 15$ fast sicher. Zwar ist $\mathbf{P}[\{0, \ldots, 15\}]$ nicht definiert, weil $\{0, \ldots, 15\}$ kein Ereignis ist. Aber $N = \{11, 12, \ldots\}$ ist ein Ereignis mit $\mathbf{P}[N] = 0$, und es ist $n \leq 15$ für jedes $n \in \Omega \setminus N = \{0, \ldots, 10\}$.

Der Grund für die zunächst etwas merkwürdige Definition von „fast sicher“ liegt also darin, dass man sich nicht darum sorgen möchte, ob die Menge der ω, denen $E(\omega)$ nicht zukommt, ein Ereignis ist, oder lediglich Teilmenge eines Ereignisses, das aber Wahrscheinlichkeit Null hat. $\diamond$

Wir fassen ein paar elementare Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen in einem Satz zusammen.

Satz 1.22 *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

(i) *Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mathbf{P}[A^c] = 1 - \mathbf{P}[A]$.*

(ii) $\mathbf{P}[\emptyset] = 0$.

(iii) *Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $\mathbf{P}[A] \leq \mathbf{P}[B]$.*

(iv) *Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A \cap B]$.*

(v) *Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i].$$

(vi) *Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ und gelte $A_n \uparrow A$ (das heißt: $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots \subset A$ und $\bigcup_{n=1}^\infty A_n = A$) oder $A_n \downarrow A$ (das heißt: $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots \supset A$ und $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = A$). Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}[A_n] = \mathbf{P}[A].$$

Beweis (i) A und A^c sind disjunkt. Daher gilt $\mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[A^c] = \mathbf{P}[A \cup A^c] = \mathbf{P}[\Omega] = 1$.

(ii) Wie (i) mit $A = \emptyset$.

(iii) $\mathbf{P}[B] = \mathbf{P}[A \cup (B \setminus A)] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B \setminus A] \geq \mathbf{P}[A]$.

(iv)
$$\begin{aligned}\mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] &= \mathbf{P}[A \cap B] + \mathbf{P}[A \setminus B] + \mathbf{P}[B] \\ &= \mathbf{P}[A \cap B] + \mathbf{P}[(A \setminus B) \cup B] \\ &= \mathbf{P}[A \cap B] + \mathbf{P}[A \cup B].\end{aligned}$$

(v) Seien $B_1 = A_1$ und $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \subset A_n$ für $n = 2, 3, \ldots$ Dann gilt $B_m \cap B_n = \emptyset$ für $m \neq n$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, also
$$\mathbf{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \mathbf{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[B_n] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_n].$$

(vi) Gelte $A_n \uparrow A$. Setze formal $A_0 = \emptyset$. Die Mengen $(A_i \setminus A_{i-1})_{i \in \mathbb{N}}$ sind paarweise disjunkt, und es gilt $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \setminus A_{i-1})$. Daher ist
$$\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus A_{i-1}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_i \setminus A_{i-1}] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}[A_i \setminus A_{i-1}] = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}[A_n].$$

Für den Fall $A_n \downarrow A$ beachte $A_n^c \uparrow A^c$ und verwende (i). □

1.3 Der Maßfortsetzungssatz

Um ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$ zu definieren, ist es meist nicht praktikabel, $\mathbf{P}[A]$ für *alle* $A \in \mathcal{A}$ explizit festzulegen. Dafür ist $\mathcal{A}$ im Allgemeinen viel zu groß. Oftmals reicht es auch, $\mathbf{P}[A]$ für A aus einem geeigneten Teilsystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ aller Ereignisse zu definieren.

Beispiel 1.23 Seien $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$.

(i) Es reicht, $\mathbf{P}[\{n\}]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zu kennen. Denn für beliebiges $A \in \mathcal{A}$ ist wegen der σ-Additivität von $\mathbf{P}$
$$\mathbf{P}[A] = \sum_{n \in A} \mathbf{P}[\{n\}].$$
Wir können also $\mathcal{E} = \big\{\{n\} : n \in \Omega\big\}$ wählen, das Teilsystem aller einelementigen Teilmengen von Ω. Offenbar geht dies für jeden diskreten Wahrscheinlichkeitsraum.

(ii) Es reicht, $\mathbf{P}[\{0, \ldots, n\}]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zu kennen. In der Tat können wir hieraus
$$\mathbf{P}[\{n\}] = \mathbf{P}[\{0, \ldots, n\}] - \mathbf{P}[\{0, \ldots, n-1\}] \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
berechnen. Nach (i) reicht dies wiederum aus, um $\mathbf{P}$ vollständig zu kennen. ◇

Eine nützliches Kriterium dafür, ob ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ ausreichend groß ist, um $\mathbf{P}$ eindeutig festzulegen, ist Schnittstabilität.

Satz 1.24 *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein beliebiger Messraum und sei $\mathcal{E}$ ein schnittstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$. Sind P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $P(A) = Q(A)$ für alle $A \in \mathcal{E}$, so ist $P = Q$.*

Wir wollen diesen Satz in dieser Vorlesung nicht beweisen, sondern verweisen auf die „Stochastik I“, beziehungsweise auf [9, Lemma 1.42]. Häufiger noch als die Situation, in der wir ein W-Maß bereits *haben* und uns nur noch um die Eindeutigkeit sorgen, ist diejenige, wo wir lediglich die Werte $\mathbf{P}[E]$, $E \in \mathcal{E}$ haben und uns ein W-Maß $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{A}$ *wünschen*, das auf $\mathcal{A}$ eben diese Werte annimmt. Mit anderen Worten, wir wollen eine Funktion $\mathbf{P} : \mathcal{E} \to [0,1]$ zu einer Funktion $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ so fortsetzen, dass sie ein W-Maß ist. Offenbar müssen wir hierfür ein paar minimale Anforderungen sowohl an $\mathcal{E}$ als auch an die Werte von $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{E}$ stellen. Beispielsweise muss $\mathbf{P}[A] \leq \mathbf{P}[B]$ gelten, wenn $A, B \in \mathcal{E}$ sind mit $A \subset B$. Außerdem muss $\mathcal{E}$ wieder groß genug sein.

Definition 1.25 *Ein Mengensystem $\mathcal{E} \subset 2^\Omega$ heißt **Semiring**, falls gilt:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$,

(ii) für je zwei Mengen $A, B \in \mathcal{E}$ ist $B \setminus A$ endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{E}$,

(iii) $\mathcal{E}$ ist schnittstabil.

Beispiel 1.26 Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$. Für $a, b \in (\overline{\mathbb{R}})^n$, d.h., $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ mit $a_i, b_i \in [-\infty, \infty]$ definieren wir den **Quader**

$$Q_{a,b} := \Big((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]\Big) \cap \mathbb{R}^n,$$

falls $a \leq b$, d.h., falls $a_i < b_i$ für alle i und $Q_{a,b} = \emptyset$ sonst. Man beachte, dass der Schnitt mit $\mathbb{R}^n$ nur den Sinn hat, dass wir für einzelne (oder alle) b_i den Wert ∞ zulassen können und dennoch einen Quader in $\mathbb{R}^n$ erhalten.

Es sind dann $\mathcal{E} = \{Q_{a,b} : a, b \in \mathbb{R}^n\}$ und $\mathcal{E}' = \{Q_{a,b} : a, b \in (\overline{\mathbb{R}})^n\}$ Semiringe. Speziell für $n = 1$ ist $\mathcal{E} = \{(a, b] : -\infty < a \leq b < \infty\}$ und $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. $\diamond$

Satz 1.27 (Fortsetzungssatz für Maße) *Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, und sei $\mathcal{E}$ ein Semiring auf Ω mit $\Omega \in \mathcal{E}$, der die σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω erzeugt. Sei $\tilde{\mathbf{P}} : \mathcal{E} \to [0,1]$ eine Funktion mit den Eigenschaften*

(i) $\tilde{\mathbf{P}}[\emptyset] = 0$ *und* $\tilde{\mathbf{P}}[\Omega] = 1$.

(ii) (Additivität) Für je endlich viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ mit $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{E}$ gilt

$$\tilde{\mathbf{P}}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{P}}[A_i].$$

*(iii) (σ-**Subadditivität**) Für je abzählbar viele $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}$ mit $A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ gilt*

$$\tilde{\mathbf{P}}[A] \leq \sum_{i=1}^\infty \tilde{\mathbf{P}}[A_i].$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes W-Maß $\mathbf{P}$ auf $\mathcal{A}$ mit $\mathbf{P}[A] = \tilde{\mathbf{P}}[A]$ für jedes $A \in \mathcal{E}$.

Beweis Siehe [9, Satz 1.53]. $\square$

Mit den beiden vorangehenden Sätzen können wir nun auch Wahrscheinlichkeitsmaße auf Räumen Ω definieren, die nicht abzählbar sind. Speziell sind wir an $\Omega = \mathbb{R}$ und $\Omega = \mathbb{R}^d$ interessiert. Der folgende Satz ist eine einfache Schlussfolgerung aus Satz 1.27.

Satz 1.28 *(i) Seien $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ eine (Riemann-) integrierbare Funktion mit*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_d)\,dx_d \cdots dx_1 \;=\; 1.$$

Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit

$$\mathbf{P}\big[(x_1,y_1] \times \cdots \times (x_d,y_d]\big] \;=\; \int_{x_1}^{y_1} \cdots \int_{x_d}^{y_d} f(t_1,\ldots,t_d)\,dt_d \cdots dt_1,$$

*für $x_i \le y_i$, $i = 1,\ldots,d$. $\mathbf{P}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}^d$ mit **Dichte** f.*

(ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Die Abbildung $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ habe die Eigenschaften

(a) F ist monoton wachsend,

(b) F ist rechtsstetig,

(c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Dann wird durch

$$\mathbf{P}[(a,b]] = F(b) - F(a) \qquad \text{für } \; a < b,$$

*ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definiert. F heißt die **Verteilungsfunktion** von $\mathbf{P}$.*

Umgekehrt wird für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ durch $F_{\mathbf{P}} : x \mapsto \mathbf{P}[(-\infty, x]]$ eine Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert.

(iii) Die Aussagen aus (i) gelten auch, wenn wir $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \,:\, A \subset \Omega\}$ wählen. Speziell also für Intervalle, Quader, Kugeln und so weiter.

Beweis Sei im Folgenden $\mathcal{E}$ der Semiring der Quader in $\mathbb{R}^d$ beziehungsweise der halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$ (siehe Beispiel 1.26).

„(i)“ Wir prüfen die Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz 1.27.
(i) und (ii) sind trivial.
Zu (iii): Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}$ mit $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann ist

$$\mathbb{1}_A \;\le\; \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}.$$

Also gilt (beachte, dass die Vertauschung von Integral und Reihe erlaubt ist, weil der Integrand nichtnegativ ist)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[A] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_d)\mathbb{1}_A(x_1,\ldots,x_d)\,dx_d \,\cdots\, dx_1 \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_d)\mathbb{1}_{A_n}(x_1,\ldots,x_d)\,dx_d \,\cdots\, dx_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_d)\mathbb{1}_{A_n}(x_1,\ldots,x_d)\,dx_d \,\cdots\, dx_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_n].
\end{aligned}$$

„(ii)“ Wir prüfen wiederum die Eigenschaften (i)-(iii) aus Satz 1.27.
Setze formal $F(\infty) = 1$ und $F(-\infty) = 0$ sowie $\mathbf{P}[\emptyset] = F(-\infty) = 0$ und $\mathbf{P}[\mathbb{R}] = F(\infty) = 1$. Dann ist (i) trivial.

Zu (ii): Seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{E}$, etwa $(a_0, a_n] := \bigcup_{i=1}^n A_i$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Intervalle $A_1, \ldots, A_n$ aufsteigend geordnet sind, also

$$A_1 = (a_0, a_1], \quad A_2 = (a_1, a_2], \quad \ldots, \quad A_n = (a_{n-1}, a_n].$$

Dann ist

$$\tilde{\mathbf{P}}\big[(a_0, a_n]\big] = F(a_n) - F(a_0) = \sum_{i=1}^n \big(F(a_i) - F(a_{i-1})\big) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{P}}[A_i].$$

Zu (iii): Seien $(a, b]$, $(a_1, b_1]$, $(a_2, b_2], \ldots \in \mathcal{E}$ mit

$$(a, b] \subset \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n].$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da F rechtsstetig ist, existiert ein $a^\varepsilon \in (a, b]$ mit $F(a^\varepsilon) - F(a) < \varepsilon/2$. Wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $b_n^\varepsilon > b_n$ mit $F(b_n^\varepsilon) - F(b_n) < \varepsilon\, 2^{-(n+1)}$. Wenn wir zeigen können, dass

$$\mathbf{P}[(a^\varepsilon, b]] \leq \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}[(a_n, b_n^\varepsilon]] \tag{$*$}$$

gilt, dann folgt

$$\mathbf{P}\big[(a, b]\big] \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mathbf{P}\big[(a^\varepsilon, b]\big] \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\big[(a_n, b_n^\varepsilon]\big] \leq \varepsilon + \sum_{n=1}^\infty \mathbf{P}\big[(a_n, b_n]\big].$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt Bedingung (iii).

Wir müssen also nur noch (*) zeigen. Nach Konstruktion gilt $(a, b] \subset \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n^\varepsilon)$. Da $[a^\varepsilon, b]$ kompakt ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $[a^\varepsilon, b] \subset \bigcup_{k=1}^N (a_k, b_k^\varepsilon)$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$ gilt (ansonsten nummerieren wir die Intervalle um). Wenn für ein $k \leq N$ gilt, dass $b_k^\varepsilon < b_{k-1}^\varepsilon$, so ist $(a_k, b_k^\varepsilon) \subset (a_{k-1}, b_{k-1}^\varepsilon)$, und das k-te Intervall wird nicht benötigt. Da die rechte Seite in (*) nur kleiner wird, wenn wir diese Intervalle entfernen, können wir annehmen, dass $b_1^\varepsilon \leq \ldots \leq b_N^\varepsilon$. Da die Vereinigung dieser Intervalle zusammenhängend ist, gilt $b_k^\varepsilon \geq a_{k+1}$ für jedes $k = 1, \ldots, N-1$. Es folgt (beachte $b_N^\varepsilon \geq b$ und $a_1 \leq a^\varepsilon$)

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}\big[(a^\varepsilon, b]\big] &= F(b) - F(a^\varepsilon) \\
&\leq F(b_N^\varepsilon) - F(a_1^\varepsilon) \\
&\leq F(b_N^\varepsilon) - F(a_1^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{N-1} \big(F(b_k^\varepsilon) - F(a_{k+1})\big) \\
&= \sum_{k=1}^N \big(F(b_k^\varepsilon) - F(a_k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{P}}\big[(a_k, b_k^\varepsilon]\big].
\end{aligned}$$

Also gilt $(*)$, und wir sind fertig.

„(iii)“ Dies wird hier nicht gezeigt. □

Bemerkung 1.29 (i) Die Verteilungsfunktion F_P erfüllt (a) – (c) aus Satz 1.28(ii), denn:

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt (nach Satz 1.22(iii))

$$F_{\mathbf{P}}(x) = \mathbf{P}\big[(-\infty, x]\big] \leq \mathbf{P}\big[(-\infty, y]\big] = F_{\mathbf{P}}(y).$$

Also ist F_P monoton wachsend.

(b) Seien $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $x_n \downarrow x$. Nach Satz 1.22(vi) (Stetigkeit von $\mathbf{P}$ von oben) gilt

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mathbf{P}}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big[(-\infty, x_n]\big] = \mathbf{P}\big[(-\infty, x]\big] = F_{\mathbf{P}}(x).$$

Also ist $F_{\mathbf{P}}$ stetig von rechts.

(c) Wiederum nach Satz 1.22(vi) (Stetigkeit von $\mathbf{P}$ von oben bzw. unten) gelten

$$\lim_{x\to-\infty} F_{\mathbf{P}}(x) = \lim_{x\to-\infty} \mathbf{P}\big[(-\infty, x]\big] = \mathbf{P}[\emptyset] = 0$$

und

$$\lim_{x\to\infty} F_{\mathbf{P}}(x) = \lim_{x\to\infty} \mathbf{P}\big[(-\infty, x]\big] = \mathbf{P}[\mathbb{R}] = 1.$$

(ii) Die Verteilungsfunktion F_{δ_x} des Dirac-Maßes δ_x ist

$$F_{\delta_x}(t) := \mathbb{1}_{[x,\infty)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } t \geq x, \\ 0, & \text{falls } t < x. \end{cases}$$

Offenbar ist F_{δ_x} in x nicht stetig.

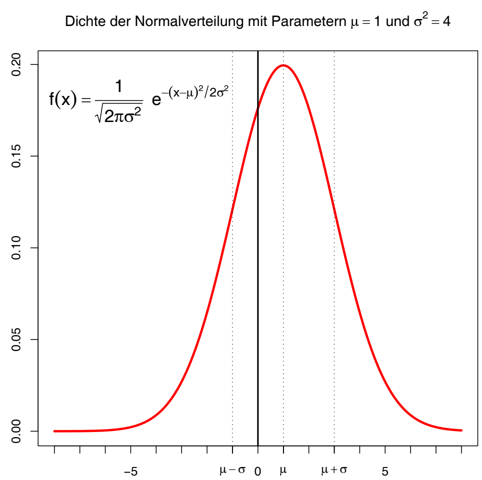
(iii) Habe das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ die Dichte f. Dann ist die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{P}}$ differenzierbar, und es gilt

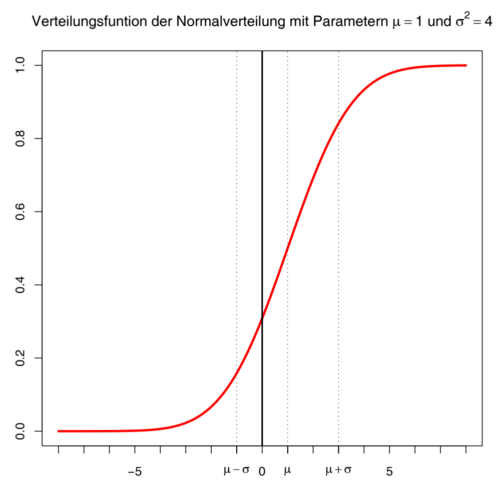
$$F_{\mathbf{P}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad F'_{\mathbf{P}}(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \qquad \diamond$$

Beispiel 1.30 Seien $\Omega = \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ und

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist f_{μ,σ^2} die Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$, der so genannten **Normalverteilung** mit Parametern μ und σ^2, kurz $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$.





Zu zeigen ist an dieser Stelle nur, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x)\,dx = 1$ ist. Durch lineare Substitution folgt, dass wir dies nur für $f := f_{0,1/2}$ zeigen müssen. Jetzt verwenden wir den Satz von Fubini sowie Integration in Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y)\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x^2+y^2))\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} 2\pi r\,\exp(-r^2)\,dr \\ &= -\exp(-r^2)\Big|_0^{\infty} = 1. \end{aligned} \qquad \diamond$$

Beispiel 1.31 Seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\theta > 0$. Sei

$$f_\theta(x) = \theta\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\,e^{-\theta x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist f_θ die Dichte der so genannten **Exponentialverteilung** mit Parameter θ, kurz $\exp_\theta$. Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_{\exp_\theta}(x) = \max\left\{1 - e^{-\theta x},\, 0\right\}. \qquad \diamond$$

Beispiel 1.32 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $\Omega = [a,b]$ sowie $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in [a,b]$. Dann ist f die Dichte der **Gleichverteilung** auf $[a,b]$, kurz $\mathcal{U}_{[a,b]}$. Manchmal wollen wir $[a,b]$ als Teilmenge eines größeren Raums $\Omega = \mathbb{R}$ auffassen. Dann müssen wir für die Gleichverteilung auf $[a,b]$ die Dichte schreiben als $f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$. $\diamond$

Beispiel 1.33 (Buffon'sches Nadelproblem) Auf eine sehr große ebene Fläche sind parallele waagerechte Linien im Abstand a zueinander gezeichnet. Aus großer Höhe wird eine Nadel der Länge $l \le a$ fallen gelassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Linien berührt?

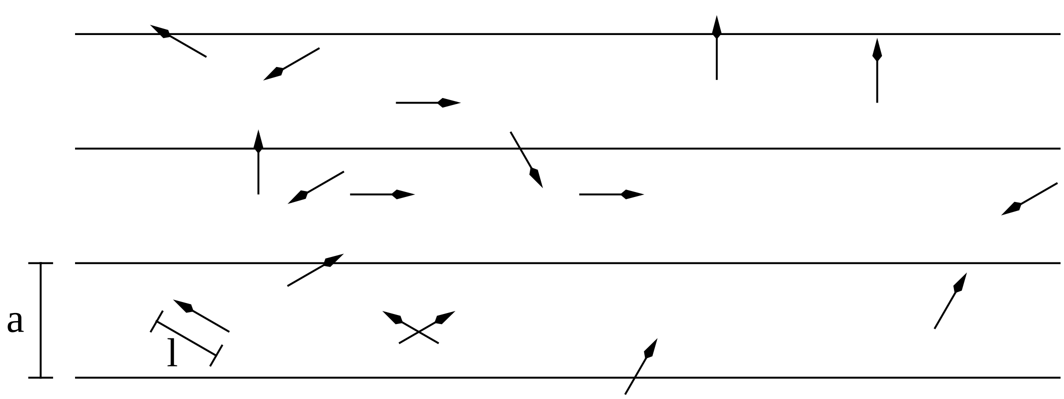


Abbildung 1.1: Buffon'sches Nadelproblem.

Für das Experiment ist nicht die absolute Lage der Nadel entscheidend, sondern nur ihre relative vertikale Lage zu einer der Linien, sowie der Winkel zu dieser Linie. Wir betrachten die Spitze der Nadel und bezeichnen ihre vertikale Position gegenüber der nächsttieferen Linie mit $\omega_1 \in [0,a)$, ihren Winkel gegenüber der Horizontalen mit $\omega_2 \in [0, 2\pi)$. Aufgrund der Experimentanordnung gehen wir davon aus, dass

ω_1 und ω_2 unabhängig sind und gleichverteilt in ihrem Wertebereich. Mit anderen Worten, wir nehmen als Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega := [0,a) \times [0,2\pi) = \big\{(\omega_1,\omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \, \omega_1 \in [0,a), \, \omega_2 \in [0,2\pi)\big\}$$

mit der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{A}$ und $\mathbf{P}$ der Gleichverteilung, also

$$\mathbf{P}[A] \;=\; \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} d\omega_2 \int_0^a d\omega_1 \, \mathbb{1}_A((\omega_1,\omega_2)).$$

Ist speziell A ein rechteckiges Flächenelement $A = [x_1,x_2] \times [\alpha_1,\alpha_2]$ (mit $0 \le x_1 \le x_2 \le a$ und $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 2\pi$), so ist

$$\mathbf{P}[A] \;=\; \frac{1}{2\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\omega_2 \int_{x_1}^{x_2} d\omega_1 \;=\; \frac{(x_2-x_1)(\alpha_2-\alpha_1)}{2\pi a}.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit für A proportional zum Flächeninhalt von A, aber unabhängig von der konkreten Lage. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Spitze der Nadel genau auf einer Linie liegt Null: Sei $B := \{\omega \in \Omega : \, \omega_1 = 0\}$ das entsprechende Ereignis. Dann ist $\mathbf{P}[B] = \frac{2\pi\cdot(0-0)}{2\pi a} = 0$.

Wir betrachten nun das Ereignis

$$\begin{aligned} A &= \text{„Nadel trifft eine Linie“} \\ &= A_u \cup A_o \,, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} A_u &:= \text{„Nadel trifft untere Linie“} \\ A_o &:= \text{„Nadel trifft obere Linie“}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $A_u \cap A_o = \emptyset$, also $\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[A_u] + \mathbf{P}[A_o]$. Weiter ist klar, dass (beachte $l \le a$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[A_u] \;&=\; \frac{1}{2\pi a} \int_\pi^{2\pi} \left(\int_0^{-l\sin(\omega_2)} d\omega_1 \right) d\omega_2 \\ &=\; \frac{-l}{2\pi a} \int_\pi^{2\pi} \sin(\omega_2)\, d\omega_2 \\ &=\; \frac{l}{2\pi a} \big(\cos(2\pi) - \cos(\pi) \big) \\ &=\; \frac{l}{\pi a}. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\mathbf{P}[A_o] = \frac{l}{\pi a}$. Insgesamt haben wir also

$$\mathbf{P}[A] \;=\; \frac{2l}{\pi a}. \qquad \diamond$$

1.4 Urnenmodelle

Wenn man über ein Zufallsexperiment mit endlich vielen möglichen Ausgängen nichts weiß, ist die Gleichverteilung auf Ω eine natürliche Annahme. Bei komplizierteren Experimenten ist es aber manchmal aufwändig, die Kardinalität von Ω zu bestimmen. Außerdem ist die Gleichverteilung manchmal nicht die richtige Annahme. Dies trifft insbesondere auf abgeleitete Experimente zu. Wollen wir beispielsweise für einen zweifachen Würfelwurf die Augensumme betrachten, so ist eine Möglichkeit, $\Omega = \{2,\ldots,12\}$ zu wählen.

Offenbar ist hier aber nicht die Gleichverteilung anzusetzen, sondern $\mathbf{P}[\{k\}] = \frac{6-|7-k|}{36}$. In der Tat ist es einfacher, zunächst einen größeren Raum $\tilde{\Omega} = \{1, \ldots, 6\}^2$ mit der Gleichverteilung $\tilde{\mathbf{P}}$ zu betrachten und dann nach der Wahrscheinlichkeit von

$$A_k = \big\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} : \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 = k\big\}$$

zu fragen. Offenbar ist $\#A_k = 6 - |7-k|$ für $k = 2, \ldots, 12$, also $\tilde{\mathbf{P}}[A_k] = \frac{6-|7-k|}{36}$. Wie sieht es aber aus, wenn wir 25 mal würfeln? Hier sind die Formeln nicht mehr ganz so direkt einsichtig und wir müssen die Abzählschemas systematisch beschreiben.

Die meisten dieser Probleme lassen sich auf vier Typen von so genannten Urnenmodellen zurückführen, die wir im folgenden beschreiben.

(I) mit Zurücklegen, mit Reihenfolge In einer Urne seien n Kugeln, die unterscheidbar gekennzeichnet sind, beispielsweise, indem sie mit den Nummern 1 bis n beschriftet sind. Wir ziehen k-mal zufällig eine dieser Kugeln aus der Urne und notieren die Nummern der Reihe nach. Das Ergebnis dieses Experiments ist ein k-Tupel

$$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \Omega_I := \Omega_I(n,k) := \{1, \ldots, n\}^k.$$

Offenbar beschreibt die Gleichverteilung auf Ω_I dieses Zufallsexperiment, und es gilt

$$\#\Omega_I = n^k. \tag{1.2}$$

(II) ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge Wir verändern nun das Experiment, indem wir entnommene Kugeln nicht wieder in die Urne zurücklegen. Dies erfordert natürlich $k \leq n$. Das Ergebnis ist ein k-Tupel in

$$\Omega_{II} := \Omega_{II}(n,k) := \big\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\big\}.$$

Wir berechnen die Kardinalität leicht durch

$$\#\Omega_{II} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.3}$$

Auch hier ist wieder die Gleichverteilung die natürliche Verteilung.

(III) ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge Wir wollen nun wie oben ohne Zurücklegen ziehen. Zudem wollen wir aber nur notieren, welche Kugeln überhaupt gezogen wurden, nicht jedoch in welcher Reihenfolge. Als Grundmenge wählen wir

$$\begin{aligned}\Omega_{III} &:= \Omega_{III}(n,k) := \big\{A \subset \{1, \ldots, n\} : \#A = k\big\} \\ &:= \big\{\{\omega_1, \ldots, \omega_k\} : \omega_i \in \{1, \ldots, n\} \text{ für alle } i \text{ und mit } \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\big\}.\end{aligned}$$

Offenbar ist für jede Menge $A \subset \{1, \ldots, n\}$ mit $\#A = k$

$$\#\big\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : \{\omega_1, \ldots, \omega_k\} = A\big\} = k!.$$

Also gilt

$$\#\Omega_{III} = \frac{\#\Omega_{II}}{k!} = \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \tag{1.4}$$

Auch auf Ω_{III} gilt wieder die Gleichverteilung.

An dieser Stelle wollen wir noch eine alternative Beschreibung angeben. Wir können, ohne das Ergebnis zu verändern, die Nummern der gezogenen Kugeln der Größe nach sortieren. Damit ist Ω_{III} gleichwertig mit

$$\tilde{\Omega}_{III} := \tilde{\Omega}_{III}(n,k) := \big\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \{1, \ldots, n\}^k : \omega_1 < \omega_2 \ldots < \omega_k\big\}.$$

(IV) mit Zurücklegen, ohne Reihenfolge Wir wollen nun wie in (I) die Kugeln zurücklegen, aber wie in (III) nicht die Reihenfolge der Kugeln beachten. Hier können natürlich Kugeln mehrfach gezogen werden, so dass wir auch notieren, *wie oft* eine Kugel gezogen wurde. Die geschickteste Formulierung eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums erhalten wir, wenn wir, wie in $\tilde{\Omega}_{III}$ die Nummern der Kugeln der Größe nach sortieren (wobei hier natürlich mehrfache Einträge auftreten können):

$$\Omega_{IV} := \Omega_{IV}(n,k) := \big\{(\omega_1,\ldots,\omega_k) \in \{1,\ldots,n\}^k : \omega_1 \leq \omega_2 \ldots \leq \omega_k\big\}.$$

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \Omega_{IV}(n,k) &\to \tilde{\Omega}_{III}(n+k-1,k) \\ \omega &\mapsto \big(\omega_1,\, \omega_2+1,\, \omega_3+2,\, \ldots,\, \omega_k+k-1\big). \end{aligned}$$

Offenbar ist ϕ eine Bijektion, also ist

$$\#\Omega_{IV}(n,k) \;=\; \#\Omega_{III}(n+k-1,k) \;=\; \binom{n+k-1}{k}. \tag{1.5}$$

Äquivalent hierzu ist die Beschreibung des Experiments dadurch, dass wir zu jeder Kugelnummer angeben, wie oft sie gezogen wurde:

$$\overline{\Omega}_{IV} := \big\{l \in \mathbb{N}_0^n : \, l_1 + \ldots + l_n = k\big\}.$$

Auf diese Weise lässt sich auch Ω_{III} schreiben als

$$\overline{\Omega}_{III} := \big\{l \in \{0,1\}^n : \, l_1 + \ldots + l_n = k\big\}.$$

Obacht! Auf Ω_{IV} ist nicht die Gleichverteilung anzusetzen. In der Tat: Beim zweifachen Würfelwurf ohne Beachtung der Reihenfolge ist die Wahrscheinlichkeit für (⚀,⚀) gleich $\frac{1}{36}$, hingegen für (⚀,⚁) gleich $\frac{1}{18}$. Wir müssen also die Anzahl der Reihenfolgen berücksichtigen, die ein bestimmtes Ergebnis ohne Beachtung der Reihenfolge liefern. Wir können uns vorstellen, dass wir zunächst mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge die Kugeln ziehen und dann die Reihenfolge vergessen. Dieses Vergessen wird beschrieben durch die Abbildung

$$\begin{aligned} &\psi : \Omega_I \to \overline{\Omega}_{IV} \\ &\quad \omega \mapsto \Big(\#\big\{i \in \{1,\ldots,k\} : \omega_i = 1\big\}, \ldots, \#\big\{i \in \{1,\ldots,k\} : \omega_i = n\big\}\Big). \end{aligned}$$

Offenbar ist

$$\overline{\mathbf{P}}_{IV}[\{l\}] \;=\; \mathbf{P}_I\big[\psi^{-1}(\{l\})\big] \;=\; \frac{\#\psi^{-1}(\{l\})}{\#\Omega_I} \;=\; n^{-k}\binom{k}{l_1,\ldots,l_n},$$

wobei der **Multinomialkoeffizient**

$$\binom{k}{l} := \binom{k}{l_1,\ldots,l_n} := \begin{cases} \dfrac{k!}{l_1!\cdots l_n!}, & \text{falls } \; l_1 + \ldots + l_n = k, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{1.6}$$

die Kardinalität von $\psi^{-1}(\{l\})$ angibt. (Übung: man zeige dies durch Induktion über n.)

Beispiel 1.34 Wie groß ist beim vierfachen Würfelwurf die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, dass man vier unterschiedliche Augenzahlen erhält? Wir wählen als Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \Omega_I(6,4)$$

mit der Gleichverteilung $\mathbf{P}$. Es ist dann

$$A = \Omega_{II}(6,4) \subset \Omega,$$

also

$$\mathbf{P}[A] \;=\; \frac{\#\Omega_{II}(6,4)}{\#\Omega_I(6,4)} \;=\; \frac{6!}{(6-4)!\,6^4} \;=\; \frac{5}{18}. \qquad \diamond$$

Beispiel 1.35 (Hypergeometrische Verteilung) Wir betrachten jetzt eine Abwandlung des „Ziehens ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge“. Wir nehmen an, dass in einer Urne W weiße und S schwarze Kugeln liegen. Wir ziehen daraus n Kugeln (ohne Zurücklegen) und fragen nach der Wahrscheinlichkeit $p = p_{S,W,n}(s)$, dass wir genau s schwarze Kugeln ziehen (und damit $n-s$ weiße). Um p zu berechnen, denken wir uns zunächst die Kugeln nummeriert von 1 bis $W+S$, wobei die ersten S Kugeln schwarz sind, die Kugeln mit den Nummern $S+1,\ldots,S+W$ hingegen weiß. Wir sind also in der Situation von $\Omega_{III}(S+W,n)$. Das gesuchte Ereignis ist

$$A_s := \big\{\omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\} \in \Omega_{III} :\, \#(\omega \cap \{1,\ldots,S\}) = s\big\}.$$

Offenbar gibt es genau $\binom{S}{s}$ s–elementige Teilmengen von $\{1,\ldots,S\}$ und $\binom{W}{n-s}$ $(n-s)$–elementige Teilmengen von $\{S+1,\ldots,S+W\}$. Also ist

$$\#A_s = \binom{S}{s}\binom{W}{n-s}$$

und

$$p_{S,W,n}(s) \;=\; \mathbf{P}[A_s] \;=\; \frac{\#A_s}{\#\Omega_{III}(W+S,n)} \;=\; \frac{\binom{S}{s}\binom{W}{n-s}}{\binom{S+W}{n}}.$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\max(0,n-W),\ldots,\min(S,n)\}$ mit Gewichten $p_{S,W,n}(s)$ heißt **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern (S,W,n), kurz

$$\mathrm{Hyp}_{S,W,n}(\{s\}) = \frac{\binom{S}{s}\binom{W}{n-s}}{\binom{S+W}{n}}. \tag{1.7}$$

$\diamond$

Beispiel 1.36 Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Geben beim Skatspiel Spieler A genau drei Asse besitzt? (Beim Skat gibt es 32 Karten, von denen jeder der drei Spieler 10 Karten erhält, zwei weitere Karten gehen in den Skat. Vier der Karten sind Asse.) Wir verwenden also die Hypergeometrische Verteilung mit Parametern $W=28$, $S=4$ und $n=10$ und erhalten als gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathrm{Hyp}_{4,28,10}(\{3\}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{7}}{\binom{32}{10}} = \frac{66}{899}. \qquad \diamond$$

Beispiel 1.37 (Binomialverteilung) Wir führen ein Bernoulli-Experiment der Länge n mit Erfolgsparameter p durch und fragen nach der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_k genau k Erfolge zu erhalten. Formal ist $\Omega = \{0,1\}^n$ und $\mathbf{P} = \mathrm{Ber}_p^{\otimes n}$, also

$$\mathbf{P}[\{\omega\}] = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i} \qquad \text{für } \omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega,$$

sowie

$$A_k := \{\omega \in \Omega :\, \omega_1 + \ldots + \omega_n = k\}.$$

Offenbar ist $\#A_k = \binom{n}{k}$ und $\mathbf{P}[\{\omega\}] = p^k\,(1-p)^{n-k}$ für jedes $\omega \in A_k$. Also gilt

$$\mathbf{P}[A_k] = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

Die Verteilung $b_{n,p}$ auf $\{0,\dots,n\}$ mit

$$b_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k\,(1-p)^{n-k} \quad \text{für } \ k \in \{0,\dots,n\}, \tag{1.8}$$

nennen wir **Binomialverteilung** mit Parametern n und p. ◇

Beispiel 1.38 (Spiegelungsprinzip) Wir spielen ein Glücksspiel über n Runden, bei dem wir in jeder Runde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen Euro gewinnen, oder einen Euro verlieren. Das Anfangskapital beträgt k Euro.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Ruin zu erleiden?

Als Modell wählen wir $\Omega = \{-1,1\}^n$ und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Dabei gibt ω_l an, wie sich unser Kontostand in der l-ten Runde verändert. Also ist

$$S_l(\omega) := k + \omega_1 + \ldots + \omega_l \quad \text{für } \ l = 0,\dots,n,$$

der Kontostand zur Zeit l. Dann ist

$$\mathbf{P}[\{\omega \in \Omega :\ S(\omega) = k - n + 2j\}] = b_{n,1/2}(\{j\}) \quad \text{für } \ j = 0,\dots,n.$$

Sei

$$R := \big\{\omega \in \Omega :\ S_l(\omega) \le 0 \ \text{ für ein } \ l \le n\big\}$$

das Ruinereignis. Für $\omega \in R$ sei

$$L(\omega) := \min\{l :\ S_l(\omega) \le 0\}$$

der Ruinzeitpunkt. Wir definieren eine Abbildung $\phi : \Omega \to \Omega$ durch

$$\phi(\omega)_l := \begin{cases} \omega_l, & \text{falls } \ \omega \in R^c \ \text{ oder falls } \ l \le L(\omega), \\ -\omega_l, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist ϕ eine Bijektion mit $\phi^{-1} = \phi$, und es gilt $\phi(R) = R$. Also gilt für jedes Ereignis $A \subset \Omega$

$$\mathbf{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\phi^{-1}(A)}{\#\Omega} = \mathbf{P}[\phi^{-1}(A)].$$

Betrachte nun

$$A := \{\omega \in \Omega :\ S_n(\omega) > 0\}.$$

Dann ist klar $A^c \subset R$, also

$$\mathbf{P}[R \cap A^c] = \mathbf{P}[A^c] = \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega :\ S_n(\omega) \le 0\}]$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[R \cap A] = \mathbf{P}[\phi^{-1}(R \cap A)] &= \mathbf{P}[R \cap \{\omega \in \Omega :\ S_n(\omega) < 0\}] \\ &= \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega :\ S_n(\omega) < 0\}]. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[R] &= \mathbf{P}[R \cap A] + \mathbf{P}[R \cap A^c] \\
&= \mathbf{P}\big[\{\omega \in \Omega : \, S_n(\omega) = 0\}\big] + 2\sum_{s=1}^{n-k} \mathbf{P}\big[\{\omega \in \Omega : \, S_n(\omega) = -s\}\big] \\
&= b_{n,1/2}\left(\left\{\frac{n-k}{2}\right\}\right) + 2 \sum_{0 \le j < (n-k)/2} b_{n,1/2}\left(\{j\}\right),
\end{aligned} \tag{1.9}$$

wobei $b_{n,1/2}(\{x\}) = 0$ für $x \notin \{0, \dots, n\}$. ◇

1.5 Weitere ganzzahlige Verteilungen

Beispiel 1.39 (Geometrische Verteilung) Wir wollen ein Bernoulli Experiment mit Erfolgsparameter $p \in (0,1]$ so oft durchführen, bis wir den ersten Erfolg sehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p(n)$ dafür, dass wir exakt n Misserfolge sehen, bevor der erste Erfolg eintritt? Um diese Wahrscheinlichkeit auszurechnen, reicht es, ein Bernoulli Experiment der Länge $n+1$ zu betrachten, also $\Omega_n = \{0,1\}^{n+1}$ und $\mathbf{P}_n = \mathrm{Ber}_p^{\otimes(n+1)}$. Es ist dann

$$p(n) = \mathbf{P}_n[\{(0, \dots, 0, 1)\}] = p\,(1-p)^n.$$

Die Verteilung γ_p auf $\mathbb{N}_0$ mit

$$\gamma_p(\{n\}) = p\,(1-p)^n \quad \text{für } \; n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.10}$$

heißt **geometrische Verteilung** mit Parameter p.

(Manche Autoren bezeichnen als geometrische Verteilung die Verteilung der Anzahl der Versuche *bis* (nicht *bevor*) der erste Erfolg eintritt. Folglich wird die geometrische Verteilung gelegentlich als die um Eins verschobene Verteilung auf $\mathbb{N}$ (statt $\mathbb{N}_0$) definiert.) ◇

Beispiel 1.40 (Negative Binomialverteilung, Pascal Verteilung) Wir wollen nun die Bernoulli Experimente so oft durchführen, bis wir den k-ten Erfolg sehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $p_k(n)$ dafür, dass dieser genau beim $(n+k)$-ten Versuch eintritt? Wir gehen wie oben vor und betrachten das Ereignis

$$A_k := \Big\{\omega \in \{0,1\}^{n+k} : \, \omega_{n+k} = 1 \; \text{ und } \; \sum_{i=1}^{n+k-1} \omega_i = k-1\Big\}.$$

Dann ist

$$\#A_k = \binom{n+k-1}{k-1}$$

und $\mathbf{P}[\{\omega\}] = p^k (1-p)^n$ für jedes $\omega \in A_k$. Also ist für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
b^-_{k,p}(\{n\}) := p_k(n) &= \binom{n+k-1}{k-1} p^k\,(1-p)^n \\
&= \binom{-k}{n} (-1)^n \, p^k\,(1-p)^n,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

wobei wir für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ definieren

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Die Verteilung $b^-_{k,p}$ auf $\mathbb{N}_0$ heißt **negative Binomialverteilung** oder **Pascalverteilung** mit Parametern p und k. Man beachte, dass $b^-_{1,p} = \gamma_p$ gilt. ◇

Beispiel 1.41 (Poisson-Verteilung) Es sei $\lambda \in [0, \infty)$. Auf $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ definieren wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung durch

$$\mathrm{Poi}_\lambda(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.12}$$

Wir nennen Poi_λ die **Poisson-Verteilung** mit Parameter λ. ◇

Die Bedeutung der Poisson-Verteilung wird durch den nächsten Satz klarer. Wir zeigen, dass sich die Poisson-Verteilung als Limes für die (zufällige) Anzahl seltener Ereignisse auffassen lässt.

Satz 1.42 (Poissonapproximation der Binomialverteilung) *Es seien $\lambda \in [0, \infty)$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, 1]$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,p_n}(\{k\}) = \mathrm{Poi}_\lambda(\{k\}).$$

Beweis Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Offenbar ist

$$\lim_{n\to\infty} n^{-k} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_{n,p_n}(\{k\}) &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k \, (1 - p_n)^n \, \underbrace{(1 - p_n)^{-k}}_{\longrightarrow 1} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{-k} \binom{n}{k} (np_n)^k (1 - p_n)^n \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} (1 - p_n)^n \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left((1 - p_n)^{1/p_n}\right)^{np_n} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left((1 - p_n)^{1/p_n}\right)^{\lambda} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \, e^{-\lambda},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $(1-t)^{1/t} \to e^{-1}$ für $t \downarrow 0$. □

1.6 Zufallsvariablen

Oftmals interessiert man sich nicht für das gesamte Zufallsexperiment, sondern nur für einen Teilaspekt, nämlich für gewisse Beobachtungsgrößen. Beispielsweise möchten wir einen dreifachen Würfelwurf durchführen, sind aber letztendlich nur an der Augensumme interessiert. Aus systematischen Gründen ist es nützlich, dennoch mit Ω das gesamte Experiment zu kodieren, also

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$$

mit der Gleichverteilung $\mathbf{P}$ zu wählen und danach die Abbildung

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to \{3, \ldots, 18\} \\ \omega &\mapsto \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \end{aligned}$$

zu betrachten, die uns die Augensumme angibt. Damit wir Teilmengen A' aus dem Bildbereich von X Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}[X \in A'] \; := \; \mathbf{P}[X^{-1}(A')] \; = \; \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \in A'\}]$$

zuordnen können, müssen wir sicher stellen, dass $X^{-1}(A')$ ein Ereignis ist. Daher treffen wir die folgende Definition.

Definition 1.43 (Zufallsvariable) *Seien* $(\Omega, \mathcal{A})$ *und* $(\Omega', \mathcal{A}')$ *Messräume. Eine Abbildung* $X : \Omega \to \Omega'$ *mit der Eigenschaft*

$$X^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \textit{für alle} \;\; A' \in \mathcal{A}' \tag{1.13}$$

heißt $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$*–**messbar** oder eine **Zufallsvariable** auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *mit Werten in* $(\Omega', \mathcal{A}')$.

Ist $(\Omega', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$*, so sagen wir kurz, dass* X *eine* d*-dimensionale Zufallsvariable ist. Ist* $d = 1$*, so heißt* X *kurz eine reelle Zufallsvariable.*

Beispiel 1.44 Ist $\mathcal{A} = 2^\Omega$, so ist jede Abbildung $X : \Omega \to \Omega'$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, 2^\Omega)$. $\diamond$

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable mit Werten in $(\Omega', \mathcal{A}')$, so ist wegen (1.13) für jedes $A' \in \mathcal{A}'$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \in A'\}]$ wohldefiniert. Wir verwenden die Schreibweisen

$$\begin{aligned} \{X \in A'\} \; &:= \; \{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \in A'\} \; = \; X^{-1}(A') \\ \mathbf{P}[X \in A'] \; &:= \; \mathbf{P}[X^{-1}(A')]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Ist speziell X reellwertig, so schreiben wir auch

$$\mathbf{P}[X \le t] \; := \; \mathbf{P}[\{\omega \in \Omega : \; X(\omega) \le t\}] \quad \text{für} \;\; t \in \mathbb{R},$$

und so weiter.

Satz 1.45 *Ist* $\mathcal{E}'$ *ein Erzeuger von* $\mathcal{A}'$*, also* $\sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}'$*, und ist* $X : \Omega \to \Omega'$ *eine Abbildung mit der Eigenschaft*

$$X^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \textit{für alle} \;\; E' \in \mathcal{E}',$$

so ist X *schon* $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$*–messbar.*

Beweis Setze

$$\mathcal{F}' := \big\{A' \in \mathcal{A}' : \; X^{-1}(A') \in \mathcal{A}\big\}.$$

Offenbar ist $X^{-1}(\Omega') = \Omega \in \mathcal{A}$, also ist $\Omega' \in \mathcal{F}'$. Sind $A', B', A'_1, A'_2, A'_3 \ldots \in \mathcal{F}'$, so sind $X^{-1}(A' \setminus B') = X^{-1}(A') \setminus X^{-1}(B') \in \mathcal{A}$, also $A' \setminus B' \in \mathcal{F}'$, und

$$X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n\right) \; = \; \bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A'_n) \in \mathcal{A}.$$

Also ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n \in \mathcal{F}'$. Mithin ist $\mathcal{F}'$ eine σ–Algebra. Ferner ist $\mathcal{F}' \supset \mathcal{E}'$ nach Voraussetzung. Also ist $\mathcal{F}' \supset \mathcal{A}'$. $\square$

Für $a, b \in \mathbb{R}^d$ mit $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, d$, setzen wir

$$[a, b] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$$

und analog $[a, b)$ etc.

Satz 1.46 *Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) X *ist eine Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *mit Werten in* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$,

(ii) $X^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{A}$ *für alle* $b \in \mathbb{R}^d$,

(iii) $X^{-1}((-\infty, b)) \in \mathcal{A}$ *für alle* $b \in \mathbb{R}^d$,

(iv) $X^{-1}([a, b]) \in \mathcal{A}$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$,

(v) $X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{A}$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$,

(vi) $X^{-1}([a, b)) \in \mathcal{A}$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$,

(vii) $X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$ *für alle* $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$.

Beweis Nach Satz 1.13 ist

$$\sigma\big(\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}^d\}\big) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Nach Satz 1.45 folgt daher die Äquivalenz (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Die anderen Aussagen gehen analog und verbleiben zur Übung. □

Korollar 1.47 *Ist* $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *und ist* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *stetig, so ist* X *eine* n*–dimensionale Zufallsvariable.*

Beweis Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist $(-\infty, b] \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Da X stetig ist, ist $X^{-1}((-\infty, b]) \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, also in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. □

Korollar 1.48 *Sind* $X_1, \dots, X_n$ *reelle Zufallsvariablen, dann ist* $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *eine* $\mathbb{R}^n$*–wertige Zufallsvariable.*

Beweis

$$(X_1, \dots, X_n)^{-1}\big((-\infty, b]\big) = \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}\big((-\infty, b_i]\big) \in \mathcal{A}.$$ □

Korollar 1.49 *Es seien* $X_1, X_2, \dots$ *reelle Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. *Wir setzen*

$$Z_1 = \inf_{n \in \mathbb{N}} X_n, \qquad Z_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$
$$Z_3 = \limsup_{n \to \infty} X_n, \qquad Z_4 = \liminf_{n \to \infty} X_n.$$

Dann sind auch Z_1, Z_2, Z_3 *und* Z_4 *Zufallsvariablen.*

Beweis Sei $b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\{Z_1 < b\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{X_n < b\} \in \mathcal{A}.$$

Die anderen Aussagen verbleiben zur Übung. □

Satz 1.50 *Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ und $(\Omega'', \mathcal{A}'')$ Messräume und $\phi : \Omega \to \Omega'$ und $\psi : \Omega' \to \Omega''$ messbar. Dann ist $\psi \circ \phi : \Omega \to \Omega''$ messbar bezüglich $\mathcal{A} - \mathcal{A}''$.*

Beweis Für jedes $A'' \in \mathcal{A}''$ ist $\psi^{-1}(A'') \in \mathcal{A}'$, also

$$(\psi \circ \phi)^{-1}(A'') \;=\; \phi^{-1}\big(\psi^{-1}(A'')\big) \;\in \mathcal{A}. \qquad \square$$

Korollar 1.51 *Seien X und Y reelle Zufallsvariablen, dann sind auch $X+Y$, $X \cdot Y$, $X \vee Y := \max(X, Y)$ und $X \wedge Y := \min(X, Y)$ reelle Zufallsvariablen.*

Beweis Die Abbildungen $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x, y) = x + y$, $f_2(x, y) = xy$, $f_3(x, y) = x \vee y$ und $f_4(x, y) = x \wedge y$ sind stetig also messbar. Mithin sind $f_i \circ (X, Y)$, $i = 1, 2, 3, 4$, Zufallsvariablen. $\square$

Korollar 1.52 *Ist $Y = (Y_1, \ldots, Y_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine Zufallsvariable, so ist jedes Y_i, $i = 1, \ldots, n$ eine Zufallsvariable.*

Beweis Die Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ ist stetig, also messbar (bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$) und damit ist auch $Y_i = \pi \circ Y$ messbar. $\square$

Satz 1.53 *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable mit Werten in $(\Omega', \mathcal{A}')$. Dann wird durch*

$$\mathbf{P}'[A'] := \mathbf{P}[X \in A'] \quad \textit{für} \;\; A' \in \mathcal{A}',$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}'$ auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ definiert.

Beweis Offenbar ist

$$\mathbf{P}'[\Omega'] \;=\; \mathbf{P}[X \in \Omega'] = \mathbf{P}[X^{-1}(\Omega')] \;=\; \mathbf{P}[\Omega] \;=\; 1.$$

Seien $A'_1, A'_2, \ldots \in \mathcal{A}'$ paarweise disjunkt. Dann sind $X^{-1}(A'_1), X^{-1}(A'_2), \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, also

$$\mathbf{P}'\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i\right] \;=\; \mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} X^{-1}(A'_i)\right] \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\left[X^{-1}(A'_i)\right] \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}'\left[A'_i\right]. \qquad \square$$

Definition 1.54 (Bildmaß) *(i) Für das Wahrscheinlichkeitsmaß aus dem vorangehenden Satz schreiben wir $\mathcal{L}[X] := \mathbf{P}_X := \mathbf{P} \circ X^{-1} := \mathbf{P}'$ und nennen es das **Bildmaß** von $\mathbf{P}$ unter X oder die **Verteilung** von X.*

*(ii) Sind X und Y Zufallsvariablen mit dem selben Wertebereich und $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$, so schreiben wir $X \stackrel{d}{=} Y$ und sagen, dass X und Y **identisch verteilt** sind oder in Verteilung übereinstimmen.*

(iii) Ist Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$, so sagen wir, dass X nach Q verteilt ist, falls $\mathbf{P}_X = Q$, und schreiben kurz $X \sim Q$.

*(iv) Sind $X_1, \ldots, X_d$ reelle Zufallsvariablen und $Y := (X_1, \ldots, X_d)$, so heißt $\mathbf{P}_Y = \mathbf{P}_{(X_1, \ldots, X_d)}$ die **gemeinsame Verteilung** der $X_1, \ldots, X_d$. Hingegen heißt $\mathbf{P}_{X_i}$ die i-te **Randverteilung** von Y.*

Bemerkung 1.55 Offenbar legt die gemeinsame Verteilung stets die Randverteilungen eindeutig fest. Andererseits legen die Randverteilungen nicht die gemeinsame Verteilung fest. Hierzu betrachten wir folgendes Beispiel. Zunächst wird ein gewöhnlicher sechsseitiger (fairer) Würfel geworfen. Sei X das Ergebnis dieses Wurfes. Je nach dem Ergebnis wird eine von sechs unterschiedlich gefälschten Münzen ausgewählt und geworfen. Die i-te Münze soll dabei Wahrscheinlichkeit $p_i = i/6$ für einen Kopf und $1 - p_i$ für eine Zahl haben. Mit Y bezeichnen wir das Ergebnis dieses Münzwurfs. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass etwa der Würfel eine Vier zeigt und die Münze Kopf zeigt: $\mathbf{P}_{(X,Y)}[\{(4, \text{Kopf})\}] = \frac{1}{6}\frac{4}{6}$. Wir tabellieren die Werte der gemeinsamen Verteilung $\mathbf{P}_{(X,Y)}$:

$Y \setminus X$	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	$\mathbf{P}_Y$
Kopf	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
Zahl	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{5}{12}$
$\mathbf{P}_X$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Die letzte Spalte und die letzte Zeile geben dabei jeweils die Randverteilungen $\mathbf{P}_Y$ und $\mathbf{P}_X$ an. Von der Lage am Rande der Tabelle rührt der Name „Randverteilung“ her.

Man überlegt sich leicht, dass es etliche gemeinsame Verteilungen gibt, die die selben Randverteilungen wie in dieser Tabelle haben. Beispielsweise sei diejenige genannt, die zu dem Experiment gehört, wo stets die selbe unfaire Münze geworfen wird, und diese die Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{12}$ für einen Kopf hat:

$Y \setminus X$	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	$\mathbf{P}_Y$
Kopf	$\frac{7}{72}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{7}{12}$
Zahl	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{12}$
$\mathbf{P}_X$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

$\diamond$

Definition 1.56 *Sei X eine reelle Zufallsvariable. Dann heißt die Abbildung*

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \mathbf{P}[X \le x]$$

*die **Verteilungsfunktion** von X (eigentlich von $\mathbf{P}_X$).*

Offenbar ist $\mathbf{P}_X$ durch Angabe von F_X eindeutig festgelegt (Satz 1.28). Andererseits können wir zu gegebener Verteilungsfunktion F stets eine Zufallsvariable X finden mit $F_X = F$.

Satz 1.57 (Existenz von Zufallsvariablen mit gegebener Verteilung) *Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion (monoton wachsend, rechtsstetig, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$). Dann existiert eine reelle Zufallsvariable X mit $\mathbf{P}[X \le x] = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Verteilung $\mathbf{P}_X$ ist durch F eindeutig bestimmt.*

Beweis Seien $\Omega = (0,1)$ und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Definiere die (linksstetige) Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$F^{-1}(t) := \inf\big\{x \in \mathbb{R} : F(x) \ge t\big\}. \tag{1.15}$$

Dann ist (wegen der Rechtsstetigkeit von F)

$$F^{-1}(t) \le x \iff t \le F(x).$$

(Merke: für die rechtsstetige Inverse $t \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > t\}$ gilt keine ebenso schöne Darstellung.) Speziell ist $\{t \in \Omega : F^{-1}(t) \leq x\} = (0, F(x)] \cap (0,1)$, also ist $F^{-1} : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar und

$$\mathbf{P}[\{t : F^{-1}(t) \leq x\}] = F(x).$$

Mithin ist $X(\omega) := F^{-1}(\omega)$ die gewünschte Zufallsvariable.

Die Eindeutigkeit von $\mathbf{P}_X$ folgt aus Satz 1.28(ii). □

Beispiel 1.58 Wir wollen mit dem Computer Zufallszahlen mit einer gegebenen Verteilungsfunktion F herstellen. Standardmäßig verfügen viele Programmiersprachen über Zufallszahlengeneratoren (zweifelhafter Qualität, aber das sei dahingestellt), deren Ausgabe eine Zahl x in $[0,1]$ ist. Mit etwas gutem Willen kann man das Ergebnis als zufällig und gleichverteilt auf $[0,1]$ annehmen. Bilden wir nun $F^{-1}(x)$, so haben wir eine Zufallszahl, deren Verteilungsfunktion F ist.

Dies ist manchmal praktikabel, zum Beispiel für die Exponentialverteilung $F(x) = 1 - \exp(-\theta x)$, $x \geq 0$. Hier ist

$$F^{-1}(t) \;=\; -\theta^{-1} \log(1-t).$$

Für andere Verteilungen, wie etwa die Normalverteilung, kann man F^{-1} nicht explizit angeben. ◇

Zum Abschluss bringen wir noch einen Satz, der angibt, wie sich die Dichten von Verteilungsfunktionen (falls existent) unter monotonen Abbildungen transformieren.

Satz 1.59 (Dichtetransformationsformel) *Sei X eine reelle Zufallsvariable, und habe $\mathbf{P}_X$ eine Dichte f_X:*

$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (möglicherweise unbeschränktes) Intervall mit $\mathbf{P}[X \in I] = 1$. Ferner sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $\varphi : I \to J$ stetig differenzierbar mit Ableitung φ' und streng monoton wachsend, oder streng monoton fallend. Dann hat die Verteilung $\mathbf{P}_{\varphi(X)}$ der Zufallsvariablen $\varphi(X)$ die Dichte

$$f_{\varphi(X)}(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{f(\varphi^{-1}(x))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(x))|}, & \textit{falls } x \in J, \\[2ex] 0, & \textit{falls } x \in \mathbb{R} \setminus J. \end{cases}$$

Beweis Das ist die Substitutionsregel aus Analysis I. □

Beispiel 1.60 Seien U uniform verteilt auf $(0,1]$ und $\varphi(x) = -\log(x)$. Dann ist $\varphi(U) \sim \exp_1$. (Vergleiche Beispiel 1.58.) ◇

Beispiel 1.61 Seien X normalverteilt mit Parametern μ und σ^2, also $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$, und sei $\varphi(t) = at + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} f_{\varphi(X)}(x) &= \frac{1}{a} f_{\mu,\sigma^2}((x-b)/a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} \exp\left(\frac{(\frac{x-b}{a} - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} \exp\left(\frac{(x-b-a\mu)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \\ &= f_{a\mu+b,a^2\sigma^2}(x). \end{aligned}$$

Also gilt

$$aX + b \,=\, \varphi(X) \,\sim\, \mathcal{N}_{a\mu+b,a^2\sigma^2}. \qquad \diamond$$

Als Ergänzung formulieren wir den Satz über die Dichtetransformation nochmal allgemeiner für n–dimensionale Zufallsvariablen. Den Beweis findet man wiederum in Lehrbüchern zur Analysis II unter dem Stichwort „Transformationssatz“ oder „Substitutionsregel“.

Satz 1.62 (Dichtetransformationsformel im $\mathbb{R}^n$) *Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable und habe $\mathbf{P}_X$ eine Dichte f_X:*

$$\mathbf{P}[X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n] = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} dt_n \, f_X(t_1, \dots, t_n), \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ eine offene (oder abgeschlossene) zusammenhängende Menge mit $\mathbf{P}[X \in I] = 1$. Ferner seien $J \subset \mathbb{R}^n$ offen oder abgeschlossen und zusammenhängend, sowie $\varphi : I \to J$ bijektiv und stetig differenzierbar mit Ableitung φ'. Dann hat die Verteilung $\mathbf{P}_{\varphi(X)}$ der Zufallsvariablen $\varphi(X)$ die Dichte

$$f_{\varphi(X)}(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{f(\varphi^{-1}(x))}{|\det(\varphi'(\varphi^{-1}(x)))|}, & \textit{falls } x \in J, \\[2ex] 0, & \textit{falls } x \in \mathbb{R}^n \setminus J. \end{cases}$$

Kapitel 2

Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeiten

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2.1 Wir werfen einen fairen sechsseitigen Würfel und betrachten die Ereignisse

$$A := \{\text{Augenzahl ungerade}\},$$
$$B := \{\text{Augenzahl drei oder kleiner}\}.$$

Offenbar ist $\mathbf{P}[A] = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{P}[B] = \frac{1}{2}$. Wie groß ist aber die Wahrscheinlichkeit, dass A eintritt, wenn wir schon wissen, dass B eintritt?

Wir modellieren das Experiment auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, wobei $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$, $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf Ω ist. Dann ist

$$A = \{1, 3, 5\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 2, 3\}.$$

Wenn wir nur wissen, dass B eingetreten ist, liegt es nahe, auf $\{1, 2, 3\}$ die Gleichverteilung zu vermuten. Wir definieren also auf $(B, 2^B)$ ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_B$ durch

$$\mathbf{P}_B[C] = \frac{\#C}{\#B} \quad \text{für jedes } C \subset B.$$

Indem wir Punkten in $\Omega \setminus B$ die Wahrscheinlichkeit Null geben (die können ja nicht eingetreten sein, wenn B eingetreten ist), können wir $\mathbf{P}_B$ auf Ω fortsetzen durch

$$\mathbf{P}[C\,|\,B] := \mathbf{P}_B[C \cap B] = \frac{\#(C \cap B)}{\#B} \quad \text{für jedes } C \subset \Omega.$$

So erhalten wir

$$\mathbf{P}[A\,|\,B] = \frac{\#\{1, 3\}}{\#\{1, 2, 3\}} = \frac{2}{3}. \qquad \diamond$$

Durch das Beispiel motiviert treffen wir die folgende Definition.

Definition 2.2 (Bedingte Wahrscheinlichkeit) *Seien* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $B \in \mathcal{A}$*. Dann definieren wir die* ***bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben*** B *für alle* $A \in \mathcal{A}$ *durch*

$$\mathbf{P}[A|B] = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{P}[A \cap B]}{\mathbf{P}[B]}, & \textit{falls } \mathbf{P}[B] > 0, \\ 0, & \textit{sonst}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Bemerkung 2.3 Die Festsetzung in (2.1) für den Fall $\mathbf{P}[B] = 0$ ist völlig willkürlich. In der Literatur findet man gelegentlich auch andere Festsetzungen. ◇

Satz 2.4 *Ist* $\mathbf{P}[B] > 0$*, so ist* $A \mapsto \mathbf{P}[A|B]$ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\Omega, \mathcal{A})$*.*

Beweis Trivial! □

Satz 2.5 (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit) *Seien* I *eine höchstens abzählbare Menge und* $(B_i)_{i \in I}$ *paarweise disjunkte Mengen in* $\mathcal{A}$ *mit* $\mathbf{P}\left[\bigcup_{i \in I} B_i\right] = 1$*. Dann gilt für alle* $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbf{P}[A] = \sum_{i \in I} \mathbf{P}[A|B_i]\, \mathbf{P}[B_i]. \tag{2.2}$$

Beweis Wegen der σ-Additivität von $\mathbf{P}$ ist

$$\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}\left[\bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)\right] = \sum_{i \in I} \mathbf{P}[A \cap B_i] = \sum_{i \in I} \mathbf{P}[A|B_i]\, \mathbf{P}[B_i].$$ □

Satz 2.6 (Bayes'sche Formel, 1763) *Seien* I *eine höchstens abzählbare Menge und* $(B_i)_{i \in I}$ *paarweise disjunkte Mengen in* $\mathcal{A}$ *mit* $\mathbf{P}\left[\bigcup_{i \in I} B_i\right] = 1$*. Dann gilt für alle* $A \in \mathcal{A}$ *mit* $\mathbf{P}[A] > 0$ *und jedes* $k \in I$

$$\mathbf{P}[B_k|A] = \frac{\mathbf{P}[A|B_k]\, \mathbf{P}[B_k]}{\sum_{i \in I} \mathbf{P}[A|B_i]\, \mathbf{P}[B_i]}. \tag{2.3}$$

Beweis Es gilt

$$\mathbf{P}[B_k|A] = \frac{\mathbf{P}[B_k \cap A]}{\mathbf{P}[A]} = \frac{\mathbf{P}[A|B_k]\, \mathbf{P}[B_k]}{\mathbf{P}[A]}.$$

Setze jetzt (2.2) für $\mathbf{P}[A]$ ein. □

Beispiel 2.7 Bei der Produktion gewisser elektronischer Bauteile sind 2% der Ware defekt. Ein schnelles Testverfahren erkennt ein defektes Bauteil mit Wahrscheinlichkeit 95%, meldet aber bei 10% der intakten Bauteile falschen Alarm.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein als defekt erkanntes Bauteil wirklich defekt?

Wir machen die folgende Modellierung. Seien

$$A := \{\text{Bauteil wird als defekt deklariert}\}$$
$$B := \{\text{Bauteil ist defekt}\}$$

sowie

$$\mathbf{P}[B] = 0.02, \qquad \mathbf{P}[B^c] \; = 0.98$$
$$\mathbf{P}[A|B] = 0.95 \qquad \mathbf{P}[A|B^c] = 0.1.$$

Die Bayes'sche Formel liefert nun

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[B|A] \;&=\; \frac{\mathbf{P}[A|B]\,\mathbf{P}[B]}{\mathbf{P}[A|B]\,\mathbf{P}[B] + \mathbf{P}[A|B^c]\,\mathbf{P}[B^c]}\\ &=\; \frac{0.95\cdot 0.02}{0.95\cdot 0.02 + 0.1\cdot 0.98} = \frac{19}{117} \approx 0.162.\end{aligned}$$

Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht erkanntes Bauteil dennoch defekt ist

$$\mathbf{P}[B|A^c] \;=\; \frac{0.05\cdot 0.02}{0.05\cdot 0.02 + 0.9\cdot 0.98} \;=\; \frac{1}{883} \;\approx\; 0.00113. \qquad \diamond$$

2.2 Konstruktion von W-Räumen durch bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel 2.8 (Polyas Urnenmodell) Zunächst befinden sich k rote und $n-k$ blaue Kugeln in einer Urne. Es wird jeweils eine Kugel gezogen und zusammen mit einer *weiteren* Kugel der selben Farbe zurückgelegt. Zur Zeit $i \in \mathbb{N}_0$ befinden sich also $n+i$ Kugeln in der Urne, wobei die Anzahl S_i der roten Kugeln zufällig ist. Wir schreiben für $i = 1, \ldots, n$

$$X_i := \begin{cases} 1, & \text{falls die } i\text{-te Kugel rot ist,}\\ 0, & \text{falls die } i\text{-te Kugel blau ist.}\end{cases}$$

Also ist $S_i = k + X_1 + \ldots + X_i$. Wir suchen einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, auf dem alle Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ definiert werden können. $\diamond$

Wir betrachten jetzt die allgemeine Situation.

Sei $(\Omega_0, \mathbf{P}_0)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und seien $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ diskrete Räume. Wir möchten zufällige Beobachtungen X_i mit Werten in Ω_i machen ($i = 0, \ldots, n$). Und zwar möchten wir annehmen, dass X_0 wie $\mathbf{P}_0$ verteilt ist. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ hingegen soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X_i den Werte $\omega_i \in \Omega_i$ annimmt davon abhängen, welches die bisherigen Beobachtungen $X_0, \ldots, X_{i-1}$ waren. Mit anderen Worten, wir wollen für jedes $i = 1, \ldots, n$ und für jede Wahl von $\omega_0, \ldots, \omega_{i-1}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\omega_0,\ldots,\omega_{i-1}}$ auf Ω_i vorschreiben, sodass

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[X_0 = \omega_0] \;&=\; \mathbf{P}_0[\{\omega_0\}]\\ \mathbf{P}\big[X_i = \omega_i \,|\, X_0 = \omega_0, \ldots, X_{i-1} = \omega_{i-1}\big] \;&=\; P_{\omega_0,\ldots,\omega_{i-1}}(\{\omega_i\}),\end{aligned} \tag{2.4}$$

gilt, jedenfalls wenn $\mathbf{P}[X_0 = \omega_0, \ldots, X_{i-1} = \omega_{i-1}] > 0$ ist.

Was brauchen wir? Einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \Omega_i$, so, dass (2.4) gilt.

Satz 2.9 *Es existieren ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \Omega_i$, so, dass* (2.4) *gilt für jedes $i = 1, \ldots, n$ und jedes $\omega \in \Omega$ mit $\mathbf{P}[X_0 = \omega_0, \ldots, X_{i-1} = \omega_{i-1}] > 0$.*

Die gemeinsame Verteilung von $X_0, \ldots, X_n$ ist eindeutig festgelegt.

Beweis „Existenz.“ Seien $\Omega := \Omega_0 \times \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ und

$$X_i : \Omega \to \Omega_i, \qquad \omega \mapsto \omega_i \quad \text{für } \ i = 0, \ldots, n.$$

Definiere $\mathbf{P}$ durch

$$\mathbf{P}[\{\omega\}] \; = \; \mathbf{P}_0(\{\omega_0\}) \prod_{i=1}^{n} P_{\omega_0,\ldots,\omega_{i-1}}[\{\omega_i\}].$$

Dann ist für $i = 0, \ldots, n$ (wegen $P_{\omega_0,\ldots,\omega_{j-1}}(\Omega_j) = 1$ für jedes $j = 1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[X_0 =& \omega_0, \ldots, X_i = \omega_i\big] \\
&= \sum_{\omega_{i+1}\in\Omega_{i+1}} \cdots \sum_{\omega_n\in\Omega_n} \mathbf{P}[X_0 = \omega_0, \ldots, X_n = \omega_n] \\
&= \sum_{\omega_{i+1}\in\Omega_{i+1}} \cdots \sum_{\omega_n\in\Omega_n} \mathbf{P}_0[\{\omega_0\}] \prod_{j=1}^{n} P_{\omega_0,\ldots,\omega_{j-1}}(\{\omega_j\}) \\
&= \mathbf{P}_0[\{\omega_0\}] \prod_{j=1}^{i} P_{\omega_0,\ldots,\omega_{j-1}}(\{\omega_j\}) \prod_{j=i+1}^{n} \sum_{\omega_j\in\Omega_j} P_{\omega_0,\ldots,\omega_{j-1}}(\{\omega_j\}) \\
&= \mathbf{P}_0[\{\omega_0\}] \prod_{j=1}^{i} P_{\omega_0,\ldots,\omega_{j-1}}(\{\omega_j\}) \prod_{j=i+1}^{n} \underbrace{P_{\omega_0,\ldots,\omega_{j-1}}(\Omega_j)}_{=1} \\
&= \mathbf{P}_0[\{\omega_0\}] \prod_{j=1}^{i} P_{\omega_0,\ldots,\omega_{j-1}}(\{\omega_j\}).
\end{aligned}$$

Speziell gilt (für $i = 0$) $\mathbf{P}[\{\omega_0\}] = \mathbf{P}_0[\{\omega_0\}]$ und (für $i > 0$)

$$\mathbf{P}\big[X_i = \omega_i \,\big|\, X_0 = \omega_0, \ldots, X_{i-1} = \omega_{i-1}\big] = \frac{\mathbf{P}[X_0 = \omega_0, \ldots, X_i = \omega_i]}{\mathbf{P}[X_0 = \omega_0, \ldots, X_{i-1} = \omega_{i-1}]} = P_{\omega_0,\ldots,\omega_{i-1}}(\{\omega_i\}),$$

falls der Nenner nicht verschwindet. Insgesamt gilt also (2.4).

„Eindeutigkeit“ Gilt (2.4), so ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[\{\omega\}] &= \mathbf{P}\big[X_n = \omega_n, \ldots, X_0 = \omega_0\big] \\
&= \mathbf{P}\big[X_n = \omega_n \,\big|\, X_{n-1} = \omega_{n-1}, \ldots, X_0 = \omega_0\big] \cdot \mathbf{P}\big[X_{n-1} = \omega_{n-1}, \ldots, X_0 = \omega_0\big] \\
&= P_{\omega_0,\ldots,\omega_{n-1}}(\{\omega_n\}) \cdot \mathbf{P}\big[X_{n-1} = \omega_{n-1}, \ldots, X_0 = \omega_0\big] \\
&\;\vdots \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} P_{\omega_0,\ldots,\omega_{i-1}}(\{\omega_i\}) \right) \mathbf{P}_0[X_0 = \omega_0].
\end{aligned}$$

□

2.3 Markovketten

Beispiel 2.10 (Wettermodell) Wir betrachten ein einfaches stochastisches Modell für das Wetter. Das Wetter kann drei Werte annehmen: S (für „Sonne“), B (für „bedeckt“) und R (für „Regen“). Wir machen täglich je eine Wetterbeobachtung an den Tagen $0, 1, \ldots, n$ und erhalten so Realisierungen von Zufallsvariablen $X_0, X_1, \ldots, X_n$ mit Werten in $E := \{S, B, R\}$.

Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass morgen die Sonne scheint, wenn sie heute scheint, gegeben ist durch $A(S,S) = 0.6$. Ähnlich kann man vielleicht die Wahrscheinlichkeiten für die anderen Übergänge empirisch bestimmen, zu

$$\begin{aligned}
A(S,S) &= 0.6, \quad & A(S,B) &= 0.3, \quad & A(S,R) &= 0.1,\\
A(B,S) &= 0.3, \quad & A(B,B) &= 0.2, \quad & A(B,R) &= 0.5,\\
A(R,S) &= 0.0, \quad & A(R,B) &= 0.1, \quad & A(R,R) &= 0.9.
\end{aligned}$$

Die Übergänge sind also durch eine Matrix mit nichtnegativen Einträgen gegeben, deren Zeilensummen jeweils Eins sind. Ziel dieses Abschnittes ist es, mit der Konstruktion aus dem vorangehenden Abschnitt die entsprechenden Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum zu konstruieren. Ferner wollen wir Gleichgewichtsverteilungen und das Langzeitverhalten untersuchen. ◇

Sei stets E eine abzählbare Menge.

Definition 2.11 *Eine reellwertige Matrix $A = (A(x,y))_{x,y\in E}$ heißt **stochastisch**, falls*

$$A(x,y) \geq 0 \quad \text{für alle } x,y \in E \quad \text{und} \quad \sum_{z\in E} A(x,z) = 1 \quad \text{für alle } x \in E.$$

Sei A eine stochastische Matrix. Für $i \in \mathbb{N}$ und $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_i \in E$ sei

$$P_{\omega_0,\ldots,\omega_{i-1}}(\{\omega_i\}) = A(\omega_{i-1}, \omega_i).$$

Ferner sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E. Dann existieren nach Satz 2.9 für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum $(E^n, \mathbf{P}_\mu)$ und Zufallsvariablen $X_0, \ldots, X_n$ auf diesem Raum, so, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\mu[X_0 = x] &= \mu(\{x\}) \quad \text{für jedes } x \in E,\\
\mathbf{P}_\mu[X_i = x_i \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}] &= \mathbf{P}_\mu[X_i = x_i \,|\, X_{i-1} = x_{i-1}] \qquad (2.5)\\
&= A(x_{i-1}, x_i)
\end{aligned}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $x_0, \ldots, x_i \in E$ mit $\mathbf{P}_\mu[X_0 = x_0, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}] > 0$. Ist $\mu = \delta_x$, so schreiben wir auch $\mathbf{P}_x := \mathbf{P}_{\delta_x}$. Man bemerke, dass der wesentliche Punkt ist, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten nur vom letzten Zeitpunkt abhängen und nicht von der kompletten Historie der Beobachtungen. Diese Gedächtnislosigkeit wird auch Markov-Eigenschaft genannt.

Definition 2.12 (Markovkette) *Eine Folge $X = (X_i)_{i\in\mathbb{N}_0,\, i\leq n}$ von Zufallsvariablen mit Werten in E auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_\mu)$ und mit der Eigenschaft (2.5) heißt **Markovkette** mit Zustandsraum E, Übergangsmatrix (oder Übergangswahrscheinlichkeiten) A und Startverteilung μ. Ist $n < \infty$, so sagen wir, dass X die Länge n hat.*

Satz 2.13 *Sei A eine stochastische Matrix auf dem abzählbaren Raum E, und sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E. Dann existiert hierzu eine in Verteilung eindeutige Markovkette X mit Verteilung $\mathbf{P}_\mu$.*

Beweis Für $n < \infty$ ist das eine triviale Schlussfolgerung aus Satz 2.9. Für $n = \infty$ können wir die Kette nicht auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum definieren. Wir führen eine ad hoc Konstruktion in Abschnitt 2.5 durch (Beispiel 2.40). Eine systematische Konstruktion folgt in der Vorlesung Stochastik I. □

Beispiel 2.14 (Gamblers Ruin) Wir betrachten ein Glücksspiel zwischen Peter und Paul. Peter hat zu Beginn k Euro, Paul hat $n-k$ Euro. In jeder Runde des Spiels wird eine Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichkeit p Kopf zeigt. In diesem Fall gewinnt Peter von Paul einen Euro. Andernfalls verliert er an Paul einen Euro. Wir modellieren Peters Kontostand als Markovkette mit Zustandsraum $E = \{0, \dots, n\}$ und Übergangsmatrix A, gegeben durch

$$\begin{aligned} A(0,0) &= 1, \\ A(n,n) &= 1, \\ A(x,x+1) &= p, && \text{falls } x \in \{1, \dots, n-1\}, \\ A(x,x-1) &= 1-p, && \text{falls } x \in \{1, \dots, n-1\}, \\ A(x,y) &= 0, && \text{sonst.} \end{aligned} \qquad \diamond$$

Beispiel 2.15 (Irrfahrt) Die symmetrische einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist die Markovkette auf $E = \mathbb{Z}^d$ mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$A(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d}, & \text{falls } \|x-y\|_2 = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \diamond$$

Sei im Folgenden stets X die zu A gehörige Markovkette auf E.

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit A^n die n–te Matrixpotenz von A.

Lemma 2.16 *Es gilt* $\mathbf{P}_x[X_n = y] = A^n(x,y)$ *für alle* $x, y \in E$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis Das geht einfach per Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x\big[X_{n+1} = y\big] &= \sum_{z \in E} \mathbf{P}\big[X_{n+1} = y \,|\, X_n = z\big]\, \mathbf{P}_x\big[X_n = z\big] \\ &= \sum_{z \in E} A(z,y)\, A^n(x,z) \;=\; A^{n+1}(x,y). \end{aligned} \qquad \square$$

Satz 2.17 (Gleichgewichte von Markovketten) *Seien E eine endliche Menge und A eine stochastische Matrix auf E mit der Eigenschaft*

$$\text{für alle } x, y \in E \text{ existiert ein } N = N(x,y) \text{ mit } \qquad A^N(x,y) > 0. \tag{2.6}$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß π auf E mit

$$\pi A(\{x\}) := \sum_{y \in E} \pi(\{y\}) A(y,x) = \pi(\{x\}) \quad \text{für alle } x \in E. \tag{2.7}$$

Weiter gilt $\pi(\{x\}) > 0$ für alle $x \in E$.

Wir nennen π die ***Gleichgewichtsverteilung*** *der zugehörigen Kette X. Es gilt nämlich*

$$\mathbf{P}_\pi[X_n = x] = \pi(\{x\}) \quad \text{für alle } x \in E \text{ und } n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.8}$$

Mit anderen Worten: wenn der Zustand der Kette zur Zeit Null zufällig ist und wie π verteilt, dann gilt dies ebenfalls für jeden späteren Zeitpunkt.

Beweis „Existenz.“ Wähle ein $x_0 \in E$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_n := \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A^i(x_0, x) \right)_{x \in E}$$

ein Vektor in $[0,1]^E$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert also eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $n_k \uparrow \infty$ so dass die Folge a_{n_k} konvergiert. Wir definieren jetzt

$$\pi(\{x\}) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k - 1} A^i(x_0, x).$$

(Mit anderen Worten: π ist definiert als *ein* Häufungspunkt der Folge der Cesaro-Mittel.) Die Linearität des Limes liefert

$$\begin{aligned}
\pi A(\{x\}) &= \sum_{y \in E} \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} A^i(x_0, y) A(y, x) \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \sum_{y \in E} A^i(x_0, y) A(y, x) \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} A^{i+1}(x_0, x) \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} A^i(x_0, x) + \lim_{k \to \infty} \frac{1}{n_k} \big(A^{n_k}(x_0, x) - A^0(x_0, x) \big) \\
&= \pi(\{x\}).
\end{aligned}$$

Also gilt $\pi A = \pi$.

Gelte nun $\pi A = \pi$ und $\pi(\{x\}) \geq 0$ für alle $x \in E$. (Für das folgende Argument brauchen wir nicht, dass $\sum_{x \in E} \pi(\{x\}) = 1$.) Sei $\tilde{x} \in E$ so gewählt, dass $\pi(\{\tilde{x}\}) > 0$ ist. Dann ist für jedes $x \in E$ (und mit $N = N(\tilde{x}, x)$)

$$\pi(\{x\}) \;=\; \pi A^N(\{x\}) \;=\; \sum_{y \in E} \pi(\{y\})\, A^N(y, x) \;\geq\; \pi(\{\tilde{x}\})\, A^N(\tilde{x}, x) \;>\; 0 \tag{2.9}$$

nach Voraussetzung.

„Eindeutigkeit.“ Sei μ eine weitere Gleichgewichtsverteilung und sei $x_0 \in E$ so gewählt, dass

$$\lambda \;:=\; \max\left\{ \frac{\mu(\{x\})}{\pi(\{x\})},\; x \in E \right\} \;=\; \frac{\mu(\{x_0\})}{\pi(\{x_0\})}.$$

Setze $\nu := \lambda\pi - \mu$. Dann ist $\nu A = \nu$, $\nu(\{x_0\}) = 0$ und $\nu(\{x\}) \geq 0$ für alle x. Gäbe es ein $\tilde{x}$ mit $\nu(\{\tilde{x}\}) > 0$, so wäre aber $\nu(\{x\}) > 0$ für alle $x \in E$. Also ist $\nu = 0$ und damit $\mu = \pi$.

Zusatz. Die Aussage (2.8) folgt aus Lemma 2.16:

$$\mathbf{P}_\pi[X_n = x] \;=\; \pi A^n(\{x\}) \;=\; \pi(\{x\}). \qquad \square$$

Beispiel 2.18 Wir kommen auf das Beispiel 2.10 mit der Wettervorhersage zurück. Dort ist (mit der Kodierung „Sonne“=1, „bedeckt“=2, „Regen“=3) der Zustandsraum $E = \{1,\ 2,\ 3\}$ und die Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

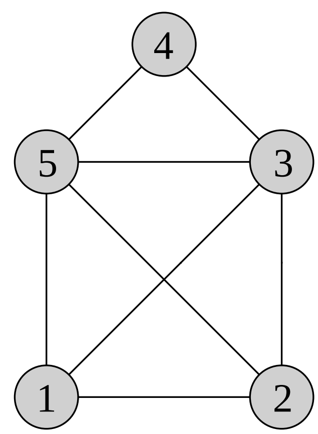
Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(x) = x^3 - \frac{17}{10}x^2 + \frac{7}{10}x = \left(x^2 - \frac{17}{10}x + \frac{7}{10}\right)x = (x-1)\left(x - \frac{7}{10}\right)x.$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7/10$ und $\lambda_3 = 0$. Wir berechnen von Hand (oder mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms) zugehörige **Links**-Eigenvektoren: $v_1 = (3, 4, 23)$, $v_2 = (-3, -1, 1)$, $v_3 = (1, -2, 1)$. Die invariante Verteilung π ist ein auf 1 normierter Linkseigenvektor zum Eigenwert 1, also

$$\pi = \left(\frac{3}{30}, \frac{4}{30}, \frac{23}{30}\right).$$ ◇

Beispiel 2.19 Wir betrachten eine Markovkette mit fünf Zuständen, $E = \{1, \ldots, 5\}$, siehe Grafik. Eine Spielfigur darf von Feld zu Feld springen. Es wird dabei in jedem Schritt zufällig einer der Nachbarn (entlang der Linien) ausgewählt. Wir erhalten also als Übergangsmatrix



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms bestimmen wir schnell die Eigenwerte (absteigend nach ihren Beträgen geordnet)

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{5}{24} - \frac{\sqrt{73}}{24} \approx -0.5643, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{3}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{4}, \quad \lambda_5 = -\frac{5}{24} + \frac{\sqrt{73}}{24} \approx 0.1477.$$

Als Gleichgewichtszustand erhalten wir den auf 1 normierten Links-Eigenvektor zum Eigenwert 1:

$$\pi = \left(\frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{4}{16}, \frac{2}{16}, \frac{4}{16}\right).$$

Man bemerke, dass die Gewichte proportional zur Zahl abgehender Kanten im jeweiligen Punkt sind. ◇

Der folgende Satz wird erst in der Vorlesung Stochastik II bewiesen.

Satz 2.20 (Langzeitverhalten von Markovketten) *Seien E eine endliche Menge und A eine stochastische Matrix auf E mit der Eigenschaft, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$A^N(x,y) > 0 \quad \textit{für alle} \;\; x,y \in E. \tag{2.10}$$

(i) Dann gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_\mu[X_n = x] \;=\; \pi(\{x\}) \quad \textit{für jedes} \;\; x \in E.$$

(ii) Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n(x) := \frac{1}{n}\#\{i = 0, \dots, n-1 : \; X_i = x\}$$

die mittlere Aufenthaltszeit der Kette in x bis zur Zeit n. Es gilt der so genannte Ergodensatz

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) \;=\; \pi(\{x\}) \quad \mathbf{P}_\mu\textit{-fast sicher.}$$

Bemerkung 2.21 (Konvergenzgeschwindigkeit) Man kann zeigen, dass für ein beliebiges W-Maß μ auf E der Abstand $\|\mu A^n - \pi\|_\infty \approx |\lambda_2|^n$ ist für große n. Dabei ist λ_2 der betragsmäßig zweitgrößte Eigenwert. Die Bedingung von Satz 2.20 sichert, dass $|\lambda_2| < 1$ ist. $\diamond$

Beispiel 2.22 Die Markovketten in Beispiel 2.18 und 2.19 erfüllen die Bedingungen des Satzes. In Beispiel 2.18 ist die Bedingung mit $N = 2$ erfüllt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{20} & \frac{1}{4} & \frac{3}{10} \\ \frac{6}{25} & \frac{9}{50} & \frac{29}{50} \\ \frac{3}{100} & \frac{11}{100} & \frac{43}{50} \end{pmatrix}.$$

In der Tat konvergiert A^n schnell gegen eine Matrix, deren jede Zeile gleich

$$\pi = \left(\frac{3}{30}, \frac{4}{30}, \frac{23}{30}\right) = (0.1, 0.133333333\dots, 0.766666666\dots)$$

ist. Wir berechnen etwa

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 0.1005699448 & 0.1335233149 & 0.7659067403 \\ 0.1002279779 & 0.1334093260 & 0.7663626961 \\ 0.09988601105 & 0.1332953370 & 0.7668186519 \end{pmatrix}$$

und

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 0.1000000128 & 0.1333333376 & 0.7666666495 \\ 0.1000000051 & 0.1333333350 & 0.7666666598 \\ 0.09999999743 & 0.1333333325 & 0.7666666701 \end{pmatrix}.$$

Zum Vergleich: nach Bemerkung 2.21 sollte die Abweichung zu π nach 20 Schritten von der Größenordnung $|\lambda_2|^{20} = 0.7^{20} = 0.0007979226630$ sein und nach 50 Schritten $0.7^{50} = 1.8 \cdot 10^{-8}$. Man vergleiche dies mit A^{20} und A^{50}.

In Beispiel 2.19 ist

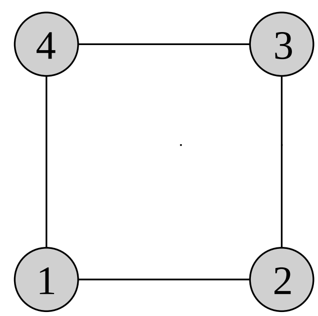
$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{7}{36} & \frac{1}{6} & \frac{7}{36} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{18} & \frac{7}{36} & \frac{1}{6} & \frac{7}{36} \\ \frac{7}{48} & \frac{7}{48} & \frac{17}{48} & \frac{1}{16} & \frac{7}{24} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{48} & \frac{7}{48} & \frac{7}{24} & \frac{1}{16} & \frac{17}{48} \end{pmatrix}.$$

Das heißt, die Bedingung von Satz 2.20 ist erfüllt mit $N = 2$. Tatsächlich ist etwa

$$A^{20} = \begin{pmatrix} 0.1875010098 & 0.1875010095 & 0.2499981873 & 0.1250016060 & 0.2499981873 \\ 0.1875010095 & 0.1875010098 & 0.2499981873 & 0.1250016060 & 0.2499981873 \\ 0.1874986405 & 0.1874986405 & 0.2500024408 & 0.1249978375 & 0.2500024408 \\ 0.1875024091 & 0.1875024091 & 0.2499956749 & 0.1250038320 & 0.2499956749 \\ 0.1874986405 & 0.1874986405 & 0.2500024408 & 0.1249978375 & 0.2500024408 \end{pmatrix}.$$

Zum Vergleich: $\pi = (0.1875, 0.1875, 0.25, 0.125, 0.25)$ und $|\lambda_2|^{20} \approx 0.5643^{20} = 0.0000107$. $\diamond$

Beispiel 2.23 Wir betrachten eine Markovkette ähnlich wie in Beispiel 2.19, jedoch auf einem anderen Graphen, siehe nebenstehende Grafik. Es ist also $E = \{1, 2, 3, 4\}$ und



$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix A erfüllt die Bedingung von Satz 2.17, nicht aber die von Satz 2.20, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$A^{2n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^{2n+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Tat ist das eindeutige Gleichgewicht $\pi = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Andererseits kann die Verteilung einer in $X_0 = 1$ gestarteten Markovkette X nicht gegen π konvergieren, denn $X_{2n} \in \{1, 3\}$ und $X_{2n+1} \in \{2, 4\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\diamond$

2.4 Unabhängigkeit von Ereignissen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien A, B Ereignisse. Wenn das Eintreten von A keine Information über das Eintreten von B liefert, so verstehen wir intuitiv B als unabhängig von A. Formal heißt dies

$$\mathbf{P}[B \,|\, A] = \mathbf{P}[B].$$

Dies können wir umformen zu $\mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[A] \cdot \mathbf{P}[B]$. Dies liefert die formale Definition der Unabhängigkeit im Sinne der Stochastik.

Beispiel 2.24 (Zweifacher Münzwurf) Seien $\Omega = \{0,1\}^2$ und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung. Seien

$$A := \{\omega \in \Omega : \omega_1 = 1\} \qquad \text{„Erster Wurf Kopf"}$$

und

$$B := \{\omega \in \Omega : \omega_2 = 1\}. \qquad \text{„Zweiter Wurf Kopf"}$$

Dann gilt $\mathbf{P}[A] = \mathbf{P}[B] = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{P}[A \cap B] = \frac{1}{4}$. Also ist $\mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[A]\,\mathbf{P}[B]$ und damit sind A und B unabhängig.

Sei nun weiter

$$C := \{\omega \in \Omega : \omega_1 \neq \omega_2\}.$$

Dann gelten auch $\mathbf{P}[C] = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{P}[A \cap C] = \frac{1}{4}$. Es sind also A und C unabhängig. Ferner ist $\mathbf{P}[B \cap C] = \frac{1}{4}$, also sind auch B und C unabhängig. Wir können hieraus jedoch nicht schlussfolgern, dass $\mathbf{P}[A \cap B \cap C]$ gleich dem Produkt $\mathbf{P}[A]\,\mathbf{P}[B]\,\mathbf{P}[C]$ wäre. In der Tat ist ja $\mathbf{P}[A \cap B \cap C] = 0$ und $\mathbf{P}[A]\,\mathbf{P}[B]\,\mathbf{P}[C] = \frac{1}{8}$. Dies spiegelt unsere intuitive Vorstellung wider, dass die Familie (A, B, C) *nicht* unabhängig ist. Für den Begriff der Unabhängigkeit von Familien von Ereignissen ist also mehr notwendig als die Unabhängigkeit aller Paare aus der Familie. ◇

Definition 2.25 (Unabhängigkeit von Ereignissen) *(i) Zwei Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, falls*

$$\mathbf{P}[A \cap B] = \mathbf{P}[A] \cdot \mathbf{P}[B].$$

*(ii) Seien $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und $(A_i,\, i \in I)$ eine Familie von Ereignissen. Gilt für jede endliche Teilmenge $J \subset I$ die **Produktformel***

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] = \prod_{j \in J} \mathbf{P}[A_j], \tag{2.11}$$

so heißt die Familie $(A_i,\, i \in I)$ unabhängig.

Sind A und B unabhängige Ereignisse, dann ist

$$\mathbf{P}[A^c \cap B] \;=\; \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A \cap B] \;=\; \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A]\,\mathbf{P}[B] \;=\; \big(1 - \mathbf{P}[A]\big)\,\mathbf{P}[B] \;=\; \mathbf{P}[A^c]\,\mathbf{P}[B].$$

Also sind auch A^c und B unabhängig. Wir formulieren diesen Sachverhalt etwas allgemeiner.

Lemma 2.26 *Für $A \in \mathcal{A}$ setze*

$$A^0 := A \quad \text{und} \quad A^1 := A^c.$$

Dann sind äquivalent

(i) $(A_i,\, i \in I)$ ist unabhängig.

(ii) $(A_i^{\varphi(i)},\, i \in I)$ ist unabhängig für eine Abbildung $\varphi : I \to \{0,1\}$.

(iii) $(A_i^{\varphi(i)},\, i \in I)$ ist unabhängig für jede Abbildung $\varphi : I \to \{0,1\}$.

Beweis Übung! □

Beispiel 2.27 Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbf{P}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, diskrete Wahrscheinlichkeitsräume und

$$\Omega := \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \quad \text{und} \quad \mathbf{P} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i.$$

Per Definition ist also $\mathbf{P}[\{\omega\}] = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i[\{\omega_i\}]$.

Sei $\pi_i : \Omega \to \Omega_i$, $\omega \mapsto \omega_i$ die i-te Projektion. Seien $B_i \subset \Omega_i$ und

$$A_i := \{\omega \in \Omega : \ \omega_i \in B_i\} = \pi_i^{-1}(B_i).$$

Dann ist $(A_i, \ i = 1, \ldots, n)$ unabhängig. Sei nämlich $J \subset \{1, \ldots, n\}$. Setze

$$C_i := \begin{cases} B_i, & \text{falls } i \in J, \\ \Omega_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann $\pi_i^{-1}(C_i) = A_i$, falls $i \in J$ und $\pi_i^{-1}(C_i) = \Omega$, falls $i \notin J$. Also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left[\bigcap_{j \in J} A_j\right] &= \mathbf{P}\big[\{\omega : \ \omega_i \in C_i \ \text{ für alle } \ i = 1, \ldots, n\}\big] \\ &= \sum_{\omega_1 \in C_1} \cdots \sum_{\omega_n \in C_n} \mathbf{P}[\{\omega\}] \\ &= \sum_{\omega_1 \in C_1} \cdots \sum_{\omega_n \in C_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i[\{\omega_i\}] \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{\omega_i \in C_i} \mathbf{P}_i[\{\omega_i\}] \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i[C_i] \\ &= \prod_{j \in J} \mathbf{P}_j[B_j] \\ &= \prod_{j \in J} \mathbf{P}[A_j]. \end{aligned}$$

◇

Beispiel 2.28 (Euler'sche Primzahlformel) Die **Riemann'sche Zetafunktion** ist definiert durch die Dirichlet-Reihe

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad \text{für alle } \ s \in (1, \infty).$$

Die Euler'sche Primzahlformel ist die Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - p^{-s})^{-1},$$

wobei $\mathcal{P} := \{p \in \mathbb{N} : \ p \text{ ist Primzahl}\}$.

Wir beweisen die Produktdarstellung probabilistisch. Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und (für festes s) $\mathbf{P}$ definiert durch

$$\mathbf{P}[\{n\}] = n^{-s} \, \zeta(s)^{-1} \quad \text{für } \ n \in \mathbb{N}.$$

Sei $p\mathbb{N} = \{pn : n \in \mathbb{N}\}$ und $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P} : p \le n\}$. Dann gilt

$$(p\mathbb{N},\, p \in \mathcal{P}) \qquad \text{ist unabhängig.}$$

In der Tat: Für $k \in \mathbb{N}$ und paarweise unterschiedliche $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$ ist

$$\bigcap_{i=1}^{k} p_i\mathbb{N} = (p_1 \cdots p_k)\mathbb{N},$$

also

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^{k}(p_i\mathbb{N})\right] &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}[\{p_1 \cdots p_k n\}] \\
&= \zeta(s)^{-1}(p_1 \cdots p_k)^{-s} \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} \\
&= (p_1 \cdots p_k)^{-s} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}[p_i\mathbb{N}].
\end{aligned}$$

Daher ist aber auch $((p\mathbb{N})^c,\, p \in \mathcal{P})$ unabhängig. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\zeta(s)^{-1} &= \mathbf{P}[\{1\}] \\
&= \mathbf{P}\Big[\bigcap_{p\in\mathcal{P}} (p\mathbb{N})^c\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big[\bigcap_{p\in\mathcal{P}_n} (p\mathbb{N})^c\Big] \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{p\in\mathcal{P}_n} (1 - \mathbf{P}[p\mathbb{N}]) \\
&= \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - p^{-s}).
\end{aligned}$$

◇

2.5 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Wir wollen nun definieren, wann wir Familien von Zufallsvariablen unabhängig nennen, nämlich dann, wenn die Ereignisse, die diese beschreiben, unabhängige Familien ergeben.

Definition 2.29 (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen) *Seien $I \ne \emptyset$ eine Indexmenge und $(X_i,\, i \in I)$ eine Familie von Zufallsvariablen mit Werten in Messräumen $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i \in I$. Die Familie $(X_i,\, i \in I)$ heißt unabhängig, falls für jede Wahl von $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in I$ gilt*

$$\big(X^{-1}(A_i),\, i \in I\big) \qquad \textit{ist unabhängig.}$$

Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, so schreiben wir $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{X_i} := \mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}$.

Beispiel 2.30 (Vergleiche Beispiel 2.27.)
Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbf{P}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, diskrete Wahrscheinlichkeitsräume und

$$\Omega := \prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \qquad \mathbf{P} := \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i.$$

Sei $X_i : \Omega \to \Omega_i$, $\omega \mapsto \omega_i$ die i-te Projektion ($i = 1, \ldots, n$). Dann ist die Familie $(X_i,\, i = 1, \ldots, n)$ unabhängig und $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_i$. In der Tat: für $A_i \subset \Omega_i$ ist $\mathbf{P}[X_i \in A_i] = \mathbf{P}[\{\omega : \omega_i \in A_i\}] = \mathbf{P}_i[A_i]$ (per Definition), also $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_i$. Weiter ist für jede Wahl von $A_i \subset \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$ die Familie von Ereignissen $(X_i^{-1}(A_i),\, i = 1, \ldots, n)$ unabhängig (siehe Beispiel 2.27), also gilt

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}[X_i \in A_i].$$

Damit ist aber die Familie $(X_i,\, i = 1, \ldots, n)$ unabhängig. ◇

Beispiel 2.31 Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $X_i \sim \mathrm{Ber}_p$ für ein $p \in [0,1]$. Dann ist $(X_1 + \ldots + X_n) \sim b_{n,p}$. In der Tat: Für $k \in \{0, \ldots, n\}$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[X_1 + \ldots + X_n = k] &= \sum_{b \in \{0,1\}^n :\, b_1 + \ldots + b_n = k} \mathbf{P}[X_1 = b_1, \ldots, X_n = b_n] \\
&= \sum_{b \in \{0,1\}^n :\, b_1 + \ldots + b_n = k} \prod_{i=1}^n p^{b_i} (1-p)^{1-b_i} \\
&= p^k (1-p)^{n-k} \, \#\{b \in \{0,1\}^n : b_1 + \ldots + b_n = k\} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}$$

◇

Beispiel 2.32 Seien $\Omega = (0,1]$ und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Für $\omega \in (0,1]$ sei $X_i(\omega)$ die i-te Ziffer der (nichtabbrechenden) Binärdarstellung von ω:

$$\omega = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} X_i(\omega).$$

Dann ist $(X_i,\, i \in \mathbb{N})$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{P}_{X_i} = \mathrm{Ber}_{1/2}$. In der Tat: Offenbar sind für $n \in \mathbb{N}$ die Ereignisse $(\{X_i = b_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n\},\, b \in \{0,1\}^n)$ paarweise disjunkt und

$$\mathbf{P}[X_i = b_i \ \text{ für alle } \ i = 1, \ldots, n] = \mathbf{P}\left[\left(\sum_{i=1}^n 2^{-i} b_i, 2^{-n} + \sum_{i=1}^n 2^{-i} b_i\right]\right] = 2^{-n}. \tag{2.12}$$

Daher ist

$$\mathbf{P}[X_n = b_n] = \sum_{b \in \{0,1\}^{n-1}} \mathbf{P}\big[X_1 = b_1, \ldots, X_n = b_n\big] = 2^{n-1}\, 2^{-n} = \frac{1}{2}.$$

Zusammen mit (2.12) erhalten wir

$$\mathbf{P}\big[X_i = b_i \ \text{ für alle } \ i = 1, \ldots, n\big] = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}[X_i = b_i] \quad \text{ für alle } \ b \in \{0,1\}^n.$$

Die meiste Arbeit ist an dieser Stelle schon getan. Formal haben wir jedoch nicht für beliebige endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ die Produktformel gezeigt, sondern nur für $\{1, \ldots, n\}$. Hieraus bekommen wir aber leicht die Aussage für beliebiges endliches $J \subset \mathbb{N}$, wie wir in etwas allgemeinerer Situation im folgenden Satz zeigen. ◇

Satz 2.33 *Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diskrete Zufallsvariablen mit Werten in abzählbaren Räumen $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. Dann sind äquivalent:*

(i) $(X_i,\ i = 1, \ldots, n)$ *ist unabhängig.*

(ii) $\mathbf{P}[X_1 = \omega_1, \ldots, X_n = \omega_n] = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}[X_i = \omega_i]$ *für alle* $\omega_1 \in \Omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega_n$.

Eine Folge $(X_i,\ i \in \mathbb{N})$ *diskreter Zufallsvariablen ist genau dann unabhängig, wenn (ii) für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Beweis (i) $\Longrightarrow$ (ii) ist klar. Gelte nun (ii). Sei $J \subset \{1, \ldots, n\}$ und $A_i \subset \Omega_i$ für jedes $i \in J$. Setze $A_i = \Omega_i$ für $i \notin J$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left[\bigcap_{j \in J} \{X_j \in A_j\}\right] &= \mathbf{P}\left[\bigcap_{j=1}^n \{X_j \in A_j\}\right] \\
&= \sum_{\omega_1 \in A_1} \cdots \sum_{\omega_n \in A_n} \mathbf{P}\left[X_1 = \omega_1, \ldots, X_n = \omega_n\right] \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{\omega_1 \in A_1} \cdots \sum_{\omega_n \in A_n} \prod_{j=1}^n \mathbf{P}\left[X_j = \omega_j\right] \\
&= \prod_{j=1}^n \sum_{\omega_j \in A_j} \mathbf{P}\left[X_j = \omega_j\right] \\
&= \prod_{j=1}^n \mathbf{P}\left[X_j \in A_j\right] \\
&= \prod_{j \in J} \mathbf{P}\left[X_j \in A_j\right].
\end{aligned}$$

Sei nun der Fall einer unendlichen Folge $X_1, X_2, \ldots$ betrachtet. Für endliches $J \subset \mathbb{N}$ und A_j, $j \in J$ wähle man $n = \max J$ und führe die obige Rechnung noch einmal durch. □

Satz 2.34 *Sind* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *reelle Zufallsvariablen, so sind äquivalent:*

(i) $(X_i,\ i = 1, \ldots, n)$ *ist unabhängig.*

(ii) $\mathbf{P}\big[X_1 \le b_1, \ldots, X_n \le b_n\big] = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}[X_i \le b_i]$ *für alle* $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Hat jedes X_i *eine Dichte* f_i*, so sind (i) und (ii) äquivalent zu*

(iii) $\mathbf{P}_{(X_1, \ldots, X_n)}$ *hat eine Dichte* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$*, und es gilt*

$$f\big((x_1, \ldots, x_n)\big) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n).$$

Eine Folge $(X_i,\ i \in \mathbb{N})$ *reeller Zufallsvariablen ist genau dann unabhängig, wenn (ii) (bzw. (iii)) für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Beweis Die Implikationen (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) sind klar. Gelte nun (ii). Dann ist für jedes $b \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{P}_{(X_1, \ldots, X_n)}[(-\infty, b]] = \left(\bigotimes_{i=1}^n \mathbf{P}_{X_i}\right)[(-\infty, b]].$$

Nach Satz 1.24 und Satz 1.13 ist aber $\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}$ durch Angabe von $\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}[(-\infty,b]]$, $b\in\mathbb{R}^n$ eindeutig festgelegt, also ist $\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}=\bigotimes_{i=1}^n\mathbf{P}_{X_i}$. Mithin ist die gemeinsame Verteilung die Verteilung unabhängiger Zufallsvariablen und damit sind die Zufallsvariablen unabhängig.

Sei nun der Fall einer unendlichen Folge $X_1,X_2,\ldots$ reeller Zufallsvariablen betrachtet. Es gelte also (i) für jedes n. Sei $J\subset\mathbb{N}$ endlich, und seien $A_j\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $j\in J$. Wähle $n=\max J$ und $A_j=\mathbb{R}$ für $j\in\{1,\ldots,n\}\setminus J$. Nach (i) gilt

$$\mathbf{P}\left[\bigcap_{j\in J}\{X_j\in A_j\}\right] = \mathbf{P}\left[\bigcap_{j=1}^n\{X_j\in A_j\}\right] = \prod_{j=1}^n\mathbf{P}[X_j\in A_j] = \prod_{j\in J}\mathbf{P}[X_j\in A_j].$$

Also ist $(X_i,\ i\in\mathbb{N})$ unabhängig. $\square$

Beispiel 2.35 Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig und standardnormalverteilt, also reellwertig mit Dichte $f_1(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-x^2/2)$, $x\in\mathbb{R}$. Dann hat $\mathbf{P}_{(X_1,\ldots,X_n)}$ die Dichte

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\exp\Big(-\frac{1}{2}\big(x_1^2+\ldots+x_n^2\big)\Big)\qquad\text{für }\ x\in\mathbb{R}^n. \qquad\diamond$$

Satz 2.36 *Seien $(X_i,\ i\in I)$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen und $(\phi_i,\ i\in I)$ eine Familie messbarer Abbildungen. Definiere $Y_i:=\phi_i(X_i)$. Dann ist auch $(Y_i,\ i\in I)$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen.*

Beweis Sei $J\subset I$ endlich, und seien $A_j, j\in J$ messbare Mengen. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[Y_j\in A_j\ \text{ für alle }\ j\in J\right] &= \mathbf{P}\left[X_j\in\phi^{-1}(A_j)\ \text{ für alle }\ j\in J\right]\\ &= \prod_{j\in J}\mathbf{P}\left[X_j\in\phi^{-1}(A_j)\right]=\prod_{j\in J}\mathbf{P}\left[Y_j\in A_j\right].\end{aligned}$$ $\square$

Satz 2.37 *Sei $(X_i,\ i\in I)$ eine unabhängige Familie reeller Zufallsvariablen. Seien $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ und $j_1^1,\ldots,j_{n_1}^1,j_1^2,\ldots,j_{n_2}^2\in I$ paarweise unterschiedlich. Setze $Y_i:=(X_{j_1^i},\ldots,X_{j_{n_i}^i})$, $i=1,2$. Dann ist Y_i eine $\mathbb{R}^{n_i}$-wertige Zufallsvariable und Y_1 und Y_2 sind unabhängig.*

Beweis Sei

$$b=(b^1,b^2)=(b_1^1,\ldots,b_{n_1}^1,b_1^2,\ldots,b_{n_2}^2)\in\mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[(Y_1,Y_2)\in(-\infty,b]] &= \mathbf{P}[Y_1\in(-\infty,b^1],\ Y_2\in(-\infty,b^2]]\\ &= \mathbf{P}[X_{j_k^i}\le b_k^i\quad\text{für alle }\ i=1,2,\ k=1,\ldots,n_i]\\ &= \prod_{i=1}^2\prod_{k=1}^{n_i}\mathbf{P}[X_{j_k^i}\le b_k^i]\\ &= \prod_{i=1}^2\mathbf{P}[X_{j_k^i}\le b_k^i\quad\text{für alle }\ k=1,\ldots,n_i]\\ &= \prod_{i=1}^2\mathbf{P}[Y_i\in(-\infty,b^i]].\end{aligned}$$

Da die mehrdimensionale Verteilungsfunktion die Verteilung von (Y_1,Y_2) festlegt und diese die mehrdimensionale Verteilungsfunktion von zwei unabhängigen Zufallsvariablen ist, sind Y_1 und Y_2 selber unabhängig. $\square$

Korollar 2.38 *Sei $(X_i,\, i \in I)$ eine unabhängige Familie reeller Zufallsvariablen. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $j_1^1, \ldots, j_{n_1}^1, j_1^2, \ldots, j_{n_2}^2 \in I$ paarweise unterschiedlich. Setze*

$$Z_i := X_{j_1^i} + \ldots + X_{j_{n_i}^i} \qquad \textit{für } \; i = 1, 2.$$

Dann sind Z_1 und Z_2 unabhängig.

Beweis Für $i = 1, 2$ ist die Abbildung $\phi_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_{n_i}) \mapsto x_1 + \ldots + x_{n_i}$ messbar. Seien Y_1 und Y_2 wie in Satz 2.37. Dann ist $Z_i = \phi_i(Y_i)$, $i = 1, 2$. Nach Satz 2.37 und Satz 2.36 sind Z_1 und Z_2 unabhängig. □

Satz 2.39 *Zu gegebenen Verteilungsfunktionen F_n, $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und eine unabhängige Familie $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ von reellen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit Verteilungsfunktionen $F_{X_n} = F_n$.*

Beweis (Skizze!) Seien $(\Omega, \mathcal{A}) = \big((0,1], \mathcal{B}((0,1])\big)$ und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Dann sind die Ziffern $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ der (nicht-abbrechenden) Binärdarstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\, Y_i(\omega)$$

unabhängig und $\mathrm{Ber}_{1/2}$-verteilt. Seien $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ Primzahlen. Setze

$$U_n := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\, Y_{p_n^i}.$$

Dann ist $(U_n,\, n \in \mathbb{N})$ unabhängig und U_n uniform verteilt auf $(0,1]$. Bilde die Inverse

$$F_n^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} :\, F(x) \geq t\}$$

(vergleiche Beweis von Satz 1.57) und setze $X_n = F_n^{-1}(U_n)$.

Übung: Man fülle die Details aus. □

Beispiel 2.40 (Konstruktion unendlich langer Markovketten, Computersimulation) Seien E eine höchstens abzählbare Menge und A eine stochastische Matrix auf E. Ohne Einschränkung sei $E = \{1, \ldots, n\}$ oder $E = \mathbb{N}$. Setze

$$F_x(y) = \sum_{z=1}^{y} A(x,z)$$

und definiere $\phi : E \times (0,1] \to E$ durch

$$\phi(x,u) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_x(y-1) < \, u \leq \, F_x(y).$$

Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängig und uniform auf $(0,1]$ verteilt. Dann ist $\mathbf{P}[\phi(x,U) = y] = A(x,y)$. Definiere nun Zufallsvariablen $X_0 = x$ und $X_n = \phi(X_{n-1}, U_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist X eine Markovkette mit Übergangsmatrix A bei Start in x. **Übung:** Man beweise dies!

Wenn man für $U_1(\omega), U_2(\omega), \ldots$ die Zahlen $u_1, u_2, \ldots$ einsetzt, die ein Computer als (Pseudo–)Zufallszahlen ausgibt, hat man ein Verfahren, um Markovketten auf dem Computer zu simulieren. ◇

2.6 Faltung

Definition 2.41 *Sind μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{Z}$, so definieren wir die **Faltung** als das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu * \nu$ mit Gewichten*

$$\mu * \nu(\{n\}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\{k\})\, \nu(\{n-k\}), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Sind μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit Dichten f_μ und f_ν, so definieren wir $\mu * \nu$ als das Wahrscheinlichkeitsmaß mit der Dichte

$$(f_\mu * f_\nu)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_\mu(s)\, f_\nu(x-s)\, ds, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

*Die n-te **Faltungspotenz** μ^{*n} wird rekursiv definiert durch $\mu^{*1} = \mu$ und $\mu^{*n} = \mu^{*(n-1)} * \mu$.*

Satz 2.42 *Sind X und Y unabhängige $\mathbb{Z}$-wertige oder reelle Zufallsvariablen mit Dichten f_X und f_Y, so gilt*

$$\mathbf{P}_{X+Y} = \mathbf{P}_X * \mathbf{P}_Y.$$

Beweis Seien zunächst X und Y reellwertig mit Dichten f_X und f_Y. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $D_x := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 :\ s+t \leq x\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{X+Y}\big[(-\infty, x]\big] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, f_Y(t)\, \mathbb{1}_{D_x}(s,t)\, dt \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, f_Y(t-s)\, \mathbb{1}_{D_x}(s,t-s)\, dt \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, f_Y(t-s)\, dt \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\, f_Y(t-s)\, ds \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{x} (f_X * f_Y)(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Also hat $X+Y$ die Dichte $f_X * f_Y$.

Der Fall, wo X und Y Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen, geht analog. □

Beispiel 2.43 Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Wir wollen zeigen, dass

$$b_{n_1,p} * b_{n_2,p} \;=\; b_{n_1+n_2,p} \tag{2.13}$$

gilt. Speziell ist

$$b_{n,p} \;=\; \underbrace{\mathrm{Ber}_p * \ldots * \mathrm{Ber}_p}_{n\,\text{Faktoren}} \;=:\; \mathrm{Ber}_p^{*n}. \tag{2.14}$$

Sind also $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Bernoulli-Zufallsvariablen mit Erfolgsparameter p, so ist $X_1 + \ldots + X_n \sim b_{n,p}$.

Wir zeigen Gleichung (2.13) auf zwei Weisen: einmal durch ein Argument, das ohne Rechnung auskommt, sondern auf die ursprüngliche Interpretation der Binomialverteilung als Anzahl der Erfolge beim mehrfachen Münzwurf rekurriert, und zum anderen durch explizite Berechnung mit Hilfe der Faltungsformel.

Wir beginnen mit der ersten Variante. Seien $X_1, \ldots, X_{n_1+n_2}$ unabhängig und Ber_p-verteilt. Nach Korollar 2.38 sind $X := X_1 + \ldots + X_{n_1}$ und $Y := X_{n_1+1} + \ldots + X_{n_1+n_2}$ unabhängig und nach Beispiel 2.31 gelten $X \sim b_{n_1,p}$ und $Y \sim b_{n_2,p}$. Ebenfalls nach Beispiel 2.31 ist aber $X + Y = X_1 + \ldots + X_{n_1+n_2} \sim b_{n_1+n_2,p}$. Daher ist

$$b_{n_1+n_2,p} = \mathbf{P}_{X+Y} = \mathbf{P}_X * \mathbf{P}_Y = b_{n_1,p} * b_{n_2,p}.$$

Der zweite Beweis für diese Formel erfolgt durch direkte Rechnung. Für $k = 0, \ldots, n_1 + n_2$ ist

$$\begin{aligned}
(b_{n_1,\,p} * b_{n_2,\,p})(\{k\}) &= \sum_{l=0}^{k} b_{n_1,\,p}(\{l\})\, b_{n_2,\,p}(\{k-l\}) \\
&= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{l=0}^{k} \binom{n_1}{l} \binom{n_2}{k-l} \\
&= p^k\, (1-p)^{n_1+n_2-k} \binom{n_1+n_2}{k} \sum_{l=0}^{k} \mathrm{Hyp}_{n_1,\,n_2,\,k}(\{l\}) \\
&= p^k\, (1-p)^{n_1+n_2-k} \binom{n_1+n_2}{k} \\
&= b_{n_1+n_2,\,p}(\{k\}).
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im vierten Schritt die Normierung der hypergeometrischen Verteilung (siehe (1.7)) ausgenutzt. ◇

Beispiel 2.44 Sei für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1]$

$$b^-_{n,p}(\{k\}) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n\, (1-p)^k \tag{2.15}$$

die negative Binomialverteilung (vergleiche Beispiel 1.40). Dann gilt

$$b^-_{m+n,p} = b^-_{m,p} * b^-_{n,p} \qquad \text{für alle } \ m, n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Wegen $b^-_{1,p} = \gamma_p$, gilt also

$$b^-_{n,p} = \gamma_p^{*n}. \tag{2.17}$$

Dies entspricht genau unserer intuitiven Erwartung, da $b^-_{m,p}$ die Wartezeit auf den m–ten Erfolg eines (beliebig langen) Bernoulli-Experiments ist. Die Wartezeiten zwischen den Erfolgen sollten unabhängig sein und geometrisch verteilt, daher tritt hier die Faltung auf. Die formale Rechnung bleibt hier zur Übung. Später bringen wir einen Beweis in Beispiel 4.4(iii). ◇

Beispiel 2.45 Sei Poi_λ die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda \geq 0$. Dann gilt

$$\mathrm{Poi}_{\mu+\lambda} = \mathrm{Poi}_\mu * \mathrm{Poi}_\lambda.$$

In der Tat ist für $n \in \mathbb{N}$ nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Poi}_\mu * \mathrm{Poi}_\lambda)(\{n\}) &= e^{-\lambda}\, e^{-\mu} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^k}{k!}\, \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\, \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu^k\, \lambda^{n-k} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)}\, \frac{(\mu+\lambda)^n}{n!} \\
&= \mathrm{Poi}_{\mu+\lambda}(\{n\}).
\end{aligned}$$

◇

Beispiel 2.46 Für die Normalverteilung gilt für $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$

$$\mathcal{N}_{\mu_1,\sigma_1^2} * \mathcal{N}_{\mu_2,\sigma_2^2} = \mathcal{N}_{\mu_1+\mu_2,\, \sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Beweis: Übung! $\diamond$

2.7 Asymptotische Ereignisse

Wir betrachten eine Folge $(A_n,\, n \in \mathbb{N})$ von Ereignissen und fragen nach den Ereignissen:

$A^* :=$ „A_n tritt ein für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$“,
$A_* :=$ „A_n tritt ein für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$“.

Um diese Ereignisse formal zu beschreiben, treffen wir folgende Definition.

Definition 2.47 *Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, so definieren wir den **Limes superior** und **Limes inferior** als die Ereignisse*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Man überlegt sich leicht, dass mit dieser Vereinbarung gilt:

$$A^* = \limsup_{n\to\infty} A_n \quad \text{und} \quad A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n. \tag{2.18}$$

Außerdem ist klar

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n, \tag{2.19}$$

wobei Ungleichheit eintreten kann (Beispiel?). Die Bezeichnungen $\liminf$ und $\limsup$ werden etwas klarer, wenn wir uns überlegen, dass gilt:

$$\mathbb{1}_{A^*} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} \quad \text{und} \quad \mathbb{1}_{A_*} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}. \tag{2.20}$$

Der Beweis für (2.18) – (2.20) verbleibt als Übung. Die Ereignisse A_* und A^* sind *asymptotische Ereignisse* in dem Sinne, dass ihr Eintreten nicht von endlich vielen der A_n abhängt.

Wir kommen jetzt zu der wichtigsten elementaren Aussage über asymptotische Ereignisse.

Satz 2.48 (Borel-Cantelli Lemma) *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n,\, n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Ereignissen.*

(i) Gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_n] < \infty$, so gilt $\mathbf{P}\left[\limsup_{n\to\infty} A_n\right] = 0$.

(ii) Ist $(A_n,\, n \in \mathbb{N})$ unabhängig, und gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[A_n] = \infty$, so ist

$$\mathbf{P}\left[\limsup_{n\to\infty} A_n\right] = 1.$$

Beweis Setze $B_n := \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ und $B_n^N := \bigcup_{m=n}^{N} A_m$. Dann gilt $B_n \downarrow A^*$ und $B_n^N \uparrow B_n$ für $N \to \infty$. Gelte nun (i). Dann ist (nach Satz 1.22 (vi) und (v))

$$\mathbf{P}\big[A^*\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[B_n] \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{P}[A_m] = 0.$$

Gelte nun (ii). Dann ist (wegen $1 - x \leq e^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[B_n^N\big] &= 1 - \mathbf{P}\big[(B_n^N)^c\big] \\
&= 1 - \prod_{m=n}^{N} \big(1 - \mathbf{P}[A_m]\big) \\
&\geq 1 - \prod_{m=n}^{N} e^{-\mathbf{P}[A_m]} \\
&= 1 - \exp\left(-\sum_{m=n}^{N} \mathbf{P}[A_m]\right) \\
&\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{P}[B_n] = \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}[B_n^N] = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\mathbf{P}[A^*] = \mathbf{P}\big[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\big] = 1$. □

Beispiel 2.49 Sei X_n, $n \in \mathbb{N}$ eine unabhängige Folge von Bernoulli-Zufallsvariablen mit Parameter $p \in (0,1)$. Dann ist

$$\mathbf{P}\big[X_n = 1 \text{ für unendlich viele } n\big] = \mathbf{P}\Big[\limsup_{n\to\infty} \{X_n = 1\}\Big] = 1,$$

weil $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[X_n = 1] = \sum_{n=1}^{\infty} p = \infty$. ◇

Beispiel 2.50 Seien $\Lambda < \infty$ und $0 \leq \lambda_n \leq \Lambda$ für $n \in \mathbb{N}$. Ferner seien X_n, $n \in \mathbb{N}$ (nicht notwendigerweise unabhängige) Poisson-Zufallsvariablen mit Parametern λ_n. Dann gilt

$$\mathbf{P}\big[X_n \geq n \text{ für unendlich viele } n\big] = 0.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[X_n \geq n] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mathbf{P}[X_n = m] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbf{P}[X_n = m] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} e^{-\lambda_n} \frac{\lambda_n^m}{m!} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\Lambda^m}{m!} \\
&= \Lambda\, e^{\Lambda} < \infty.
\end{aligned}$$

◇

2.8 Ergänzendes Beispiel: Das Ising Modell

Das Ising Modell ist ein thermodynamisches (und quantenmechanisches) Modell für Ferromagnetismus in Kristallen. Dabei gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Atome sitzen auf den Punkten des Gitters Λ (zum Beispiel $\Lambda = \{0, \dots, N-1\}^2$),
- jedes Atom $i \in \Lambda$ hat ein magnetisches Moment (Spin): $x(i) \in \{-1, 1\}$, das entweder nach oben zeigt ($x(i) = +1$) oder nach unten ($x(i) = -1$),
- benachbarte Atome wechselwirken miteinander,
- Auf Grund thermischer Schwankungen ist der Zustand des Systems zufällig und verteilt nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{P}_\beta$ auf dem Zustandsraum $E := \{-1, 1\}^\Lambda$, abhängig von der inversen Temperatur $\beta = \frac{1}{T} \geq 0$. Diese Verteilung heißt die **Boltzmann-Verteilung**.

Bemerkung 2.51 Makroskopisch beobachtbar ist nicht jeder einzelne Spin, sondern nur die mittlere Magnetisierung, die sich als Betrag des Mittelwerts der einzelnen Spins ergibt

$$m_\Lambda(\beta) = \sum_{x \in E} \mathbf{P}_\beta[\{x\}] \left| \frac{1}{\#\Lambda} \sum_{i \in \Lambda} x(i) \right|.$$

Wenn wir sehr große Systeme betrachten, sind wir nahe am so genannten thermodynamischen Limes

$$m(\beta) := \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} m_\Lambda(\beta).$$

Man kann zeigen, dass (für $d \geq 2$) eine Zahl $\beta_c = \beta_c(d) \in (0, \infty)$ existiert, mit

$$m(\beta) \begin{cases} > 0, & \text{falls } \beta > \beta_c, \\ = 0, & \text{falls } \beta < \beta_c. \end{cases}$$

In der Physik wird $T_c := 1/\beta_c$ die **Curie-Temperatur** für die spontane Magnetisierung genannt. Dies ist eine materialabhängige Konstante (CrBr 37Kelvin, Ni 645K, Fe 1017K, Co 1404 K). Unterhalb der Curie-Temperatur sind die Stoffe magnetisch, oberhalb sind sie es nicht. Dabei nimmt der Magnetisierungsgrad bei fallender Temperatur noch zu. Das Ising-Modell, das wir jetzt untersuchen, soll (zumindest in Computer-Simulationen) diesen Effekt einer kritischen Temperatur nachbilden. $\diamond$

Wir definieren die lokale Energiefunktion, die das Energieniveau eines Atoms in $i \in \Lambda$ angibt als Funktion des Zustands x des Gesamtsystems

$$H^i(x) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \Lambda:\, j \sim i} \mathbb{1}_{\{x(i) \neq x(j)\}}. \tag{2.21}$$

Hierbei bedeutet $i \sim j$, dass i und j Nachbarn sind in Λ (damit meinen wir koordinatenweise mod N, wir sprechen auch von *periodischen Randbedingungen*). Die Gesamtenergie (oder Hamiltonfunktion) des Systems im Zustand x ist die Summe der Einzelenergien,

$$H(x) = \sum_{i \in \Lambda} H^i(x) = \sum_{i \sim j} \mathbb{1}_{\{x(i) \neq x(j)\}}. \tag{2.22}$$

Die Boltzmann-Verteilung $\mathbf{P}_\beta$ zur inversen Temperatur $\beta \geq 0$ auf $E = \{-1, 1\}^\Lambda$ wird definiert durch

$$\mathbf{P}_\beta[\{x\}] = Z_\beta^{-1} \exp(-\beta H(x)), \tag{2.23}$$

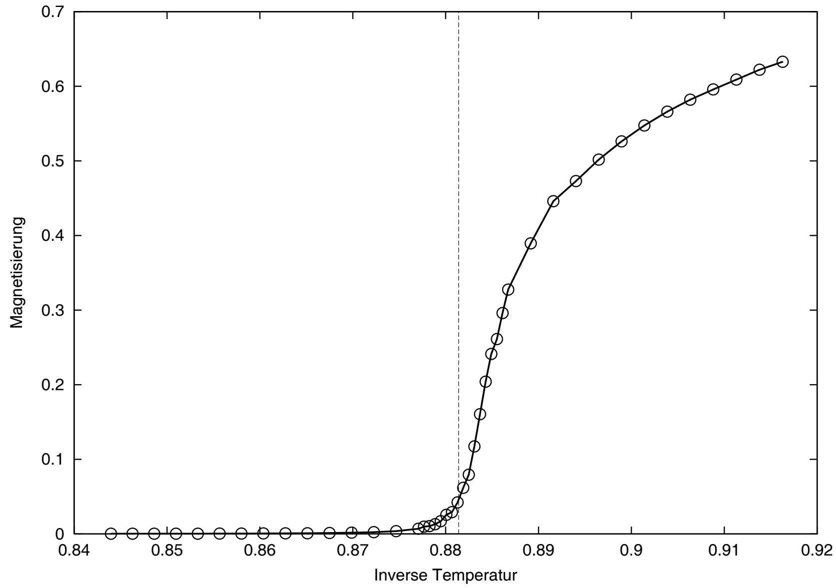


Abbildung 2.1: Magnetisierungskurve im Ising-Modell auf einem 1000×1000-Gitter, per Computersimulation berechnet. Die senkrechte Linie markiert die kritische Temperatur.

wobei die **Zustandssumme** Z_β (oder **Partitionsfunktion**) gegeben ist als die Normierungskonstante, die $\mathbf{P}_\beta$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß macht, also

$$Z_\beta = \sum_{x \in \{-1,1\}^\Lambda} \exp(-\beta H(x)). \tag{2.24}$$

Hier haben wir bislang ein statischen System definiert, das sich im Gleichgewicht befindet. Auf der anderen Seite gibt die Physik eine gewisse Idee davon, wie die mikroskopische Dynamik des Kristalls ist, die genau dieses Gleichgewicht hat. Wir beschreiben diese Dynamik durch eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \{-1,+1\}^\Lambda$. Die Dynamik, die wir hier beschreiben, heißt auch **Glauber Dynamik** für das Ising Modell.

Die Idee ist, jeweils immer einen Platz i auszusuchen und dort nach einem (unfairen) Münzwurfexperiment den Spin umzudrehen, oder nicht.

Wir definieren den Zustand $x^{i,\sigma}$, bei dem an der Stelle i der Spin $\sigma \in \{-1,+1\}$ eingesetzt wird

$$x^{i,\sigma}(j) = \begin{cases} \sigma, & \text{falls } j = i, \\ x(j), & \text{falls } j \neq i. \end{cases} \tag{2.25}$$

Für die Energie-Differenz zwischen $x^{i,\sigma}$ und $x^{i,-\sigma}$ spielen nur die benachbarten Spins $x(j)$, $j \sim i$ eine Rolle. Alle anderen Terme heben sich bei der Summation weg:

$$H(x^{i,\sigma}) - H(x^{i,-\sigma}) = \sum_{j:\, j\sim i} \mathbb{1}_{\{x(j)\neq\sigma\}} - \sum_{j:\, j\sim i} \mathbb{1}_{\{x(j)\neq-\sigma\}} = 2\sum_{j:\, j\sim i} \left(\mathbb{1}_{\{x(j)\neq\sigma\}} - \frac{1}{2} \right).$$

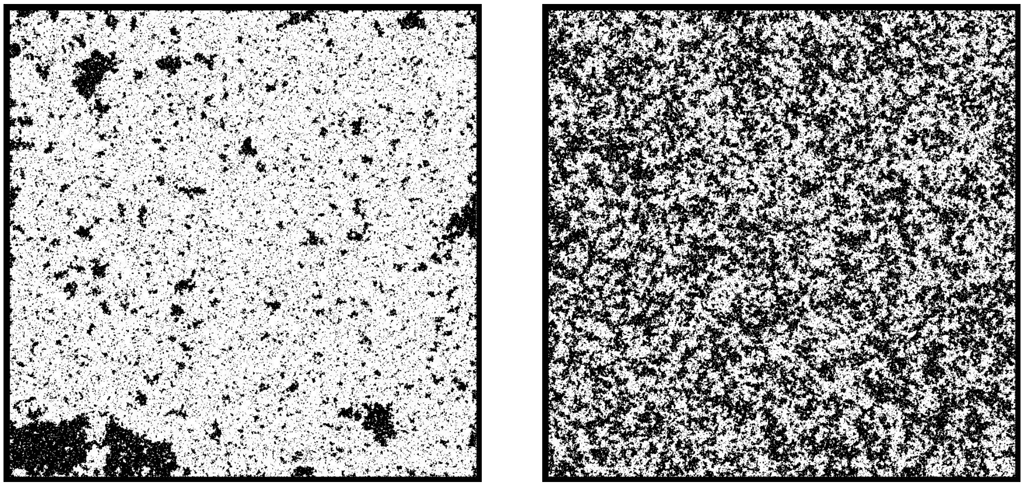


Abbildung 2.2: Gleichgewichte des Ising-Modells für ein 800×800 Gitter. (schwarzer Punkt = spin +1) Links: kälter als die kritische Temperatur ($\beta > \beta_c$), rechts: wärmer.

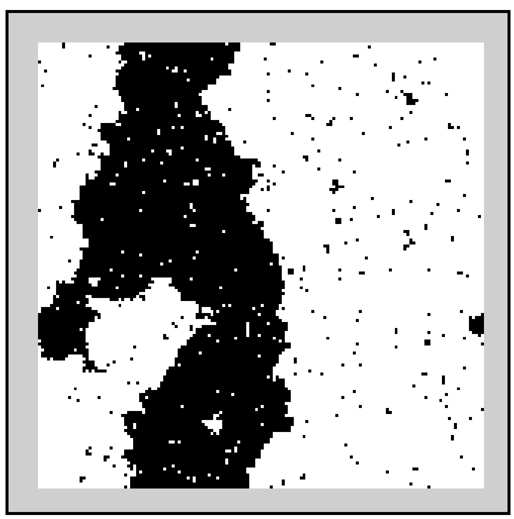


Abbildung 2.3: Ising-Modell (150×150 Gitter) unterhalb der kritischen Temperatur. Die Computersimulation zeigt auch nach langer Laufzeit noch nicht das Gleichgewicht, sondern metastabile Zustände, in denen man die Weiss'schen Bezirke gut sehen kann.

Offenbar gilt für $i \in \Lambda$ und $\sigma \in \{-1,+1\}$

$$\begin{aligned} p_{\beta,x,i}(\sigma) &:= \mathbf{P}_\beta[\{x^{i,\sigma}\} \,\big|\, \{x^{i,-1}, x^{i,+1}\}] \\ &= \frac{\mathbf{P}_\beta[\{x^{i,\sigma}\}]}{\mathbf{P}_\beta[\{x^{i,-1}, x^{i,+1}\}]} \\ &= \frac{e^{-\beta H(x^{i,\sigma})}}{e^{-\beta H(x^{i,-1})} + e^{-\beta H(x^{i,+1})}} \\ &= \Big(1 + \exp\Big[\beta\big(H(x^{i,\sigma}) - H(x^{i,-\sigma})\big)\Big]\Big)^{-1} \\ &= \Big(1 + \exp\Big[2\beta \textstyle\sum_{j:\, j\sim i}(\mathbb{1}_{\{x(j)\neq\sigma\}} - \frac{1}{2})\Big]\Big)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Also gibt $p_{\beta,x,i}(\sigma)$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Spin in i den Wert σ annimmt, wenn wir alle anderen Koordinaten festhalten.

Wir definieren eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $E = \{-1,1\}^\Lambda$ und mit Übergangsmatrix

$$A(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\#\Lambda} p_{\beta,x,i}(\sigma), & \text{falls } y = x^{i,\sigma} \text{ für gewisse } i \in \Lambda,\ \sigma \in \{-1,+1\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.27}$$

Satz 2.52 *Sei X eine Markovkette auf $\{-1,+1\}^\Lambda$ mit Übergangsmatrix A (definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$). Der eindeutige Gleichgewichtszustand von X ist die Boltzmann-Verteilung $\mathbf{P}_\beta$ des Ising Modells, und es gilt*

$$\mathbf{P}[X_n = x] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}_\beta[\{x\}] \qquad \textit{für } \ x \in \{-1,+1\}^\Lambda. \tag{2.28}$$

Beweis Offenbar kann (durch sukzessives Einstellen der einzelnen Spins) jeder Zustand der Markovkette von jedem anderen aus in genau $\#\Lambda$ Schritten erreicht werden. Also ist

$$A^{\#\Lambda}(x,y) > 0 \qquad \text{für alle } \ x, y \in \{-1,+1\}^\Lambda.$$

Nach Satz 2.17 gibt es ein eindeutig bestimmtes Gleichgewicht π. Nach Satz 2.20 gilt (2.28). Es reicht daher zu zeigen, dass $\mathbf{P}_\beta A = \mathbf{P}_\beta$ gilt (und damit $\mathbf{P}_\beta = \pi$ sein muss). Für $i \in \Lambda$ und $x \in E$ ist nach (2.26)

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}} \mathbf{P}_\beta[\{y^{i,\sigma}\}] p_{\beta,y,i}(y(i)) &= \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}} \mathbf{P}_\beta[\{y^{i,\sigma}\}] \mathbf{P}_\beta[\{y\} \,\big|\, \{y^{i,-1}, y^{i,+1}\}] \\ &= \mathbf{P}_\beta[\{y\}]. \end{aligned}$$

Es gilt daher für $y \in \{-1,1\}^\Lambda$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\beta A[\{y\}] &= \sum_{x\in\{-1,+1\}^\Lambda} \mathbf{P}_\beta[\{x\}] \cdot A(x,y) \\ &= \frac{1}{\#\Lambda} \sum_{i\in\Lambda} \sum_{\sigma\in\{-1,+1\}} \mathbf{P}_\beta[\{y^{i,\sigma}\}] p_{\beta,y,i}(y(i)) \\ &= \mathbf{P}_\beta[\{y\}]. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.53 Der Satz macht keine Aussage über die Geschwindigkeit der Konvergenz. In der Tat ist die Konvergenz **sehr** langsam für $\beta > \beta_c$. Hier bilden sich metastabile Zustände aus mit großen Bereichen gleicher vorherrschender Magnetisierung, die in der Physik Weiss'sche Bezirke genannte werden. ◇

Kapitel 3

Erwartungswerte, Varianzen

Wir wollen nun Zufallsvariablen eine Maßzahl zuordnen, die ihr typisches Verhalten in vager Weise angibt. Haben wir n Punkte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$, so ist der Schwerpunkt $\frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Für eine Zufallsvariable, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeden der Werte x_i annimmt, nennen wir dieses arithmetische Mittel ihrer Werte den *Erwartungswert*. Dies ist offenbar eine nützliche Kenngröße. Wir werden diesen Begriff zunächst auf diskrete Zufallsvariablen erweitern und dann auf allgemeinere reelle Zufallsvariablen. Es folgt ein Abschnitt über die Größe der Abweichungen von diesen Schwerpunkt, die wir Varianz nennen, und deren Rolle der des Trägheitsmomentes in der Mechanik entspricht.

3.1 Erwartungswerte für diskrete Zufallsvariablen

Definition 3.1 *Seien X eine reelle Zufallsvariable und $W := W_X \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Es gelte $\mathbf{P}[X \in W] = 1$. Dann nennen wir X eine **diskrete (reelle) Zufallsvariable** mit Wertebereich W_X.*

Offenbar kann man W_X durch jede abzählbare Obermenge von W_X ersetzen, der Wertebereich ist also nicht eindeutig. Offenbar ist aber für diskrete Zufallsvariablen

$$\sum_{x \in W_X} \mathbf{P}[X = x] = \mathbf{P}[X \in W_X] = 1.$$

Setzen wir nun $\tilde{W}_X := \{x \in W_X : \mathbf{P}[X = x] > 0\}$, so ist $\tilde{W}_X$ der minimale Wertebereich von X. Wir werden dies im Folgenden aber nicht benötigen.

Definition 3.2 *Sei X eine diskrete reelle Zufallsvariable mit Wertebereich W_X. Wir sagen, dass X einen Erwartungswert hat, falls*

$$\sum_{x \in W_X} |x| \, \mathbf{P}[X = x] < \infty.$$

Wir schreiben dann auch $X \in \mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ und nennen

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \mathbf{P}[X = x]$$

*den **Erwartungswert** von X. Ist $X \geq 0$ fast sicher, so nennen wir stets*

$$\mathbf{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \, \mathbf{P}[X = x] \in [0, \infty]$$

den Erwartungswert von X. Gelegentlich schreiben wir daher auch $\mathbf{E}[|X|] < \infty$ für $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$.

Beispiel 3.3 Ist $(\Omega, \mathbf{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum, so ist jede reelle Zufallsvariable diskret und $W_X = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$. Es gilt dann

$$X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P}) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}[\{\omega\}] \, |X(\omega)| < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}[\{\omega\}] \, X(\omega). \qquad \diamond$$

Beispiele 3.4 (i) Sei X eine Bernoulli-Zufallsvariable mit Parameter $p \in [0, 1]$: $X \sim \mathrm{Ber}_p$. Dann ist $W = \{0, 1\}$ und

$$\mathbf{E}[X] = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

(ii) Sei $X \sim b_{n,p}$ für gewisse $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Dann ist $W = \{0, \ldots, n\}$ und

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} np \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,p}(\{k\}) = np.
\end{aligned}$$

(iii) (Mittlere Wartezeit auf den ersten Erfolg) Sei $X \sim \gamma_p$ geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0, 1]$. Sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Dann hat f für $x \in (-1, 1)$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

und die Ableitung (per gliedweiser Differentiation)

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \, x^{n-1} \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Also bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} p\,(1-p)^n \cdot n \\ &= p\,(1-p)\,f'(1-p) = \frac{1-p}{p}.\end{aligned}$$ ◇

Satz 3.5 (Rechenregeln) *Seien $X, Y, X_n, Y_n \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, $n \in \mathbb{N}$, diskrete reelle Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Dann gilt*

(i) Ist $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$, so ist $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y]$.

(ii) (Linearität) Es gelten für alle $c \in \mathbb{R}$: $cX \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, $X + Y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ (mit der Dreiecksungleichung $\mathbf{E}[|X+Y|] \leq \mathbf{E}[|X|] + \mathbf{E}[|Y|]$) sowie

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[cX] &= c\,\mathbf{E}[X] \\ \mathbf{E}[X+Y] &= \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y].\end{aligned}$$

(iii) Ist $X \geq 0$ fast sicher, so sind äquivalent

$$\mathbf{E}[X] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = 0 \;\text{ fast sicher.}$$

(iv) (Monotonie) Gilt $X \leq Y$ fast sicher, so gilt $\mathbf{E}[X] \leq \mathbf{E}[Y]$ mit Gleichheit genau dann, wenn $X = Y$ fast sicher.

(v) Sind X und Y unabhängig, so ist $X \cdot Y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ und $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$.

(vi) Ist $X_n \geq 0$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$, und gilt $\sum_{n=1}^{\infty} X_n = X$ fast sicher, so ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[X_n].$$

(vii) Gilt $Y_n \uparrow Y$, so gilt $\mathbf{E}[Y] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[Y_n]$.

Beweis (i) Klar.

(ii) – (iv) Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass X und Y auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum Ω definiert sind (etwa auf $\Omega = W_X \times W_Y$ mit W-Maß $\mathbf{P}_{(X,Y)}$). Wir erhalten dann

$$\mathbf{E}[|X+Y|] = \sum_{\omega\in\Omega} \big(|X(\omega) + Y(\omega)|\big)\mathbf{P}[\{\omega\}] \leq \sum_{\omega\in\Omega} \big(|X(\omega)| + |Y(\omega)|\big)\mathbf{P}[\{\omega\}] = \mathbf{E}[|X|] + \mathbf{E}[|Y|] < \infty.$$

Die selbe Rechnung ohne Betragstriche liefert $\mathbf{E}[X+Y] = \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]$.

Analog folgen die restlichen Aussagen aus (ii), (iii), (iv) durch die analogen Aussagen für absolut konvergente Reihen.

(v) Offenbar ist $W_{XY} = \{xy : x \in W_x, y \in W_y\}$ abzählbar. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|XY|] &= \sum_{z \in W_{XY}} |z| \, \mathbf{P}[XY = z] \\
&= \sum_{z \in W_{XY}} \sum_{x \in W_X, \, x \neq 0} |x| \cdot |z/x| \, \mathbf{P}[X = x, \, Y = z/x] \\
&= \sum_{y \in W_Y} \sum_{x \in W_X} |x| \cdot |y| \, \mathbf{P}[X = x, \, Y = y] \\
&= \sum_{y \in W_Y} \sum_{x \in W_X} |x| \, \mathbf{P}[X = x] \cdot |y| \, \mathbf{P}[Y = y] \\
&= \mathbf{E}[|X|] \cdot \mathbf{E}[|Y|] < \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $XY \in \mathcal{L}^1$. Die selbe Rechnung ohne Betragstriche liefert $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X] \cdot \mathbf{E}[Y]$.

(vi) Für $N \in \mathbb{N}$ setze $S_N := \sum_{n=1}^N X_n$. Dann ist $X \geq S_N$ nach Voraussetzung, also $\mathbf{E}[X] \geq \mathbf{E}[S_N]$ (nach (iv)) und damit

$$\mathbf{E}[X] \;\geq\; \lim_{N \to \infty} \mathbf{E}[S_N] \;=\; \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}[X_n] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[X_n].$$

Um die andere Ungleichung zu zeigen, zeigen wir dass für jedes $c \in (0,1)$ gilt

$$c \, \mathbf{E}[X] \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[X_n]. \tag{3.1}$$

Definiere die Zufallsvariable T mit Werten in $\mathbb{N}$ durch

$$T := \min \big\{ N \in \mathbb{N} : \, S_N \geq cX \big\}.$$

Wegen $S_N \uparrow X$ und $c < 1$ folgt $T < \infty$ fast sicher. Betrachte nun die Zufallsvariable $S_T : \omega \mapsto S_{T(\omega)}(\omega)$. Dann ist der Wertebereich $W_{S_T} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} W_{S_N}$ abzählbar, also S_T diskret. Per Konstruktion ist $S_T \geq cX$

also

$$\begin{aligned}
c\,\mathbf{E}[X] &\leq \mathbf{E}[S_T] \\
&= \sum_{s\in W_{S_T}} s\,\mathbf{P}[S_T = s] \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{s\in W_{S_T}} s\,\mathbf{P}[S_N = s,\, T = N] \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{s\in W_{S_T}} s\,\mathbf{P}\big[(S_N \mathbb{1}_{\{T=N\}}) = s\big] \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \mathbf{E}\big[S_N \mathbb{1}_{\{T=N\}}\big] \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{E}\big[X_n \mathbb{1}_{\{T=N\}}\big] \\
&= \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{x\in W_{X_n}} x\,\mathbf{P}[X_n = x,\, T = N] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x\in W_{X_n}} \sum_{N=n}^{\infty} x\,\mathbf{P}[X_n = x,\, T = N] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x\in W_{X_n}} x\,\mathbf{P}[X_n = x,\, T \geq n] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x\in W_{X_n}} x\,\mathbf{P}[X_n = x] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[X_n].
\end{aligned}$$

(vii) Wende (v) an auf $X_n = Y_{n+1} - Y_n$ und $X = Y - Y_1$. □

Beispiele 3.6 (i) (Binomialverteilung) Sei $X \sim b_{n,p}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Bernoulli verteilt mit Parameter p, so ist $X \stackrel{d}{=} X_1 + \ldots + X_n$, also

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathbf{E}[X_1] + \ldots + \mathbf{E}[X_n] = pn.$$

(ii) (Negative Binomialverteilung) Sei $X \sim b^-_{n,p}$ und seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1]$. Nach Beispiel 3.4 ist $\mathbf{E}[X_1] = \frac{1-p}{p}$. Es ist $X_i \sim b^-_{1,p}$ und (vergleiche Beispiel 2.44) $X \stackrel{d}{=} X_1 + \ldots + X_n$. Also ist $\mathbf{E}[X] = n\mathbf{E}[X_1] = \frac{1-p}{p}\,n$. ◇

Beispiel 3.7 In einer Urne seien m blaue Kugeln und n rote Kugeln. Wir ziehen diese ohne Zurücklegen und legen sie von links nach rechts aufgereiht auf einen Tisch. Wie groß ist die erwartete Anzahl von blauen Kugeln, neben denen rechts eine rote Kugel liegt? Wir setzen für $i = 1, \ldots, m+n$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls die } i\text{-te Kugel blau ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setze

$$Y_i \;=\; \mathbb{1}_{\{X_i=1\}}\,\mathbb{1}_{\{X_{i+1}=0\}} \qquad \text{für } i=1,\dots,m+n-1,$$

und $Y := Y_1 + \ldots + Y_{m+n-1}$. Dann ist

$$\mathbf{P}[Y_i = 1] \;=\; \mathbf{P}[Y_1 = 1] \;=\; \frac{m}{m+n}\,\frac{n}{m+n-1},$$

also $\mathbf{E}[Y_i] \;=\; \frac{mn}{(m+n)(m+n-1)}$. Insgesamt ist die gesuchte erwartete Anzahl

$$\mathbf{E}[Y] \;=\; \sum_{i=1}^{m+n-1} \mathbf{E}[Y_i] \;=\; \frac{mn}{m+n}. \qquad \diamond$$

3.2 Erwartungswerte für allgemeine reelle Zufallsvariablen

Sei X eine reelle Zufallsvariable. Dann ist (mit $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} :\; k \leq x\}$)

$$X_n := 2^{-n}\,\lfloor 2^n X \rfloor$$

eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $W_{X_n} = 2^{-n}\mathbb{Z}$. Offenbar ist

$$X_n \;\leq\; X \;\leq\; X_n + 2^{-n} \tag{3.2}$$

und

$$|X_n| - 2^{-n} \;\leq\; |X| \;\leq\; |X_n| + 2^{-n}. \tag{3.3}$$

Ferner ist $X_n \uparrow X$. In Anlehnung an Satz 3.5(vii) treffen wir die folgende Definition.

Definition 3.8 (Erwartungswert für allgemeine reelle Zufallsvariablen) *Wir sagen, dass eine reelle Zufallsvariable X einen Erwartungswert besitzt (und schreiben $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ oder $\mathbf{E}[|X|] < \infty$), falls $X_n \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (und damit für alle $n \in \mathbb{N}$) und nennen*

$$\mathbf{E}[X] := \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n]$$

den Erwartungswert von X.

Satz 3.9 *Die Rechenregeln aus Satz 3.5 gelten auch für nicht-diskrete Zufallsvariablen.*

Beweis Man muss jeweils immer nur zeigen, dass Summation und Limes vertauschen. Nach (3.2) und (3.3) sind die Limiten jeweils gleichmäßig, vertauschen also mit der Summation. Wir lassen die Details aus und verweisen auf die Vorlesung „Stochastik I“. Exemplarisch sei hier nur die Additivität gezeigt. Seien also $X, Y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$. Dann ist

$$\begin{aligned}\big|\mathbf{E}[X+Y] - \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[Y]\big| \;&=\; \lim_{n\to\infty} \Big|\mathbf{E}\big[2^{-n}\lfloor 2^n(X+Y)\rfloor - 2^{-n}\lfloor 2^n X\rfloor - 2^{-n}\lfloor 2^n Y\rfloor\big]\Big| \\ &\leq\; \lim_{n\to\infty} 4\cdot 2^{-n} \;=\; 0. \end{aligned} \qquad \square$$

Satz 3.10 *Ist X eine reelle Zufallsvariable mit $X \geq 0$ fast sicher, so ist*

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \mathbf{P}[X \geq t]\,dt. \tag{3.4}$$

Nimmt speziell X Werte in $\mathbb{N}_0$ an, so ist

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[X \geq n]. \tag{3.5}$$

Beweis Gelte zunächst $X \in \mathbb{N}_0$ fast sicher. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbf{P}[X = k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbf{P}[X = k] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}[X = k] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[X \geq n].\end{aligned}$$

Sei nun der allgemeine Fall $X \geq 0$ betrachtet. Sei $X_n := 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[X_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\big[X_n \geq k\,2^{-n}\big] \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\big[X \geq k\,2^{-n}\big] \\ &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}[X \geq t]\,dt,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Reihe als Riemann-Summe angesehen haben, die das Integral approximiert. □

Satz 3.11 *Sei X eine reelle Zufallsvariable und habe die Verteilung $\mathbf{P}_X$ eine Dichte f. Dann gilt*

$$\mathbf{E}[|X|] < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,f(x)\,dx \;<\; \infty. \tag{3.6}$$

Ist $\mathbf{E}[|X|] < \infty$, so ist

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx. \tag{3.7}$$

Beweis Seien $X_n = 2^{-n} \lfloor 2^n X \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$, approximierende Zufallsvariablen wie oben. Dann ist (wegen

$|x| - 2^{-n} \leq |2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor| \leq |x| + 2^{-n})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|X_n|] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k2^{-n}|\,\mathbf{P}\big[X_n = k2^{-n}\big] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k2^{-n}| \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(x)\,dx \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} \big(|x| + 2^{-n}\big) f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \big(|x| + 2^{-n}\big) f(x)\,dx \\
&= 2^{-n} + \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,f(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\mathbf{E}[|X_n|] \;\geq\; -2^{-n} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|x|\,dx.$$

Nach (3.3) ist $\mathbf{E}[|X_n|] - 2^{-n} \leq \mathbf{E}[|X|] \leq \mathbf{E}[|X_n|] + 2^{-n}$. Also haben wir (3.6) gezeigt. Die selbe Rechnung ohne Betragstriche liefert (3.7). □

Beispiel 3.12 Sei $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ normalverteilt mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Nach Beispiel 1.61 ist $Y := (X-\mu)/\sqrt{\sigma^2} \sim \mathcal{N}_{0,1}$. Die Verteilung von Y hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Daher ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx \;=\; \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x\, e^{-x^2/2}\,dx \;=\; \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \;<\; \infty.$$

Also ist $Y \in \mathcal{L}^1$ und damit $X \in \mathcal{L}^1$. Weiter ist $f(x) = f(-x)$, also $x \mapsto x f(x)$ eine ungerade Funktion und damit

$$\mathbf{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) = 0.$$

Folglich ist $\mathbf{E}[X] = \mu + \sqrt{\sigma^2}\,\mathbf{E}[Y] = \mu$. ◇

Beispiel 3.13 Sei X Standard-Cauchy verteilt, das heißt X ist reell mit Dichte

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f(x) = f(-x)$ wie bei der Normalverteilung, aber hier existiert der Erwartungswert nicht (und ist insbesondere nicht Null), denn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{\pi}\,\log\big(1+x^2\big)\Big|_0^{\infty} = \infty.$$

Also ist $\mathbf{E}[|X|] = \infty$. ◇

Beispiel 3.14 Seien $X_1, X_2, \dots$ identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbf{E}[|X_1|] < \infty$. Dann gilt

$$\mathbf{P}\big[|X_n| \geq n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\big] = 0.$$

(Vergleiche Beispiel 2.44.) Dies folgt leicht aus dem Borel-Cantelli Lemma, denn nach Satz 3.10 ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[|X_n| \geq n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[|X_1| \geq n] \leq \mathbf{E}[|X_1|] < \infty. \qquad \diamond$$

Satz 3.15 (Wald'sche Identität) *Seien $T, X_1, X_2, \dots$ unabhängige reelle Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\mathbf{P})$. Es sei $T \in \mathbb{N}_0$ fast sicher, und es seien $X_1, X_2, \dots$ identisch verteilt. Wir setzen*

$$S_T := \sum_{i=1}^{T} X_i.$$

Dann ist $S_T \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ und

$$\mathbf{E}[S_T] = \mathbf{E}[T]\,\mathbf{E}[X_1].$$

Beweis Setze $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist (mit Hilfe der Dreiecksungleichung, siehe Satz 3.5(ii))

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[|S_T|] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\big[|S_n|\,\mathbb{1}_{\{T=n\}}\big] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[|S_n|]\,\mathbf{E}\big[\mathbb{1}_{\{T=n\}}\big] \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[|X_1|]\,n\,\mathbf{P}[T=n] \\
&= \mathbf{E}[|X_1|]\,\mathbf{E}[T].
\end{aligned}$$

Die selbe Rechnung ohne Betragsstriche liefert die Aussage. $\square$

3.3 Varianzen

Wir wollen in diesem Abschnitt Varianzen und Kovarianzen von reellen Zufallsvariablen untersuchen. Zunächst betrachten wir allgemein Erwartungswerte von Funktionen von Zufallsvariablen, danach speziell quadratische Funktionen, die die Kovarianzen und Varianzen definieren.

Satz 3.16 *(i) Seien X eine diskrete Zufallsvariable mit abzählbarem Wertebereich W_X und $H : W_X \to \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung. Dann ist die Zufallsvariable $H(X)$ in $\mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ genau dann, wenn $\sum_{x \in W_X} |H(x)|\mathbf{P}[X = x] < \infty$. In diesem Fall ist*

$$\mathbf{E}[H(X)] = \sum_{x \in W_X} H(x)\,\mathbf{P}[X = x].$$

(ii) Seien $X = (X_1, \dots, X_n)$ eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable mit Dichte f_X (also $\mathbf{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} dt_n\, f_X(t_1, \dots, t_n)$) und $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung sowie $Y :=$

$H(X)$. Dann ist $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$ genau dann, wenn $\int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \dots dx_n \, |H(x_1, \dots, x_n)| \cdot f_X(x_1, \dots, x_n) < \infty$. In diesem Fall gilt

$$\mathbf{E}[H(X)] \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \;\cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, H(x_1, \dots, x_n) \, f_X(x_1, \dots, x_n).$$

Beweis **(i)** Für den Wertebereich $W_{H(X)}$ gilt klar $W_{H(X)} = H(W_X) := \{H(x) : \, x \in W_X\}$. Für jedes $y \in W_{H(X)}$ ist das Ereignis $\{H(X) = y\}$ die disjunkte Vereinigung $\{H(X) = y\} = \bigcup_{x \in H^{-1}(\{y\})} \{X = x\}$. Es gilt also $\mathbf{P}[H(X) = y] = \sum_{x \in H^{-1}(\{y\})} \mathbf{P}[X = x]$. Mithin ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|H(X)|] &= \sum_{y \in W_{H(X)}} |y| \, \mathbf{P}[H(X) = y] \\ &= \sum_{y \in W_{H(X)}} \sum_{x \in H^{-1}(\{y\})} |y| \, \mathbf{P}[X = x] \\ &= \sum_{y \in W_{H(X)}} \sum_{x \in H^{-1}(\{y\})} |H(x)| \, \mathbf{P}[X = x] \\ &= \sum_{x \in W_X} |H(x)| \, \mathbf{P}[X = x]. \end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung ohne Betragsstriche liefert die Aussage.

(ii) Wir betrachten zunächst nur $H : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$. Dann ist nach Satz 3.10

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[H(X)] &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}[H(X) \geq t] \, dt \\ &= \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, f(x_1, \dots, x_n) \, \mathbb{1}_{[t,\infty)} \left(H(x_1, \dots, x_n)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, f(x_1, \dots, x_n) \int_0^{\infty} dt \, \mathbb{1}_{[t,\infty)} \left(H(x_1, \dots, x_n)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, f(x_1, \dots, x_n) \, H(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Für allgemeines $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ betrachte $H = H^+ - H^-$ mit $H^+ : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ und $H^- : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$. Dann ist nach dem bisher Gezeigten

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[|H(X)|] &= \mathbf{E}[H^+(X)] + \mathbf{E}[H^-(X)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, f(x_1, \dots, x_n) \big(H^+(x_1, \dots, x_n) + H^-(x_1, \dots, x_n)\big) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, f(x_1, \dots, x_n) \, |H(X)|. \end{aligned}$$

Die selbe Rechnung ohne Betragstriche liefert die Aussage. □

Sei stets X eine reelle Zufallsvariable, und sei $p \geq 1$.

Definition 3.17 *Wir sagen, dass X ein p-tes **Moment** besitzt, falls*

$$M_p(X) := \mathbf{E}[|X|^p] < \infty.$$

Wir schreiben dann $X \in \mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mathbf{P})$ *und nennen* $M_p(X)$ *das* p***–te absolute Moment*** *von* X. *Ist* $p \in \mathbb{N}$ *und* $M_p(X) < \infty$, *so heißt*

$$m_p(X) := \mathbf{E}[X^p]$$

das p***–te Moment*** *von* X.

Satz 3.18 *Ist* $p \geq r \geq 1$ *und* $X \in \mathcal{L}^p$, *so ist* $X \in \mathcal{L}^r$.

Beweis Dies folgt direkt aus der Ungleichung $|x|^r \leq 1 + |x|^p$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Definition 3.19 *Seien* $X, Y \in \mathcal{L}^2$. *Dann heißt*

$$\mathbf{Var}[X] := \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2$$

die ***Varianz*** *von* X *und* $\sigma := \sqrt{\mathbf{Var}[X]}$ *heißt die* ***Streuung*** *von* X. *Ferner heißt*

$$\mathbf{Cov}[X, Y] := \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$$

die ***Kovarianz*** *von* X *und* Y. *Gilt* $\mathbf{Cov}[X, Y] = 0$, *so heißen* X *und* Y ***unkorreliert***.

Bemerkung Man beachte, dass $|xy| \leq x^2 + y^2$. Daher ist $\mathbf{E}[|XY|] \leq \mathbf{E}[X^2] + \mathbf{E}[Y^2] < \infty$. Für $X, Y \in \mathcal{L}^2$ existiert also stets die Kovarianz.

Beispiele 3.20 (i) Sei $X \sim \mathrm{Ber}_p$. Dann ist $\mathbf{E}[X] = p$ und $X^2 = X$, also $\mathbf{E}[X^2] = p$. Mithin ist

$$\mathbf{Var}[X] = p - p^2 = p\,(1 - p). \tag{3.8}$$

(ii) Sei $X \sim \mathrm{Poi}_\lambda$ für ein $\lambda \geq 0$. Dann ist $\mathbf{E}[X] = \lambda$ und

$$\mathbf{E}\big[X(X-1)\big] \;=\; \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\, k(k-1)\,\frac{\lambda^k}{k!} \;=\; \lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!} \;=\; \lambda^2.$$

Also ist

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}\big[X^2\big] - \mathbf{E}[X]^2 = \mathbf{E}\big[X(X-1)\big] + \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \tag{3.9}$$

(iii) Sei $X \sim \gamma_p$ für $p \in (0, 1]$. Dann ist $\mathbf{E}[X] = \frac{1-p}{p}$ (siehe Beispiel 3.4(iii)). Setze

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; \frac{1}{1-x} \;:=\; f(x) \qquad \text{für } \; x \in (-1, 1).$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} \;=\; f'(x) \;=\; \frac{1}{(1-x)^2}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n-1)\, x^{n-2} \;=\; f''(x) \;=\; \frac{2}{(1-x)^3},$$

also

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= p\sum_{n=0}^{\infty} n^2\,(1-p)^n \\ &= p\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,(1-p)^n \quad + \quad p\sum_{n=0}^{\infty} n\,(1-p)^n \\ &= p\,(1-p)^2\,f''(1-p) \;+\; p\,(1-p)\,f'(1-p) \\ &= \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{p\,(1-p)}{p^2} = \frac{2-3p+p^2}{p^2}.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2]-\mathbf{E}[X]^2 = \frac{2-3p+p^2}{p^2} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}. \tag{3.10}$$

◇

Satz 3.21 *Sind $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ unabhängig, so sind X und Y unkorreliert.*

Beweis Nach Satz 3.5(v) ist $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$. Hieraus folgt direkt die Aussage. □

Bemerkung 3.22 In Satz 3.21 gilt die umgekehrte Implikation natürlich nicht. Hierzu betrachten wir als Beispiel X und Y mit

$$\mathbf{P}[X=0, Y=-1] = \mathbf{P}[X=0, Y=1] = \mathbf{P}[X=-1, Y=0] = \mathbf{P}[X=1, Y=0] = \frac{1}{4}.$$

Dann ist $\mathbf{Cov}[X,Y] = 0$, aber $\mathbf{P}[X=0, Y=0] = 0 \neq \frac{1}{4} = \mathbf{P}[X=0]\,\mathbf{P}[Y=0]$. ◇

Satz 3.23 *Es gelten*

(i) $\mathbf{Cov}[X,Y] = \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])(Y-\mathbf{E}[Y])]$

(ii) $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}\big[(X-\mathbf{E}[X])^2\big]$

(iii) Speziell ist stets $\mathbf{Var}[X] \geq 0$ *und*

$$\mathbf{Var}[X] = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad X = \mathbf{E}[X] \quad \textit{f.s.}. \tag{3.11}$$

Beweis (i) Dies liefert die einfache Rechnung

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\big[(X-\mathbf{E}[X])(Y-\mathbf{E}[Y])\big] &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X]Y\big] - \mathbf{E}\big[X\mathbf{E}[Y]\big] + \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]\big] \\ &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] \\ &= \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y] \\ &= \mathbf{Cov}[X,Y].\end{aligned}$$

(ii) Dies folgt direkt aus (i), weil $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{Cov}[X,X]$.

(iii) Die Aussage folgt aus (ii) zusammen mit Satz 3.5(iii), angewandt auf die Zufallsvariable $(X - \mathbf{E}[X])^2$. □

Beispiel 3.24 Sei $X \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Dann ist $\mathbf{E}[X] = \mu$ und mittels affiner Substitution und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[X] &= \mathbf{E}\big[(X-\mu)^2\big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[-x\, e^{-x^2/2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \; + \; \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right] \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

◇

Satz 3.25 *Die Abbildung*

$$\mathbf{Cov} : \mathcal{L}^2(\mathbf{P}) \times \mathcal{L}^2(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$$

ist eine positiv semidefinite symmetrische Bilinearform mit $\mathbf{Cov}[X,Y] = 0$, falls es ein $y \in \mathbb{R}$ gibt mit $Y = y$ f.s. Ausgeschrieben heißt dies: Für $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, sowie $d, e \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{Cov}\left[d + \sum_{i=1}^m \alpha_i X_i, e + \sum_{j=1}^n \beta_j Y_j \right] = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \, \mathbf{Cov}[X_i, Y_j]. \tag{3.12}$$

*Speziell gilt die **Bienaymé-Gleichung***

$$\mathbf{Var}\left[\sum_{i=1}^m X_i \right] = \sum_{i=1}^m \mathbf{Var}[X_i] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \mathbf{Cov}[X_i, X_j]. \tag{3.13}$$

Für unkorrelierte (speziell also für unabhängige) $X_1, \ldots, X_m$ gilt

$$\mathbf{Var}\left[\sum_{i=1}^m X_i \right] = \sum_{i=1}^m \mathbf{Var}[X_i]. \tag{3.14}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Cov}\left[d+\sum_{i=1}^m \alpha_i X_i, e+\sum_{j=1}^n \beta_j Y_j\right]\\
&\quad= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i(X_i-\mathbf{E}[X_i])\right)\left(\sum_{j=1}^n \beta_j(Y_j-\mathbf{E}[Y_j])\right)\right]\\
&\quad= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \alpha_i\beta_j \mathbf{E}[(X_i-\mathbf{E}[X_i])(Y_j-\mathbf{E}[Y_j])]\\
&\quad= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n \alpha_i\beta_j \,\mathbf{Cov}[X_i,Y_j].
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.26 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$, sowie $X \sim b_{n,p}$. Wir wollen die Varianz von X ausrechnen. Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Parameter p (und damit $\mathbf{Var}[X_i] = p(1-p)$). Dann ist $X \stackrel{d}{=} X_1+\ldots+X_n$, also

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{Var}[X_1+\ldots+X_n] = \mathbf{Var}[X_1]+\ldots+\mathbf{Var}[X_n] = n\,p\,(1-p).$$

◇

Beispiel 3.27 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1]$, sowie $X \sim b^-_{n,p}$. Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig $X_i \sim \gamma_p$. (und damit $\mathbf{Var}[X_i] = \frac{1-p}{p^2}$ nach Beispiel 3.20(iii)). Dann ist $X \stackrel{d}{=} X_1+\ldots+X_n$, also

$$\mathbf{Var}[X] = \mathbf{Var}[X_1+\ldots+X_n] = n\frac{1-p}{p^2}.$$

◇

Korollar 3.28 *Sind $X, Y \in \mathcal{L}^2$, so gilt die* ***Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung***

$$(\mathbf{Cov}[X,Y])^2 \leq \mathbf{Var}[X]\,\mathbf{Var}[Y]. \tag{3.15}$$

In (3.15) gilt Gleichheit genau dann, wenn es Zahlen $a,b,c \in \mathbb{R}$ gibt mit $|a|+|b|+|c| > 0$ und $aX+bY+c=0$ fast sicher. In diesem Fall nennen wir X und Y perfekt korreliert.

Beweis Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung gilt für jede positiv semidefinite Bilinearform, also nach Satz 3.25 insbesondere für $\mathbf{Cov}$. In der Notation von Varianz und Kovarianz sieht der Beweis so aus:

1. Fall: $\mathbf{Var}[Y]=0$. Hier ist die Aussage trivialerweise richtig (mit $a=0$, $b=1$ und $c=0$).

2. Fall: $\mathbf{Var}[Y]>0$. Sei $\theta := -\frac{\mathbf{Cov}[X,Y]}{\mathbf{Var}[Y]}$. Dann ist nach Satz 3.23(iii)

$$\begin{aligned}
0 \leq \ &\mathbf{Var}[X+\theta Y]\,\mathbf{Var}[Y] \ = \ \Big(\mathbf{Var}[X]+2\theta\,\mathbf{Cov}[X,Y]+\theta^2\,\mathbf{Var}[Y]\Big)\,\mathbf{Var}[Y]\\
= \ &\mathbf{Var}[X]\,\mathbf{Var}[Y]-\mathbf{Cov}[X,Y]^2
\end{aligned}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $X+\theta Y$ fast sicher konstant ist. Wähle nun $a=1$ und $b=\theta$ sowie $c=-\mathbf{E}[X]-b\,\mathbf{E}[Y]$. □

Satz 3.29 (Formel von Blackwell-Girshick) *Seien $T, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige reelle Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$. Es sei $T \in \mathbb{N}_0$ fast sicher, und es seien $X_1, X_2, \ldots$ identisch verteilt. Wir setzen*

$$S_T := \sum_{i=1}^{T} X_i.$$

Dann ist $S_T \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ und

$$\mathbf{Var}[S_T] \;=\; \mathbf{E}[X_1]^2\,\mathbf{Var}[T] \;+\; \mathbf{E}[T]\,\mathbf{Var}[X_1].$$

Beweis Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S_T^2] \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\mathbb{1}_{\{T=n\}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{T=n\}}]\,\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T=n]\left(\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}[X_i])\right)^2\right] \;+\; \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[X_i]\right)^2\right) \\
&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}[T=n]\,\big(n\mathbf{Var}[X_1] + n^2\mathbf{E}[X_1]^2\big) \\
&=\; \mathbf{E}[T]\,\mathbf{Var}[X_1] \;+\; \mathbf{E}[T^2]\,\mathbf{E}[X_1]^2.
\end{aligned}$$

Nach der Wald'schen Identität (Satz 3.15) ist $\mathbf{E}[S_T] = \mathbf{E}[T]\,\mathbf{E}[X_1]$, also ist

$$\mathbf{Var}[S_T] \;=\; \mathbf{E}[S_T^2] - \mathbf{E}[S_T]^2 \;=\; \mathbf{E}[T]\,\mathbf{Var}[X_1] \;+\; \big(\mathbf{E}[T^2] - \mathbf{E}[T]^2\big)\,\mathbf{E}[X_1]^2.$$

Dies ist aber die Behauptung. □

Wir kommen nun zu einer weiteren wichtigen Ungleichung für reellwertige Zufallsvariablen. Trotz der Einfachheit des Argumentes ist diese Aussage fundamental.

Satz 3.30 (Markov'sche Ungleichung, Chebyshev'sche Ungleichung) *(i) Seien X eine reelle Zufallsvariable und $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine monoton wachsende Funktion. Dann gilt für jedes $a > 0$ mit $f(a) > 0$ die* ***Markov'sche Ungleichung***

$$\mathbf{P}[|X| \ge a] \;\le\; \frac{\mathbf{E}[f(|X|)]}{f(a)}. \tag{3.16}$$

(ii) Speziell gilt für $X \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ die ***Chebyshev'sche Ungleichung***

$$\mathbf{P}\big[|X - \mathbf{E}[X]| \ge a\big] \;\le\; \frac{\mathbf{Var}[X]}{a^2}. \tag{3.17}$$

Beweis (i) Betrachte die Zufallsvariable $Y := f(a)\,\mathbb{1}_{\{|X|\ge a\}}$. Dann ist $Y \le f(|X|)$, also (Satz 3.5(iv))

$$\mathbf{E}\big[f(|X|)\big] \;\ge\; \mathbf{E}[Y] \;=\; f(a)\,\mathbf{P}\big[|X| \ge a\big].$$

(ii) Wende (i) auf die Zufallsvariable $X' = X - \mathbf{E}[X]$ an mit $f(x) = x^2$. □

Beispiel 3.31 Sei $X \sim b^-_{n,p}$. Wie können wir für $a \geq \mathbf{E}[X]$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}[X \geq a]$ einfach abschätzen?

Es ist $\mathbf{E}[X] = n\frac{1-p}{p}$ (siehe Beispiel 3.6) und $\mathbf{Var}[X] = n\frac{1-p}{p^2}$ (Beispiel 3.20). Daher liefert die Chebyshev'sche Ungleichung

$$\mathbf{P}[X \geq a] \;\leq\; \mathbf{P}\big[|X - \mathbf{E}[X]| \;\geq\; a - \mathbf{E}[X]\big] \;\leq\; \frac{\mathbf{Var}[X]}{(a - \mathbf{E}[X])^2} \;=\; \frac{(1-p)\,n}{(ap - n(1-p))^2}.$$ ◇

Beispiel 3.32 Sei $X \sim \mathrm{Poi}_\lambda$ für ein $\lambda > 0$. Wie groß ist $\mathbf{P}[X \geq a]$?

Wir wenden zunächst die Chebyshev'sche Ungleichung an. Es ist $\mathbf{E}[X] = \lambda$ und $\mathbf{Var}[X] = \lambda$ (siehe Beispiel 3.20(ii)). Also ist für $a > \lambda$

$$\mathbf{P}[X \geq a] \;\leq\; \frac{\mathbf{Var}[X]}{(a - \mathbf{E}[X])^2} \;=\; \frac{\lambda}{(a-\lambda)^2}. \tag{3.18}$$

Wir wollen diese Abschätzung verbessern, indem wir eine geeignetere Funktion in der Markov'schen Ungleichung wählen. Setze $f(x) := \exp(\theta x)$, wobei $\theta := \log(a/\lambda)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[X \geq a] \;&\leq\; e^{-\theta a}\,\mathbf{E}[e^{\theta X}] \\
&=\; e^{-\theta a} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\, e^{\theta k}\, \frac{\lambda^k}{k!} \\
&=\; e^{-\theta a}\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda e^\theta} \\
&=\; e^{-\theta a}\, e^{-\lambda(1-e^\theta)}.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird minimal genau für unsere Wahl von θ, und es folgt

$$\mathbf{P}[X \geq a] \;\leq\; \exp\Big(a - \lambda - a\log\big(\frac{a}{\lambda}\big)\Big). \tag{3.19}$$

Für große a ist diese Abschätzung besser als (3.18). ◇

Korollar 3.33 (Gesetz der großen Zahl) *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$. Dann gilt für jedes $C > 0$*

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbf{E}[X_1]\right| \geq C\sqrt{\frac{\mathbf{Var}[X_1]}{n}}\right] \;\leq\; C^{-2}.$$

Speziell gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mathbf{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right] \;\leq\; \frac{\mathbf{Var}[X_1]}{n\,\varepsilon^2} \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

Beweis Es gilt $\mathbf{E}[(X_1 + \ldots + X_n)/n] = \mathbf{E}[X_1]$ (nach Satz 3.5(ii)) und $\mathbf{Var}[(X_1 + \ldots + X_n)/n] = \mathbf{Var}[X_1]/n$ (nach der Formel von Bienaymé). Die Behauptung folgt also aus der Chebyshev'schen Ungleichung. □

3.4 Der Median

Für reelle Zufallsvariablen X, die keinen Erwartungswert besitzen, ist es nützlich, eine andere Kenngröße anzugeben, die einen typischen Wert angibt. Dies kann der Median sein, der als derjenige Wert m_X definiert ist, so dass X mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ Werte kleiner als m_X annimmt, ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit mindestens $\frac{1}{2}$ Werte größer als m_X.

Definition 3.34 (Median) *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$. Dann heißt jede Zahl $m \in \mathbb{R}$ mit*

$$\mu((-\infty, m]) \geq \frac{1}{2} \quad \textit{und} \quad \mu([m, \infty)) \geq \frac{1}{2} \tag{3.20}$$

ein ***Median*** *von μ. Ist speziell X eine reelle Zufallsvariable, so heißt m_X Median von X, falls m_X der Median von $\mathbf{P}_X$ ist, also falls*

$$\mathbf{P}[X \leq m_X] \geq \frac{1}{2} \quad \textit{und} \quad \mathbf{P}[X \geq m_X] \geq \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

Satz 3.35 *Die Menge $M_\mu = \{m \in \mathbb{R} : m \text{ ist Median von } \mu\} =: [m_-, m_+]$ ist ein kompaktes Intervall, das möglicherweise aus nur einem Punkt besteht.*

Beweis Seien $m_1, m_2 \in M_\mu$, $m_1 \leq m_2$. Dann ist für jedes $m \in [m_1, m_2]$:

$$\mu((-\infty, m]) \;\geq\; \mu((-\infty, m_1]) \;\geq\; \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mu([m, \infty)) \;\geq\; \mu([m_2, \infty)) \;\geq\; \frac{1}{2}.$$

Also ist $m \in M_\mu$. Außerdem gilt $\mu((-\infty, x]) \to 0$ für $x \to -\infty$, also existiert ein $x^- \in \mathbb{R}$ mit $\mu((-\infty, x^-]) \leq \frac{1}{4}$. Offenbar ist $x^- < m$ für alle $m \in M_\mu$. Analog existiert ein $x^+ \in \mathbb{R}$ mit $x^+ > m$ für alle $m \in M_\mu$. Also ist $M_\mu \subset (x^-, x^+)$ beschränkt.

Sei $m_- := \inf M_\mu \in \mathbb{R}$. Sei $m_n \in M_\mu$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \ldots$ sowie $m_- = \lim_{n\to\infty} m_n$. Dann ist

$$\mu\big((-\infty, m_-]\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu\big((-\infty, m_n]\big) \;\geq\; \frac{1}{2}$$

und

$$\mu\big([m_-, \infty)\big) \;\geq\; \mu\big([m_1, \infty)\big) \;\geq\; \frac{1}{2}.$$

Mithin ist $m_- \in M_\mu$. Analog folgt $m_+ := \sup M_\mu \in M_\mu$, also ist M_μ abgeschlossen und damit kompakt. □

Der Median hat eine einfache Transformationseigenschaft.

Satz 3.36 *Seien X eine reelle Zufallsvariable und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, oder monoton fallende, Abbildung. Sei ferner m_X ein Median von X. Dann ist $\varphi(m_X)$ ein Median der Zufallsvariablen $\varphi(X)$.*

Beweis Sei zunächst φ monoton wachsend. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\{\varphi(X) \leq \varphi(x)\} \supset \{X \leq x\}$ und $\{\varphi(X) \geq \varphi(x)\} \supset \{X \geq x\}$. Daher ist

$$\mathbf{P}[\varphi(X) \leq \varphi(m_X)] \;\geq\; \mathbf{P}[X \leq m_X] \;\geq\; \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[\varphi(X) \geq \varphi(m_X)] \;\geq\; \mathbf{P}[X \geq m_X] \;\geq\; \frac{1}{2}.$$

Analog ist für φ monoton fallend $\{\varphi(X) \le \varphi(x)\} \supset \{X \ge x\}$ und $\{\varphi(X) \ge \varphi(x)\} \supset \{X \le x\}$. Daher ist

$$\mathbf{P}[\varphi(X) \le \varphi(m_X)] \;\ge\; \mathbf{P}[X \ge m_X] \;\ge\; \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[\varphi(X) \ge \varphi(m_X)] \;\ge\; \mathbf{P}[X \le m_X] \ge \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Bemerkung 3.37 Ist die Verteilungsfunktion $x \mapsto F_X(x) = \mathbf{P}[X \le x]$ streng monoton wachsend, so ist der Median eindeutig. $\Diamond$

Beweis Übung! $\square$

Hat X ein zweites Moment, so ist

$$\mathbf{E}[(X-a)^2] = \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X])^2] + (a-\mathbf{E}[X])^2 \ge \mathbf{Var}[X]$$

mit Gleichheit, falls $a = \mathbf{E}[X]$. Der Erwartungswert minimiert als den L^2-Abstand zu X. Ähnliches gilt für den L^1-Abstand und den Median:

Satz 3.38 *Ist $X \in \mathcal{L}^1(\mathbf{P})$, so ist jeder Median m_X ein Minimierer des L^1-Abstands zu X:*

$$\mathbf{E}[|X-a|] \ge \mathbf{E}\big[|X-m_X|\big] \quad \textit{für alle } \; x \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

und

$$\mathbf{E}[|X-a|] = \mathbf{E}\big[|X-m_X|\big] \quad \iff \quad a \; \textit{ ist ein Median von } \; X. \tag{3.23}$$

Beweis Definiere

$$h(a) := \mathbf{E}[|X-a|] \quad \text{für } \; a \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} h(a) &= \int_0^\infty \mathbf{P}\big[|X-a| \ge t\big]\,dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{P}\big[X-a \ge t\big] + \mathbf{P}\big[X-a \le -t\big]\,dt \\ &= \int_a^\infty \mathbf{P}[X \ge t]\,dt \;+\; \int_{-\infty}^a \mathbf{P}[X \le t]\,dt. \end{aligned}$$

Für $t < m_X$ ist

$$1 - \mathbf{P}[X \le t] = \mathbf{P}[X > t] \ge \mathbf{P}[X \ge m_X] \ge \frac{1}{2},$$

also

$$1 - \mathbf{P}[X \le t] - \mathbf{P}[X < t] \ge 1 - 2\mathbf{P}[X \le t] \ge 0.$$

Für $a \le b \le m_X$ ist daher

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= \int_a^b \mathbf{P}[X \ge t]\,dt + \int_b^a \mathbf{P}[X \le t]\,dt \\ &= \int_a^b \big(1 - \mathbf{P}[X \le t] - \mathbf{P}[X < t]\big)\,dt \\ &\ge 0. \end{aligned}$$

Speziell ist $h(m_X) \ge h(a)$ für alle $a \le m_X$. Analog erhält man $m(m_X) \ge h(a)$ für alle $a \ge m_X$. Seien nun m_- der kleinste Median von X und $b < m_-$. Dann ist

$$1 - \mathbf{P}[X \le t] - \mathbf{P}[X < t] > 0 \quad \text{für alle } \; t \in (b, m_-).$$

Also gilt $h(b) - h(m_-) > 0$. Analog erhält man $h(b) - h(m_+) > 0$ für alle b, die echt größer sind als der größte Median m_+. □

Korollar 3.39 *Ist $X \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ und ist m ein Median von X, so ist*

$$|m - \mathbf{E}[X]| \;\leq\; \sqrt{\mathbf{Var}[X]}\,. \tag{3.24}$$

Beweis Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $|\mathbf{E}[X] - c| = |\mathbf{E}[X - c]| \leq |\mathbf{E}[|X - c|]| = \mathbf{E}[|X - c|]$. Außerdem ist für $Y \in \mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ stets $\mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{Var}[Y] + \mathbf{E}[Y]^2 \geq \mathbf{E}[Y]^2$. Wir wenden dies an mit $c = m$ und $Y = |X - \mathbf{E}[X]|$ und erhalten

$$\big|\mathbf{E}[X] - m\big| \leq \mathbf{E}[|X - m|] \overset{\text{Satz 3.38}}{\leq} \mathbf{E}\big[\big|X - \mathbf{E}[X]\big|\big] \leq \sqrt{\mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}[X])^2\big]} = \sqrt{\mathbf{Var}[X]}.$$ □

Kapitel 4

Erzeugendenfunktion

4.1 Definition und Beispiele

In diesem Kapitel betrachten wir nur Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$.

Definition 4.1 (Erzeugendenfunktion) *Sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi_X : [0,1] &\to [0,1] \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}[X=k]\, z^k \;=\; \mathbf{E}\big[z^X\big] \end{aligned} \tag{4.1}$$

*heißt **Erzeugendenfunktion** von X.*

Satz 4.2 *(i) φ_X ist in $[0,1)$ unendlich oft stetig differenzierbar. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und die n-te Ableitung $\varphi_X^{(n)}$*

$$\begin{aligned} \lim_{z \uparrow 1} \varphi_X^{(n)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}[X=k] \cdot k(k-1)\cdots(k-n+1) \\ &= \mathbf{E}\big[X(X-1)\cdots(X-n+1)\big], \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei beide Seiten $= +\infty$ sein können.

(ii) Die Verteilung $\mathbf{P}_X$ von X ist durch φ_X eindeutig charakterisiert.

(iii) Sei $R \geq 1$ der Konvergenzradius der Reihe in (4.1) und $r \in (0,R)$. Dann ist φ_X durch die Angabe von abzählbar vielen Werten $\varphi_X(x_i)$, $x_i \in [0,r]$, $i \in \mathbb{N}$, eindeutig festgelegt. Ist $R > 1$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{z \uparrow 1} \varphi_X^{(n)}(z) \;=\; \varphi_X^{(n)}(1) \;<\; \infty,$$

und φ_X ist durch Angaben von $\varphi_X^{(n)}(1)$, $n \in \mathbb{N}$, eindeutig charakterisiert.

Beweis Das folgt aus der elementaren Theorie der Potenzreihen. □

Satz 4.3 (Multiplikativität der Erzeugendenfunktion) *Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen. Dann gilt*

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n} = \varphi_{X_1} \cdots \varphi_{X_n}.$$

Beweis Für $z \in [0,1)$ sind $z^{X_1}, \ldots, z^{X_n}$ unabhängig (nach Satz 2.36). Daher gilt

$$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(z) \;=\; \mathbf{E}\big[z^{X_1+\ldots+X_n}\big] \;=\; \mathbf{E}\big[z^{X_1}\big]\cdots\mathbf{E}\big[z^{X_n}\big] \;=\; \varphi_{X_1}(z)\cdots\varphi_{X_n}(z). \qquad \square$$

Beispiel 4.4 (i) Sei X $b_{n,p}$-verteilt für gewisse $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Dann ist

$$\varphi_X(z) \;=\; \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} z^m \;=\; \big(pz + (1-p)\big)^n.$$

(ii) Sind X, Y unabhängig und $b_{m,p}$ bzw. $b_{n,p}$-verteilt, so ist nach Satz 4.3

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(z) &= \big(pz+(1-p)\big)^m \big(pz+(1-p)\big)^n \\ &= \big(pz+(1-p)\big)^{m+n}. \end{aligned}$$

Also ist nach Satz 4.2(ii) $X+Y$ $b_{m+n,p}$-verteilt und damit

$$b_{m,p} * b_{n,p} \;=\; b_{m+n,p}.$$

(iii) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $p \in (0,1)$. Wir setzen $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Nach Beispiel 2.44 ist $Y \sim b^-_{n,p}$ verteilt. Ein formaler Beweis hierfür steht aber noch aus. Diesen wollen wir jetzt jedoch mit Hilfe der Erzeugendenfunktionen angeben.

Für $z \in [0,1]$ ist

$$\varphi_{X_1}(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} p\,(1-p)^k z^k \;=\; \frac{p}{1-(1-p)z}.$$

Daher ist $\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(z) \;=\; \varphi_{X_1}(z)^n = \dfrac{p^n}{(1-(1-p)z)^n}$.

Wir setzen formal für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{\alpha}{k} \;:=\; \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}. \tag{4.3}$$

Dann gilt die erweiterte binomische Formel

$$(1-x)^\alpha \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (-x)^k \quad \text{für alle } |x| < 1. \tag{4.4}$$

Wir prüfen dies nur für $\alpha = -n \in -\mathbb{N}$ nach. Hier ist

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}. \tag{4.5}$$

Setzen wir $f(x) := (1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ für $|x| < 1$, so ist

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{-n} &= \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} (-1)^k x^k.
\end{aligned}
$$

Jetzt kommen wir auf Y zurück. Nach der Multiplikationsformel (Satz 4.3) ist

$$
\begin{aligned}
\varphi_Y(z) &= \varphi_{X_1}(z)^n \\
&= \frac{p^n}{(1-(1-p)z)^n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p^n \binom{-n}{k} (-1)^k (1-p)^k z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b^-_{n,p}(\{k\})\, z^k.
\end{aligned}
$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Erzeugendenfunktionen ist damit $Y \sim b^-_{n,p}$. Hieraus bekommen wir die Faltungsformel

$$b^-_{m,p} * b^-_{n,p} = b^-_{m+n,p}.$$ ◇

4.2 Poisson-Approximation

Lemma 4.5 *Seien μ und $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ mit zugehörigen Erzeugendenfunktionen φ_μ und $\varphi_{\mu_n}, n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent*

(i) $\mu_n(\{k\}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\{k\})$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $\mu_n(A) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$ *für alle* $A \subset \mathbb{N}_0$,

(iii) $\varphi_n(z) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(z)$ *für alle* $z \in [0,1]$,

(iv) $\varphi_n(z) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(z)$ *für alle* $z \in [0,\varepsilon)$ *für ein* $\varepsilon > 0$.

*Gilt eine der vier Bedingungen, so schreiben wir $\mu_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ und sagen (μ_n) konvergiert **schwach** gegen μ.*

Beweis (i) $\Longrightarrow$ (ii) Seien $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\mu(\{N+1, N+2, \dots\}) < \frac{\varepsilon}{4}$ gilt.
Für $n_0 \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist

$$\sum_{k=0}^{N} |\mu_n(\{k\}) - \mu(\{k\})| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Speziell ist für $n \geq n_0$ auch $\mu_n(\{N+1, N+2, \dots\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist für $n \geq n_0$

$$|\mu_n(A) - \mu(A)| \;\leq\; \mu_n(\{N+1, N+2, \dots\}) \;+\; \mu(\{N+1, N+2, \dots\}) \\ +\sum_{k \in A \cap \{0,\dots,N\}} |\mu_n(\{k\}) - \mu(\{k\})| <\; \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** Das ist trivial.

(i) $\Longleftrightarrow$ **(iii)** $\Longleftrightarrow$ **(iv)** Dies folgt aus elementarer Theorie der Potenzreihen. □

Seien $(p_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ Zahlen mit $p_{n,k} \in [0,1]$, $p_{n,k} = 0$ für $k \geq k_n$ (für gewisse $k_n \in \mathbb{N}$) und so, dass

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k} \;=\; \lambda \;\in\; (0, \infty) \tag{4.6}$$

existiert und

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{n,k}^2 \;=\; 0. \tag{4.7}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $(X_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_{n,k} \sim \mathrm{Ber}_{p_{n,k}}$. Setze

$$S_n \;:=\; \sum_{k=1}^{\infty} X_{n,k}.$$

Satz 4.6 (Poisson-Approximation) *Unter den obigen Annahmen konvergieren die Verteilung* $(\mathbf{P}_{S_n})_{n \in \mathbb{N}}$ *schwach gegen die Poisson-Verteilung* Poi_λ.

Beweis Die Poisson-Verteilung hat die Erzeugendenfunktion

$$\varphi(z) \;=\; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \;=\; e^{\lambda(z-1)}.$$

Andererseits gilt

$$\varphi_{S_n}(z) \;=\; \prod_{k=1}^{k_n} (p_{n,k} z + (1 - p_{n,k})) = \;\exp\left(\sum_{k=1}^{k_n} \log\big(1 + p_{n,k}(z-1)\big) \right)$$

Für $|x| < \frac{1}{2}$ ist $|\log(1+x) - x| \leq x^2$. Nach Voraussetzung (4.7) existiert ein n_0 mit $\max_k p_{n,k} \leq \sqrt{\sum_k p_{n,k}^2} \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$. Also ist für $n \geq n_0$ (wieder mit (4.7))

$$\sum_{k=1}^{k_n} \Big| \log\big(1 + p_{n,k}(z-1)\big) - p_{n,k}(z-1) \Big| \;\leq\; \sum_{k=1}^{k_n} p_{n,k}^2 \;\stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

Also gilt (mit (4.6))

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{S_n}(z) \;=\; \lim_{n \to \infty} \exp\left(\sum_{k=1}^{k_n} p_{n,k}(z-1) \right) \;=\; e^{\lambda(z-1)}.$$ □

4.3 Der Poissonprozess

Wir wollen ein Modell entwickeln für die Anzahl der Klicks, die ein Geigerzähler in einem Intervall $I = (a, b]$ macht. Die Anzahl der Klicks soll dabei

- zufällig sein und unabhängig für disjunkte Intervalle,
- zeitlich homogen in dem Sinne, dass die Anzahl der Klicks in $I = (a, b]$ die selbe Verteilung hat, wie die Anzahl der Klicks in $c + I = (a + c, b + c]$,
- einen Erwartungswert besitzen,
- keine Doppelpunkte aufweisen: der Zähler macht zu jedem Zeitpunkt höchstens einen Klick.

Wir formalisieren diese Forderungen, indem wir die Notation einführen:

$$\mathcal{I} := \{(a, b] : \ a, b \in [0, \infty), \ a \le b\}.$$

$$\ell((a, b]) := b - a \qquad \text{(die Länge des Intervalls } I = (a, b]).$$

Für $I \in \mathcal{I}$ sei N_I die Anzahl der Klicks nach Zeitpunkt a und nicht später als b. Wir setzen noch $N_t := N_{(0,t]}$ die Gesamtzahl aller Klicks bis zur Zeit t. Die obigen Forderungen lassen sich nun übersetzen zu: $(N_I, \ I \in \mathcal{I})$ ist eine Familie von Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$ mit den Eigenschaften

(P1) $N_{I \cup J} = N_I + N_J$, falls $I \cap J = \emptyset$ und $I \cup J \in \mathcal{I}$ ist.

(P2) Die Verteilung von N_I hängt nur von der Länge von I ab: $\mathbf{P}_{N_I} = \mathbf{P}_{N_J}$ für alle $I, J \in \mathcal{I}$ mit $\ell(I) = \ell(J)$.

(P3) Ist $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ mit $I \cap J = \emptyset$ für alle $I, J \in \mathcal{J}$ mit $I \neq J$, so ist $(N_J, \ J \in \mathcal{J})$ eine unabhängige Familie.

(P4) Für jedes $I \in \mathcal{I}$ gilt $\mathbf{E}[N_I] < \infty$.

(P5) Es gilt $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} \, \mathbf{P}[N_\varepsilon \ge 2] = 0$.

Die Bedeutung von (P5) erklärt sich durch die folgende Rechnung. Setze

$$\lambda := \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^{-1} \, \mathbf{P}[N_\varepsilon \ge 2].$$

Sei $\varepsilon_m \downarrow 0$ eine Folge so, dass $\lambda = \lim_{m \to \infty} \varepsilon_m^{-1} \, \mathbf{P}[N_{\varepsilon_m} \ge 2]$. Für $t > 0$ und $N(m) := \lfloor t/\varepsilon_m \rfloor$ sowie $k = 1, \ldots, N(m)$ sei

$$A_k^m := \big\{ N_{k\varepsilon_m} - N_{(k-1)\varepsilon_m} \ge 2 \big\}.$$

Dann ist $\mathbf{P}[A_k^m] = \mathbf{P}[N_{\varepsilon_m} \ge 2]$ und (wegen $(1 - a_k/k)^k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} e^{-a}$, falls $a_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} a$)

$$\mathbf{P}[N_t \ge 2] \ \ge \ \mathbf{P}\left[\bigcup_{k=1}^{N(m)} A_k^m \right] \ = \ 1 - \Big(1 - \mathbf{P}[N_{\varepsilon_m} \ge 2]\Big)^{N(m)} \ \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \ 1 - e^{-\lambda t}.$$

Also gilt für jedes $t > 0$

$$\mathbf{P}[N_t \ge 2] \ \ge \ 1 - e^{-\lambda t}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[\text{ es gibt einen Doppelklick in } (0,1]\,\big] &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[\bigcup_{k=0}^{2^n-1} \big\{N_{(k\,2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \geq 2\big\}\right] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[\bigcap_{k=0}^{2^n-1} \big\{N_{(k\,2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \leq 1\big\}\right] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{P}\big[N_{(k\,2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \leq 1\big] \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \big(1 - \mathbf{P}[N_{2^{-n}} \geq 2]\big)^{2^n} \\
&\geq 1 - e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Wir müssen also $\lambda = 0$ fordern; dies ist aber gerade (P5).

Der nächste Satz zeigt, dass die Bedingungen (P1) – (P5) die Zufallsvariablen $N_I,\ I \in \mathcal{I}$ eindeutig charakterisieren und zwar als Poissonprozess.

Definition 4.7 *Eine Familie $N_t,\ t \geq 0$, von $\mathbb{N}_0$–wertigen Zufallsvariablen heißt* ***Poissonprozess*** *mit Intensität $\alpha \geq 0$, falls:*

(i) Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ ist $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}},\ i = 1,\ldots,n)$ unabhängig.

(ii) Für $t > s \geq 0$ ist $N_t - N_s$ Poisson-verteilt mit Parameter α, also

$$\mathbf{P}[N_t - N_s = k] = e^{-\alpha(t-s)}\,\frac{(\alpha(t-s))^k}{k!} \qquad \textit{für}\ \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Existenz eines Poissonprozesses ist an dieser Stelle noch nicht gesichert. Darauf kommen wir in Satz 4.9 zurück.

Satz 4.8 *Erfüllt $(N_I,\ I \in \mathcal{I})$ die Bedingungen (P1) – (P5), so ist $(N_{(0,t]},\ t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit Intensität $\alpha := \mathbf{E}[N_{(0,1]}]$. Ist umgekehrt $(N_t,\ t \geq 0)$ ein Poissonprozess, so erfüllt $(N_t - N_s,\ (s,t] \in \mathcal{I})$ die Bedingungen (P1) – (P5).*

Beweis Sei zunächst $(N_t,\ t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit Intensität $\alpha \geq 0$. Per Konstruktion gilt (P1). Für $I = (a,b]$ ist offenbar $\mathbf{P}_{N_I} = \mathrm{Poi}_{\alpha(b-a)} = \mathrm{Poi}_{\alpha\ell(I)}$. Also gilt (P2). Wegen (i) gilt (P3). Offenbar ist $\mathbf{E}[N_I] = \alpha\ell(I) < \infty$, also gilt (P4). Schließlich ist $\mathbf{P}[N_\varepsilon \geq 2] = 1 - e^{-\alpha\varepsilon} - \alpha\varepsilon e^{-\alpha\varepsilon}$, also

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon^{-1}\mathbf{P}[N_\varepsilon \geq 2] \;=\; \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\varepsilon}}{\varepsilon} - \alpha e^{-\alpha\varepsilon}\right) \;=\; 0.$$

Damit gilt auch (P5).

Wir nehmen nun an, dass $(N_I,\ I \in \mathcal{I})$ die Bedingungen (P1) – (P5) erfüllt. Wir definieren

$$\alpha(t) := \mathbf{E}[N_t].$$

Dann ist (wegen (P1) und (P2))

$$\alpha(s+t) = \mathbf{E}[N_{(0,s]} + N_{(s,s+t]}] = \mathbf{E}[N_{(0,s]}] + \mathbf{E}[N_{(0,t]}] = \alpha(s) + \alpha(t).$$

Da $t \mapsto \alpha(t)$ monoton wachsend ist, folgt hieraus sogar $\alpha(t) = t\alpha(1)$ für alle $t \geq 0$. Wir setzen jetzt $\alpha := \alpha(1)$ und erhalten so $\mathbf{E}[N_I] = \alpha\ell(I)$. Wir müssen nur noch zeigen, dass $\mathbf{P}_{N_t} = \mathrm{Poi}_{\alpha t}$ gilt. Wir wollen den Satz über die Poissonapproximation verwenden. Zu diesem Zweck zerlegen wir für festes $n \in \mathbb{N}$, das Intervall $(0, t]$ in 2^n disjunkte gleich lange Intervalle

$$I^n(k) := \big((k-1)\,2^{-n}t, k\,2^{-n}t\big] \quad \text{für } \; k = 1, \ldots, 2^n,$$

und setzen

$$X^n(k) := N_{I^n(k)}$$

sowie

$$\overline{X}^n(k) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \; X^n(k) \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach den Annahmen (P2) und (P3) sind $(X^n(k),\ k = 1, \ldots, 2^n)$ unabhängig und identisch verteilt. Daher ist auch $(\bar{X}^n(k),\ k = 1, \ldots, 2^n)$ unabhängig und identisch verteilt, nämlich

$$\overline{X}^n(k) \sim \mathrm{Ber}_{p_n},$$

wobei $p_n = \mathbf{P}[N_{2^{-n}t} \geq 1]$.

Schließlich setzen wir $N_t^n := \sum_{k=1}^{2^n} \overline{X}^n(k)$. Dann ist $N_t^n \sim b_{2^n, p_n}$. Offenbar ist $N_t^{n+1} - N_t^n \geq 0$. Nun gilt nach (P5)

$$\mathbf{P}[N_t \neq N_t^n] \;\leq\; \sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{P}[X^n(k) \geq 2] \;=\; 2^n\,\mathbf{P}[N_{2^{-n}t} \geq 2] \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0. \tag{4.8}$$

Also gilt $N_t = \lim_{n\to\infty} N_t^n$ fast sicher. Nach Satz 3.5(vii) folgt

$$\alpha t \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[N_t^n] \;=\; \lim_{n\to\infty} p_n\,2^n.$$

Nach dem Satz über Poisson-Approximation (Satz 4.6 bzw. Satz 1.42) gilt daher für jedes $l \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{P}[N_t = l] \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[N_t^n = l] \;=\; \mathrm{Poi}_{\alpha t}(\{l\}).$$

Also ist $\mathbf{P}_{N_t} = \mathrm{Poi}_{\alpha t}$. □

Bislang steht noch der Nachweis dafür aus, dass es überhaupt Poissonprozesse gibt. Wir werden diesen Nachweis führen, indem wir auf explizite Weise einen solchen Prozess konstruieren. Hierbei wollen wir die Wartezeiten zwischen den einzelnen Klicks des Geigerzählers, oder formaler, zwischen den Unstetigkeitsstellen der Abbildung $t \mapsto N_t(\omega)$ zur Grundlage nehmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir zur Zeit s auf den nächsten Klick des Zähler länger als t Zeiteinheiten warten müssen? Wenn wir die Klicks als Poissonprozess mit Intensität α modellieren, ist diese Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}[N_{(s,s+t]} = 0] = e^{-\alpha t}.$$

Mithin ist die Wartezeit auf den nächsten Klick exponentialverteilt mit Parameter α. Außerdem sollten die Wartezeiten unabhängig voneinander sein. Wir nehmen nun die Wartezeiten als Startpunkt der Betrachtung und konstruieren hieraus den Poissonprozess.

Sei $W_1, W_2, \ldots$ eine unabhängige Familie von exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\alpha > 0$, also $\mathbf{P}[W_n > x] = e^{-\alpha x}$. Wir setzen

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k.$$

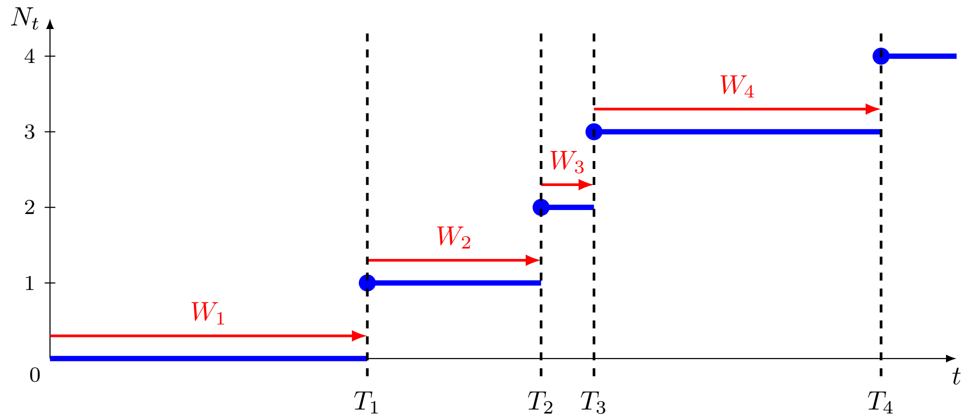


Abbildung 4.1: Poissonprozess N_t mit Wartezeiten W_k und Sprungzeiten T_k

Wir interpretieren W_n als die Wartezeit zwischen dem $(n-1)$ten und dem n-ten Klick. T_n ist der Zeitpunkt des n-ten Klicks. In Anlehnung an diese Intuition definieren wir

$$N_t := \#\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\}$$

als die Anzahl der Klicks bis zur Zeit t. Es ist dann

$$\{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}.$$

Speziell ist also N_t eine Zufallsvariable.

Satz 4.9 *Die Familie $(N_t,\, t \geq 0)$ ist ein Poissonprozess mit Intensität α.*

Beweis Wir müssen zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ sowie $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(N_{t_i} - N_{t_{i-1}},\, i = 1, \ldots, n)$ ist unabhängig und $N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = \text{Poi}_{\alpha(t_i - t_{i-1})}$. Wir wissen schon, dass es nicht ausreicht, dies nur für $n = 2$ zu zeigen. Allerdings wird der Schreibaufwand für $n \geq 3$ extrem groß, und das Prinzip, wie man den Beweis für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ führt, wird klar, wenn man $n = 2$ untersucht hat. Daher beschränken wir uns hier auf den Fall $n = 2$.

Wir zeigen also, für $0 < s < t$ und $l, k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{P}[N_s = k,\, N_t - N_s = l] = \left(e^{-\alpha s} \frac{(\alpha s)^k}{k!}\right) \left(e^{-\alpha(t-s)} \frac{(\alpha(t-s))^l}{l!}\right). \tag{4.9}$$

Hieraus folgt klar, dass N_s und $(N_t - N_s)$ unabhängig sind. Außerdem folgt, indem wir über $k \in \mathbb{N}_0$ summieren, dass $N_t - N_s \sim \text{Poi}_{\alpha(t-s)}$.

Nach Satz 2.34 hat die Verteilung $\mathbf{P}_{(W_1, \ldots, W_{k+l+1})}$ die Dichte

$$x \mapsto \alpha^{k+l+1}\, e^{-\alpha S_{k+l+1}(x)},$$

wobei $S_n(x) := x_1 + \ldots + x_n$. Es reicht nun, $l \geq 1$ zu betrachten, da wir den $(l = 0)$-Term durch die Normierung des Wahrscheinlichkeitsmaßes erhalten. Sei also $l \geq 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[N_s = k,\, N_t - N_s = l\big] &= \mathbf{P}\big[T_k \leq s < T_{k+1},\, T_{k+l} \leq t < T_{k+l+1}\big] \\
&= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty dx_1 \cdots dx_{k+l+1}\, \alpha^{k+l+1}\, e^{-\alpha S_{k+l+1}(x)}\, \mathbb{1}_{\{S_k(x) \leq s < S_{k+1}(x)\}}\, \mathbb{1}_{\{S_{k+l}(x) \leq t < S_{k+l+1}(x)\}}.
\end{aligned}$$

Wir integrieren nun sukzessive, mit x_{k+l+1} beginnend. Im ersten Schritt substituieren wir $z = S_{k+l+1}(x)$ und erhalten

$$\int_0^\infty dx_{k+l+1} \alpha e^{-\alpha S_{k+l+1}(x)} \mathbb{1}_{\{S_{k+l+1}(x)>t\}} \;=\; \int_t^\infty dz\, \alpha e^{-\alpha z} \;=\; e^{-\alpha t}.$$

Nun halten wir $x_1, \ldots, x_k$ fest und erhalten für die restlichen Variablen durch die Substitution $y_1 = S_{k+1}(x) - s$, $y_2 = x_{k+2}, \ldots, y_l = x_{k+l}$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty & dx_{k+1} \ldots dx_{k+l}\, \mathbb{1}_{\{s<S_{k+1}(x)\le S_{k+l}\le t\}} \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty dy_1 \ldots dy_l\, \mathbb{1}_{\{y_1+\ldots+y_l\le t-s\}} \;=\; \frac{(t-s)^l}{l!}.\end{aligned}$$

(Dies erhält man zum Beispiel per Induktion über l.) Wir integrieren nun über die verbleibenden Variablen $x_1, \ldots, x_k$ und erhalten

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty dx_1 \ldots dx_k\, \mathbb{1}_{\{S_k(x)\le s\}} \;=\; \frac{s^k}{k!}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{P}[N_s = k,\, N_t - N_s = l] \;=\; e^{-\alpha t}\, \alpha^{k+l}\, \frac{s^k}{k!}\, \frac{(t-s)^l}{l!},$$

also (4.9). □

4.4 Verzweigungsprozesse

Seien $T, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariablen. Wie sieht die Verteilung von

$$S := \sum_{n=1}^{T} X_n$$

aus?

Lemma 4.10 *Sind die $X_1, X_2, \ldots$ zusätzlich identisch verteilt, so ist $\varphi_S(z) = \varphi_T(\varphi_{X_1}(z))$.*

Beweis

$$\begin{aligned}\varphi_S(z) &= \sum_{k=0}^\infty \mathbf{P}[S=k]\, z^k \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}[T=n]\, \mathbf{P}[X_1+\ldots+X_n=k]\, z^k \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathbf{P}[T=n]\, \varphi_{X_1}(z)^n \;=\; \varphi_T\big(\varphi_{X_1}(z)\big).\end{aligned}$$

□

Wir nehmen jetzt an, dass Zahlen $p_0, p_1, p_2, \ldots \in [0,1]$ mit $\sum_{k=0}^\infty p_k = 1$ gegeben sind und $(X_{n,i})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ unabhängig sind und identisch verteilt mit $\mathbf{P}[X_{n,i} = k] = p_k$.

Setze

$$Z_0 = 1$$

und

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n-1,i} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Interpretation: Z_n ist die Anzahl von Individuen in der n-ten Generation einer sich zufällig entwickelnden Population. Das i-te Individuum in der n-ten Generation hat $X_{n,i}$ Nachkommen.

Definition 4.11 $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *heißt* ***Galton-Watson Prozess*** *oder* ***Verzweigungsprozess*** *mit Nachkommenverteilung* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von Verzweigungsprozessen sind Erzeugendenfunktionen. Seien also

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^\infty p_k\, z^k$$

die Erzeugendenfunktion der Nachkommenverteilung und φ' deren Ableitung. Wir definieren die n-te Iterierte von φ durch

$$\varphi_1 := \varphi \qquad \text{und} \qquad \varphi_n := \varphi_{n-1} \circ \varphi \ \text{ für } \ n \in \mathbb{N}.$$

Sei schließlich φ_{Z_n} die Erzeugendenfunktion von Z_n.

Lemma 4.12 *Es gilt* $\varphi_n = \varphi_{Z_n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis Für $n = 1$ ist dies per Definition richtig. Für $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Lemma 4.10 induktiv

$$\varphi_{Z_{n+1}} \;=\; \varphi_{Z_n} \circ \varphi \;=\; \varphi_n \circ \varphi \;=\; \varphi_{n+1}. \qquad \square$$

Sei $q_n := \mathbf{P}[Z_n = 0]$, die Wahrscheinlichkeit, dass Z zur Zeit n schon ausgestorben ist. Offenbar ist $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$, also $q_n \le q_{n+1} \le \ldots$. Daher existiert der Limes

$$q \;:=\; \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}[Z_n = 0] \;=\; \mathbf{P}[Z_n = 0 \ \text{ für ein } \ n \in \mathbb{N}\,],$$

den wir als Aussterbewahrscheinlichkeit bezeichnen.

Unter welchen Bedingungen gilt $q = 0$, $q = 1$, oder $q \in (0,1)$? Offenbar ist $q \ge p_0 = \mathbf{P}[Z_1 = 0]$. Ist andererseits $p_0 = 0$, so ist $Z_{n+1} \ge Z_n$ sicher für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $q = 0$.

Satz 4.13 (Aussterbewahrscheinlichkeit des Galton-Watson Prozesses) *Sei* $p_1 \neq 1$.

(i) Die Menge der Fixpunkte von φ *ist* $F := \{r \in [0,1] : \varphi(r) = r\} = \{q, 1\}$.

(ii) $q < 1 \iff \lim_{z\uparrow 1} \varphi'(z) > 1 \iff \sum_{k=1}^\infty k\, p_k > 1$.

Beweis Es gilt $\varphi(1) = 1$, also $1 \in F$. Offenbar gilt

$$q_n = \varphi_n(0) = \varphi(q_{n-1}).$$

Wir wissen, dass $q_n \uparrow q$ gilt. Da φ stetig ist, gilt

$$\varphi(q) \;=\; \varphi\Big(\lim_{n\to\infty} q_n\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \varphi(q_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} q_{n+1} \;=\; q.$$

Also ist $q \in F$. Ist $r \in F$ ein beliebiger Fixpunkt von φ, so gilt $r \geq 0 = q_0$. Da φ monoton wachsend ist, folgt $r = \varphi(r) \geq \varphi(q_0) = q_1$ und induktiv $r \geq q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $r \geq q$. Mithin ist $q = \min F$.

Im Fall $p_0 + p_1 = 1$ sind die Aussagen trivial. Sei nun also $p_0 + p_1 < 1$.

1. Fall: $\lim_{z\uparrow 1} \varphi'(z) \leq 1$**.** Da φ strikt konvex ist, gilt in diesem Fall $\varphi(z) > z$ für alle $z \in [0,1)$, also $F = \{1\}$ und damit $q = 1$.

2. Fall: $\lim_{z\uparrow 1} \varphi'(z) > 1$**.** Da φ strikt konvex ist und $\varphi(0) \geq 0$, gibt es genau ein $r \in [0,1)$ mit $\varphi(r) = r$, also ist $F = \{r, 1\}$ und damit $q = \min F = r$.

Die zweite Äquivalenz in (ii) folgt aus (4.2). □

Der Fall $m := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kp_k = 1$ ist der kritische Fall, bei dem der Verzweigungsprozess gerade noch mit Wahrscheinlichkeit 1 ausstirbt. Wir wollen für diesen Fall jetzt die Geschwindigkeit des Aussterbens berechnen und die bedingte Verteilung, gegeben, dass der Prozess eben noch nicht ausgestorben ist. Wir formulieren hier zunächst die beiden Sätze und geben dann für den Spezialfall geometrischer Nachkommenverteilung einen elementaren Beweis an.

Satz 4.14 (Kolmogorov) *Seien* $m = 1$ *und* $\sigma^2 := \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - m^2 \in (0,\infty)$*, sowie* $\sum_{k=0}^{\infty} k^3 p_k < \infty$*. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbf{P}[Z_n > 0] \;=\; \frac{2}{\sigma^2}. \tag{4.10}$$

Satz 4.15 (Yaglom) *Unter den Bedingungen von Satz 4.14 gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{Z_n}{n} \geq t \,\middle|\, Z_n > 0\right] \;=\; e^{-t\cdot(2/\sigma^2)} \quad \textit{für alle } \; t > 0. \tag{4.11}$$

Wir beweisen die beiden Sätze nur in dem Spezialfall geometrischer Nachkommenverteilung

$$p_k = 2^{-(k+1)} \quad \text{für } \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Es ist dann klar $\sigma^2 = 2$ (siehe Beispiel 3.20(iii)). Hier lassen sich die Iterierten der Erzeugendenfunktionen explizit ausrechnen, was einen elementaren Beweis ermöglicht. Der allgemeine Fall benötigt etwas mehr Analysis.

Lemma 4.16 *Sei* $p_k = 2^{-(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}_0$*. Dann gilt für die Erzeugendenfunktion* $\varphi(s) := \sum_k p_k\, s^k$, $s \in [0,1]$ *und deren Iterierten* φ_n

$$\varphi_n(s) \;=\; \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}, \tag{4.12}$$

und für die k-te Ableitung ($k \in \mathbb{N}$)

$$\varphi_n^{(k)}(s) \;=\; \frac{k!\,n^{k-1}}{(n+1-ns)^{k+1}}. \tag{4.13}$$

Speziell hat φ_n die Taylorreihendarstellung

$$\varphi_n(s) \;=\; \frac{n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k s^k \quad \textit{für jedes } s \in (-1,1). \tag{4.14}$$

Beweis Zu (4.12): Wir führen den Beweis per Induktion über n. Offenbar ist $\varphi_1(s) = \varphi(s) = \frac{1}{2-s}$, also gilt (4.12) für $n=1$. Gelte (4.12) nun für n. Dann ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(s) \;=\; \varphi(\varphi_n(s)) \;&=\; \frac{1}{2 - \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}} \\
&=\; \frac{1}{\frac{2(n+1)-2ns-n+(n-1)s}{n+1-ns}} \\
&=\; \frac{n+1-ns}{2(n+1)-2ns-n+(n-1)s}.
\end{aligned}$$

Also gilt (4.12) auch für $n+1$.

Zu (4.13): Wir führen den Beweis per Induktion nach k. Für $k=1$ ist

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(s) \;&=\; \frac{-(n-1)\big((n+1)-ns\big) + n\big(n-(n-1)s\big)}{(n+1-ns)^2} \\
&=\; \frac{-n^2+1+n(n-1)s-n(n-1)s+n^2}{(n+1-ns)^2} \\
&=\; \frac{1}{(n+1-ns)^2}.
\end{aligned}$$

Gelte nun (4.13) für k. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\varphi_n^{(k)}(s) \;&=\; \frac{k!\,n^{k-1}(k+1)n}{(n+1-ns)^{k+2}} \\
&=\; \frac{(k+1)!\,n^k}{(n+1-ns)^{k+2}}.
\end{aligned}$$

Zu (4.14): Wegen $\varphi_n(0) = \frac{n}{n+1}$ ist (4.14) die Taylorreihenentwicklung mit den Koeffizienten aus (4.13). $\square$

Beweis (von Satz 4.14) Es ist $\mathbf{P}[Z_n = 0] = \varphi_n(0)$, also

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbf{P}[Z_n > 0] \;=\; \lim_{n\to\infty} n\big(1-\varphi_n(0)\big) \;=\; \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \;=\; 1. \qquad \square$$

Beweis (von Satz 4.15) Wie im Beweis von Satz 4.14 ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[Z_n \geq tn \,|\, Z_n > 0] &= \frac{\mathbf{P}[Z_n \geq tn]}{\mathbf{P}[Z_n > 0]} \\
&= (n+1)\,\mathbf{P}[Z_n \geq tn] \\
&= (n+1) \sum_{k \geq tn} \mathbf{P}[Z_n = k] \\
&= (n+1) \sum_{k \geq tn} \frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{n}{n+1} \right)^k \\
&= \frac{1}{n} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\lceil tn \rceil}}{1 - \frac{n}{n+1}} \\
&= \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\lceil tn \rceil} \\
&\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-t}.
\end{aligned}$$

□

Kapitel 5

Gesetze der Großen Zahl und Zentraler Grenzwertsatz

Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte reelle Zufallsvariablen mit $\mathbf{Var}[X_i^2] \in (0, \infty)$. Wir betrachten

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

und fragen nach den „typischen" Werten, die S_n annimmt. Wir werden sehen, dass für große n die Werte von S_n nahe am Erwartungswert $\mathbf{E}[S_n] = n\mathbf{E}[X_1]$ konzentriert liegen. Jetzt stellt sich die Frage, wie nahe eigentlich „nahe am Erwartungswert" genau ist. Offenbar ist $\mathbf{Var}[S_n] = n\mathbf{Var}[X_1]$. Also ist für

$$S_n^* := \frac{S_n - \mathbf{E}[S_n]}{\sqrt{n\mathbf{Var}[X_1]}}$$

$\mathbf{Var}[S_n^*] = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies legt nahe, dass die typischen Fluktuationen von S_n um $\mathbf{E}[S_n]$ von der Größenordnung $\sqrt{n}$ sind. Wir werden sogar genauer sehen, dass die Verteilungen von S_n^* konvergieren.

5.1 Schwaches Gesetz der großen Zahl

Definition 5.1 *Seien $Y, Y_1, Y_2, \dots$ reelle Zufallsvariablen. Wir sagen, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***stochastisch gegen Y konvergiert****, in Formeln $Y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ stoch., falls*

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}[|Y_n - Y| > \varepsilon] = 0 \quad \textit{für alle } \ \varepsilon > 0. \tag{5.1}$$

Wir sagen, dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***fast sicher gegen Y konvergiert****, in Formeln: $Y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ f.s., falls*

$$\mathbf{P}\Big[\Big\{\omega : \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)\Big\}\Big] = 1. \tag{5.2}$$

Satz 5.2 *Gilt $Y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ f.s., so gilt $Y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ stochastisch. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Beweis Für $N \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \geq 0$ setze

$$A_{\varepsilon,N} := \big\{\omega : \, |Y_n(\omega) - Y(\omega)| \leq \varepsilon \ \text{ für alle } \ n \geq N\big\}.$$

Dann ist $A^*_\varepsilon := \bigcup_{N=1}^\infty A_{\varepsilon,N}$ messbar und $A_{\varepsilon,N} \uparrow A^*_\varepsilon$. Offenbar ist

$$B := \big\{\omega : \, Y(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega)\big\} \subset A^*_\varepsilon \qquad \text{für jedes } \ \varepsilon > 0.$$

Es gelte $Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ fast sicher. Dann gilt $\mathbf{P}[B] = 1$, also $\mathbf{P}[A^*_\varepsilon] = 1$ für jedes $\varepsilon > 0$ und damit $\mathbf{P}[A_{\varepsilon,N}] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Es folgt

$$\mathbf{P}[|Y_N - Y| \leq \varepsilon] \geq \mathbf{P}[A_{\varepsilon,N}] \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

für jedes $\varepsilon > 0$, also $Y_N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} Y$ stochastisch.

Seien nun $\Omega = [0,1]$ und $\mathbf{P} = \mathcal{U}_{[0,1]}$ die Gleichverteilung auf Ω. Für $k = 2^n + m$ mit $m \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ sei

$$Y_k := \mathbb{1}_{[m2^{-n},\,(m+1)2^{-n}]}.$$

Dann ist für $\varepsilon \in (0,1)$

$$\mathbf{P}[Y_k > \varepsilon] = 2^{-n} \leq \frac{2}{k} \longrightarrow 0, \quad \text{wenn } k \to \infty.$$

Also gilt $Y_k \to 0$ stochastisch. Andererseits gilt $\liminf_{k\to\infty} Y_k(\omega) = 0$ und $\limsup_{k\to\infty} Y_k(\omega) = 1$ für alle ω. Daher konvergiert (Y_k) nicht fast sicher. $\square$

Satz 5.3 *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, für die ein Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. Ferner seien $X, X_1, X_2, \ldots$ und $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ reelle Zufallsvariablen mit $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ stochastisch und $Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ stochastisch. Dann gelten*

(i)

$$X_n + Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X + Y \qquad \textit{stochastisch.}$$

(ii)

$$a_n X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} aX \qquad \textit{stochastisch.}$$

(iii) Gilt $X_n \to 0$ und ist (a_n) nur beschränkt (und nicht notwendigerweise konvergent), so gilt

$$a_n X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{stochastisch.}$$

Gilt sogar $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ f.s. und $Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ f.s., so gilt in (i)-(iii) jeweils die fast sichere Konvergenz.

Beweis Wir betrachten zunächst die fast sichere Konvergenz. Seien

$$A := \{\omega : \, X_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\}$$

und

$$B := \{\omega : \, Y_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y(\omega)\}.$$

Nach den elementaren Rechenregeln für Grenzwerte gelten nun $X_n(\omega) + Y_n(\omega) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega) + Y(\omega)$ und so weiter für jedes $\omega \in A \cap B$. Wegen $\mathbf{P}[A \cap B] = 1$ (nach Voraussetzung) folgen die Aussagen (i)–(iii).

Sei nun die stochastische Konvergenz betrachtet.

(i) Sei n so groß, dass $\mathbf{P}[|X_n - X| > \varepsilon/2] < \varepsilon/2$ und $\mathbf{P}[|Y_n - Y| > \varepsilon/2] < \varepsilon/2$. Nach der Dreiecksungleichung gilt dann

$$\mathbf{P}[|(X_n + Y_n) - (X + Y)| > \varepsilon] \leq \mathbf{P}[|X_n - X| > \varepsilon/2] + \mathbf{P}[|Y_n - Y| > \varepsilon/2] \leq \varepsilon.$$

Daher gilt $X_n + Y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X + Y$ stochastisch.

(ii) Sei $\bar{a} := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$ und $K < \infty$ so groß, dass

$$\mathbf{P}\Big[|X| > \frac{\varepsilon K}{2}\Big] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei N so groß, dass $|a_n - a| \leq \frac{1}{K}$ und $\mathbf{P}[\bar{a}|X_n - X| > \varepsilon/2] < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N$. Dann ist für $n \geq N$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[|a_n X_n - aX| > \varepsilon] &\leq \mathbf{P}[|a_n - a| \cdot |X| > \varepsilon/2] + \mathbf{P}[|a_n| \cdot |X_n - X| > \varepsilon/2] \\ &\leq \mathbf{P}[|X| > \varepsilon K/2] + \mathbf{P}[\bar{a} \cdot |X_n - X| > \varepsilon/2] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Also gilt (ii).

(iii) Dies geht analog zu (ii). □

Definition 5.4 *Seien $X_1, X_2, \ldots$ reelle Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1(\mathbf{P})$. Wir sagen, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem **schwachen Gesetz der großen Zahl** genügt, falls*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}[X_i]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{stochastisch.}$$

*Wir sagen, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem **starken Gesetz der großen Zahl** genügt, falls*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}[X_i]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{fast sicher.}$$

Satz 5.5 (Schwaches Gesetz der großen Zahl) *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unkorrelierte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ mit $V := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Var}[X_n] < \infty$. Dann genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einem schwachen Gesetz der großen Zahl. Es gilt sogar für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}[X_i])\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{V}{n\varepsilon^2} \quad \textit{für alle } \; n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Gilt speziell $\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{E}[X_1]$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}[X_1] \qquad \textit{stochastisch.}$$

Beweis Setze

$$S_n' := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbf{E}[X_i]).$$

Dann ist $\mathbf{E}[S'_n] = 0$ und nach der Bienaymé-Gleichung (Satz 3.25)

$$\mathbf{Var}[S'_n] \;= n^{-2} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}[X_i] \;\le\; \frac{V}{n}.$$

Nach der Chebyshev'schen Ungleichung (Satz 3.30) ist nun

$$\mathbf{P}[|S'_n| \ge \varepsilon] \;\le\; \frac{V}{n\varepsilon^2}. \qquad \square$$

Beispiel 5.6 (Weierstraß'scher Approximationssatz) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz existieren Polynome f_n vom Grad höchstens n, so dass

$$\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wobei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $C([0,1])$ bezeichnet.

Wir führen hier einen probabilistischen Beweis dieser Aussage durch. Für $n \in \mathbb{N}$ sei das Polynom f_n definiert durch

$$f_n(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{für } \; x \in [0,1].$$

Dieses Polynom heißt **Bernstein-Polynom** der Ordnung n.

Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Da f auf $[0,1]$ stetig ist, ist f sogar gleichmäßig stetig. Es existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| \;<\; \varepsilon \qquad \text{für alle } \; x,y \in [0,1] \; \text{ mit } \; |x-y| < \delta.$$

Sei nun $p \in [0,1]$ fest gewählt, und seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Ber}_p$, $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $S_n := X_1 + \ldots + X_n \sim b_{n,p}$ und deshalb

$$\mathbf{E}\big[f(S_n/n)\big] \;=\; \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbf{P}[S_n = k] \;=\; f_n(p).$$

Wir erhalten

$$\big|f(S_n/n) - f(p)\big| \;\le\; \varepsilon \;+\; 2\|f\|_\infty \, \mathbb{1}_{\{|\frac{1}{n}S_n - p| \ge \delta\}}$$

und daher (mit Satz 5.5 mit $V = p(1-p) \le \frac{1}{4}$)

$$\begin{aligned}
\big|f_n(p) - f(p)\big| \;&\le\; \mathbf{E}\big[\big|f(S_n/n) - f(p)\big|\big] \\
&\le\; \varepsilon + 2\|f\|_\infty \, \mathbf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \ge \delta\right] \\
&\le\; \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2},
\end{aligned}$$

für alle $p \in [0,1]$. Also gilt $\|f_n - f\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5.2 Große Abweichungen

Wir wollen in einem Spezialfall die Wahrscheinlichkeit für Abweichungen besser quantifizieren als in Satz 5.5.

Satz 5.7 (Große Abweichungen) *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte reelle Zufallsvariablen. Es gebe ein $\alpha > 0$, so, dass $\mathbf{E}[e^{|\alpha X_1|}] < \infty$. Seien $m := \mathbf{E}[X_1]$ und $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C > 0$ mit der Eigenschaft*

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| > \varepsilon\right] \;\le\; e^{-Cn} \quad \textit{für} \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Beweis Ohne Einschränkung sei $m = 0$. Wir zeigen nun

$$\mathbf{P}\Big[\frac{1}{n}S_n > \varepsilon\Big] \le e^{-Cn} \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N}, \tag{5.5}$$

für ein $C > 0$. Die andere Ungleichung (für $-\frac{1}{n}S_n$) folgt analog (mit einem eventuell anderen Wert von C).

Wir wählen ein $\beta \in (0, \alpha/2)$ und erhalten mit der Markov'schen Ungleichung (Satz 3.30 mit $f(t) = e^{\beta t}$) für $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left[\frac{1}{n}S_n > \varepsilon\right] \;&=\; \mathbf{P}[X_1 + \ldots + X_n > \varepsilon n] \\
&=\; \mathbf{P}\big[e^{\beta(X_1+\ldots+X_n)} > e^{\beta\varepsilon n}\big] \\
&\le\; \mathbf{E}\big[e^{\beta(X_1+\ldots+X_n)}\big]\, e^{-\beta\varepsilon n} \\
&=\; \mathbf{E}\big[e^{\beta X_1}\big]^n\, e^{-\beta\varepsilon n} \;<\; \infty \\
&=:\; \exp(-nI_{\beta,\varepsilon}),
\end{aligned}$$

wobei $I_{\beta,\varepsilon} = \beta\varepsilon - \log(\mathbf{E}[e^{\beta X_1}])$. Wir müssen nun zeigen, dass für hinreichend kleines $\beta > 0$ gilt: $I_{\beta,\varepsilon} > 0$.

Wir machen die folgenden Vorbetrachtungen. Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung liefert

$$\big|e^x - 1 - x\big| \;\le\; \frac{1}{2}e^{|x|}\, x^2 \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Eine einfache Kurvendiskussion liefert

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2\, e^{-|x|} \;=\; \frac{4}{e^2}.$$

Setzen wir $c := \dfrac{16}{\alpha^2 e^2}$, so gilt also

$$x^2 \;\le\; c\, e^{\alpha|x|/2} \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Setzen wir nun noch $\tilde{c} := \frac{1}{2}c\,\mathbf{E}\big[e^{\alpha|X_1|}\big]$, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{\beta X_1}] \;&=\; 1 + \underbrace{\mathbf{E}[\beta X_1]}_{=0} + \mathbf{E}\big[e^{\beta|X_1|} - 1 - \beta X_1\big] \\
&\le\; 1 + \frac{\beta^2}{2}\,\mathbf{E}\big[X_1^2\, e^{\beta|X_1|}\big] \\
&\le\; 1 + \frac{\beta^2}{2}c\,\mathbf{E}\big[e^{\alpha|X_1|/2}\, e^{\beta X_1}\big] \\
&\le\; 1 + \beta^2\Big(\frac{1}{2}c\,\mathbf{E}\big[e^{\alpha|X_1|}\big]\Big) \\
&=\; 1 + \tilde{c}\,\beta^2.
\end{aligned}$$

Also ist für $\beta < \varepsilon/\tilde{c}$ (wegen $\log(1+x) \le x$ für $x > -1$)

$$I_{\beta,\varepsilon} \;\ge\; \beta\varepsilon - \log\big(1+\tilde{c}\,\beta^2\big) \;\ge\; \varepsilon\beta - \tilde{c}\,\beta^2 \;>\; 0. \qquad \square$$

Bemerkung 5.8 In manchen Fällen ist es möglich, das bestmögliche C in Abhängigkeit von ε genau auszurechnen. Man bekommt dann Aussagen von dem Typ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n > a\Big] \;=\; -I(a) \quad \text{für } a > \mathbf{E}[X_1]$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n < a\Big] \;=\; -I(a) \quad \text{für } a < \mathbf{E}[X_1].$$

Eine solche Aussage heißt **Prinzip der großen Abweichung** für (S_n) mit Ratenfunktion I. $\diamond$

Beispiel 5.9 Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \sim \mathcal{N}_{0,1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[e^{\alpha|X_1|}] \;&=\; 2(2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty e^{\alpha x}\, e^{-x^2/2}\, dx \\
&=\; 2\, e^{\alpha^2/2} \int_0^\infty (2\pi)^{-1/2}\, e^{-(x-\alpha)^2/2}\, dx \\
&\le\; 2\, e^{\alpha^2/2} \;<\; \infty.
\end{aligned}$$

Also sind die Voraussetzungen von Satz 5.7 erfüllt. Wir können die Zahl C in Abhängigkeit von ε in diesem Fall genau quantifizieren. Sei $\varphi(t) := (2\pi)^{-1/2} e^{-t^2/2}$. Wir bemerken (Übung!), dass für $x > 0$ gilt

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\, \varphi(x) \;\le\; \mathbf{P}[X_1 \ge x] \;\le\; \frac{1}{x}\, \varphi(x). \tag{5.8}$$

Es gilt nun (wegen $n^{-1/2} S_n \overset{d}{=} X_1 \sim \mathcal{N}_{0,1}$) für $n > a^2$

$$\mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n > a\Big] \;=\; \mathbf{P}[S_n > an] \;=\; \mathbf{P}\big[X_1 > a\sqrt{n}\,\big] \begin{cases} \le\; a^{-1}\, n^{-1/2}\, \varphi\big(a\sqrt{n}\big) \\ \ge\; \frac{1}{2}\, a^{-1}\, n^{-1/2}\, \varphi\big(a\sqrt{n}\big). \end{cases}$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n > a\Big] \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, \log \varphi\big(a\sqrt{n}\,\big) \;=\; -\frac{a^2}{2}. \qquad \diamond$$

Beispiel 5.10 Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt, $X_1 \sim \mathrm{Poi}_\lambda$ für ein $\lambda > 0$. Dann ist

$$\mathbf{E}\big[e^{\alpha|X_1|}\big] \;=\; \sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda e^\alpha)^k}{k!} \;=\; e^{-\lambda}\, e^{\lambda e^\alpha} \;<\; \infty \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aus Beispiel 3.32 wissen wir, dass (wegen $S_n \sim \mathrm{Poi}_{\lambda n}$) für $a > \lambda = \mathbf{E}[X_1]$ gilt

$$\mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n > a\Big] \;=\; \mathbf{P}[S_n > an] \;\le\; \exp\Big(na - n\lambda - na \log\Big(\frac{a}{\lambda}\Big)\Big).$$

Also gilt

$$\frac{1}{n} \log \mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n > a\Big] \;\le\; a - \lambda - a\log(a/\lambda). \tag{5.9}$$

Für die umgekehrte Ungleichung benötigen wir die **Stirling-Formel** (siehe zum Beispiel das Buch von Krengel), die wir im nächsten Abschnitt in noch genauerer Form zitieren (siehe Satz 5.15),

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \tag{5.10}$$

wobei wir $a_n \sim b_n$ schreiben für $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\mathbf{P}\left[\frac{1}{n}S_n > a\right]\right) &\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\mathbf{P}\left[S_n = \lfloor an\rfloor + 1\right]\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(e^{-\lambda n}\,\frac{(\lambda n)^{\lfloor an\rfloor+1}}{(\lfloor an\rfloor+1)!}\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(e^{-\lambda n}\,\frac{(\lambda n)^{an}}{(an/e)^{an}}\right)\\
&= \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(e^{-\lambda n}\,\left(\frac{\lambda e}{a}\right)^{an}\right)\\
&= -\lambda + a\log\left(\frac{\lambda e}{a}\right)\\
&= -\lambda + a - a\log\left(\frac{a}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (5.9) erhalten wir für $a > \lambda$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbf{P}\left[\frac{1}{n}S_n > a\right] = -I(a)$$

mit

$$I(a) = a - \lambda + a\log(a/\lambda). \qquad \diamond$$

5.3 Starkes Gesetz der großen Zahl

Wir wollen in diesem Abschnitt ein starkes Gesetz der großen Zahl (GGZ) in einem einfachen Fall beweisen. Zum Aufwärmen zeigen wir, wie man aus dem Satz über große Abweichungen (Satz 5.7) ein starkes Gesetz der großen Zahl herleiten kann, jedenfalls für unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, die ein exponentielles Moment besitzen. Danach wollen wir das starke Gesetz der großen Zahl für identisch verteilte, quadratintegrierbare und unkorrelierte Zufallsvariablen beweisen.

Satz 5.11 (Starkes GGZ bei exponentiellen Momenten) *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte reelle Zufallsvariablen. Es gebe ein $\alpha > 0$, so dass $\mathbf{E}[e^{|\alpha X_1|}] < \infty$. Dann erfüllt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das starke Gesetz der großen Zahl:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{E}[X_1] \quad \textit{fast sicher}.$$

Beweis Ohne Einschränkung sei $\mathbf{E}[X_1] = 0$. Sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, und sei für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_\varepsilon > 0$ wie in Satz 5.7 gewählt mit

$$\mathbf{P}\left[\frac{1}{n}S_n > \varepsilon\right] \leq e^{-C_\varepsilon n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n > \varepsilon\Big] \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} e^{-C_\varepsilon n} \;<\; \infty.$$

Nach dem Borel-Cantelli Lemma gilt also

$$\mathbf{P}\Big[\frac{1}{n} S_n > \varepsilon \;\text{ für unendlich viele }\; n\Big] \;=\; 0.$$

Daher ist

$$\mathbf{P}\Big[\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\Big) > \varepsilon\Big] \;=\; 0 \qquad \text{für alle } \;\varepsilon > 0.$$

Also gilt

$$\mathbf{P}\left[\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n\right) \leq 0\right] = \mathbf{P}\left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n \leq \frac{1}{k}\right\}\right] = 1.$$

Mit demselben Argument für $-S_n$ erhalten wir

$$\mathbf{P}\left[\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} S_n \geq 0\right] = 1,$$

also $\frac{1}{n} S_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ fast sicher. □

Der vorige Satz braucht recht starke Annahmen an die Zufallsvariablen, um das starke Gesetz der großen Zahl nachzuweisen. Der Vorteil dabei ist, dass der Beweis des Satzes halbwegs simpel ist. Der folgende Satz benutzt sehr viel schwächere Annahmen und hat einen komplizierteren Beweis. Man kommt mit noch geringeren Voraussetzungen aus, allerdings wollen wie die Sache hier nicht zu weit ins Detail verfolgen.

Satz 5.12 (Starkes GGZ für unkorrelierte Zufallsvariablen) *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unkorrelierte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2(\mathbf{P})$ mit $V := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{Var}[X_n] < \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \mathbf{E}[X_i]\big) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{fast sicher.}$$

Beweis Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathbf{E}[X_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen wieder $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ und $S_n' = \frac{1}{n} S_n$.

Schritt 1. Wir zeigen zunächst nur die fast sichere Konvergenz von (S_n') entlang einer Teilfolge, nämlich

$$S_{n^2}' \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{fast sicher.} \tag{5.11}$$

Nach Satz 5.5 gilt $\mathbf{P}[|S_{n^2}'| \geq \varepsilon] \leq \frac{V}{n^2\,\varepsilon^2}$. Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}[|S_{n^2}'| \geq \varepsilon] < \infty.$$

Wie im Beweis von Satz 5.11 erhalten wir (5.11).

Schritt 2. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ wählen wir $n = n(m)$ so, dass $n^2 \leq m < (n+1)^2$. Wir wollen nun S_m' mit $S_{n(m)^2}'$ vergleichen. Die Chebyshev'sche Ungleichung liefert

$$\mathbf{P}\big[|S_m - S_{n^2}| > \varepsilon n^2\big] \;\leq\; \varepsilon^{-2}\, n^{-4}\, \mathbf{Var}\left[\sum_{i=n^2+1}^{m} X_i\right] \;\leq\; \frac{(m-n^2)V}{\varepsilon^2 n^4}.$$

Dies können wir über m summieren und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big[|S_m - S_{n(m)^2}| > \varepsilon\, n(m)^2\Big] \;&\leq\; \frac{V}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n^2}^{(n+1)^2-1}\frac{m-n^2}{n^4}\\ &=\; \frac{V}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{n^4}\\ &=\; \frac{V}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2n+1)}{n^4} \;<\; \infty.\end{aligned}$$

Wieder liefert das Borel-Cantelli Lemma

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{S_m}{n(m)^2} - S'_{n(m)^2}\right| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\right] = 1,$$

das heißt

$$Y_m := \frac{S_m}{n(m)^2} - S'_{n(m)^2} \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Nach (5.11) gilt

$$Z_m := S'_{n(m)^2} \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Also gilt nach Satz 5.3(i)

$$|S'_m| \leq \left|\frac{S_m}{n(m)^2}\right| = |Y_m + Z_m| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{fast sicher.}$$

□

Beispiel 5.13 Für $p \in \{2,3,4,\dots\}$ und $x \in (0,1]$ sei $X_i^p(x)$ die i-te Ziffer der nicht-abbrechenden p-adischen Entwicklung von x ($i \in \mathbb{N}$). Wie häufig taucht eine gegebene Ziffer q in der p-adischen Entwicklung einer „typischen" Zahl x auf? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir sie erst einmal korrekt stellen, also klären, was „typisch" heißen soll. Seien dazu $\Omega = [0,1]$ und $\mathbf{P} = \mathcal{U}_{[0,1]}$ die Gleichverteilung. Für $q \in \{0,1,\dots,p-1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$R_n^{p,q}(x) = \frac{1}{n}\#\big\{i \leq n:\; X_i^p(x) = q\big\}$$

die relative Häufigkeit der Ziffer q unter den ersten n Ziffern der p-adischen Entwicklung von x. Unsere Frage lautet nun: Konvergiert $R_n^{p,q}(x)$ für $n \to \infty$, wenn ja wogegen und in welchem Sinne (stochastisch, fast sicher)?

In Beispiel 2.32 hatten wir gesehen, dass $(X_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt sind, nämlich Bernoulli mit Parameter $\frac{1}{2}$. Das gleiche Argument wie dort zeigt, dass für festes p die Zufallsvariablen $(X_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig sind und identisch verteilt mit $\mathbf{P}[X_n^p = q] = \frac{1}{p}$ für jedes $q \in \{0,\dots,p-1\}$. Speziell ist für $Y_n^{p,q} := \mathbb{1}_{\{X_n^p = q\}}$ die Familie $(Y_n^{p,q})_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und $Y_n^{p,q} \sim \mathrm{Ber}_{1/p}$. Wegen $R_n^{p,q} = \frac{1}{n}(Y_1^{p,q} + \ldots + Y_n^{p,q})$ folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen (Satz 5.12)

$$R_n^{p,q} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p} \quad \text{fast sicher.}$$

Seien

$$A^{p,q} := \left\{x \in (0,1]:\; \lim_{n\to\infty} R_n^{p,q}(x) = \frac{1}{p}\right\}$$

und
$$A := \bigcap_{p=2}^{\infty} \bigcap_{q=0}^{p-1} A^{p,q}.$$
Eine Zahl $x \in A$ heißt **normale Zahl**. Wegen $\mathbf{P}[A_{p,q}] = 1$ ist $\mathbf{P}[A] = 1$. Wir haben also den folgenden Satz gezeigt: $\diamond$

Satz 5.14 (Borel'sches Gesetz über normale Zahlen) *Unter der Gleichverteilung $\mathbf{P} = \mathcal{U}_{[0,1]}$ auf $[0,1]$ hat die Menge der normalen Zahlen Wahrscheinlichkeit 1. Insbesondere gibt es mehr als abzählbar viele normale Zahlen.*

5.4 Zentraler Grenzwertsatz

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst eine Approximationsformel für die Binomialverteilung angeben – den so genannten Satz von de Moivre und Laplace. Hierfür benötigen wir eine asymptotische Formel für die Fakultät großer Zahlen n. Danach werden wir Anwendungen sehen sowie einen allgemeineren Approximationssatz für Summen unabhängiger identisch verteilter quadratintegrierbarer Zufallsvariablen, den so genannten Zentralen Grenzwertsatz.

Wir beginnen damit, dass wir die Stirling-Formel in der folgenden Form ohne Beweis angeben. Einen Beweis findet man beispielsweise in dem Buch von Krengel.

Satz 5.15 (Stirling-Formel) *Sei $\eta_n := \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*
$$n! = \eta_n\, e^{\varrho(n)}, \tag{5.12}$$
wobei
$$\frac{1}{12n+1} \;<\; \varrho(n) \;<\; \frac{1}{12n} \quad \textit{für alle}\;\; n \in \mathbb{N}.$$

Sind (a_n) und (b_n) reelle Folgen, so schreiben wir $a_n \sim b_n$, falls $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Es gilt also speziell
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{5.13}$$
Dies hatten wir schon in Beispiel 5.10 benötigt.

Seien nun $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen, $X \sim \mathrm{Ber}_p$ für ein $p \in (0,1)$ und $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Zunächst betrachten wir zur Vereinfachung der Rechnung nur den Fall $p = \frac{1}{2}$. Dann ist $\mathbf{E}[S_n] = \frac{n}{2}$ und für eine Folge (a_n) gilt
$$\mathbf{P}\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > a_n\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{falls } a_n/\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \\ 1, & \text{falls } a_n/\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases} \tag{5.14}$$
Der erste Teil folgt hierbei direkt aus der Chebyshev'schen Ungleichung (Satz 3.30):
$$\mathbf{P}\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| > a_n\right] \;\le\; \frac{\mathbf{Var}[S_n]}{a_n^2} \;=\; \frac{n}{4a_n^2}.$$
Für den zweiten Teil der Aussage beachte man $\mathbf{P}[S_n = k] = \binom{n}{k}2^{-n}$. Die Abbildung $k \mapsto \binom{n}{k}$ nimmt ihren maximalen Wert an bei $k = \lfloor n/2 \rfloor$, und es gilt nach der Stirling-Formel
$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{-n} \;\sim\; \frac{2^{-n}\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n}{(\pi n)\,(n/2e)^n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi n/2}}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big[\Big|S_n - \frac{n}{2}\Big| \le a_n\Big] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}:\,|k-(n/2)|\le a_n} \binom{n}{k} 2^{-n} \\
&\le (2a_n+1)\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} 2^{-n} \\
&\sim \frac{2a_n+1}{\sqrt{\pi n/2}}, \qquad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Für $a_n/\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ geht dies nach 0, d.h., es gilt also der zweite Teil in (5.14).

Insgesamt haben wir jetzt heraus gefunden, dass die Fluktuationen von S_n um den Erwartungswert $\frac{n}{2}$ tatsächlich von der Größenordnung $\sqrt{n}$ sind. Wir wollen jetzt zusätzlich zur Größe auch noch die **Gestalt** der Fluktuationen untersuchen. Dazu definieren wir die Dichte der Standardnormalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \text{für } x\in\mathbb{R}$$

sowie deren Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) := \mathcal{N}_{0,1}((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt \qquad \text{für } x\in\mathbb{R}.$$

Um den folgenden Satz zu formulieren, führen wir eine Sprechweise für die asymptotische Gleichheit von Folgen ein. Seien $C_n \subset \mathbb{N}_0$, $n\in\mathbb{N}$ und $(a_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(b_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$, $k\in\mathbb{N}$, positive reelle Folgen. Wir sagen, dass $a_n(k)\sim b_n(k)$, $n\to\infty$ gleichmäßig in $k\in C_n$ gilt (in Worten: „$a_n(k)$ ist asymptotisch gleich $b_n(k)$ für $n\to\infty$“), falls

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in C_n}\left|\frac{a_n(k)}{b_n(k)} - 1\right| = 0,$$

oder, äquivalent, falls

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in C_n}\big|\log(a_n(k)) - \log(b_n(k))\big| = 0.$$

Sei $p\in(0,1)$ und sei

$$x_n(k) := \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Wir wenden diese Sprechweise für $c>0$ an auf

$$\begin{aligned}
C_n := C_n(c) &= \big\{k\in\mathbb{N}_0 : |x_n(k)|\le c\big\} \\
&= \Big\{k\in\mathbb{N}_0 : pn - c\sqrt{np(1-p)} \;\le\; k \;\le\; pn + c\sqrt{np(1-p)}\Big\}.
\end{aligned}$$

Der folgende Approximationssatz für die Binomialverteilung $b_{n,p}$ geht auf de Moivre (1733) für den Fall $p=\frac{1}{2}$ und auf Laplace (1812) für den allgemeinen Fall $p\in(0,1)$ zurück.

Satz 5.16 *Sei $p\in(0,1)$. Dann gilt für jedes $c>0$ gleichmäßig in $k\in C_n(c)$*

$$b_{n,p}(\{k\}) \sim \frac{\varphi(x_n(k))}{\sqrt{np(1-p)}} \qquad \textit{für } n\to\infty. \tag{5.15}$$

Beweis Man beachte, dass $\min(C_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Daher gilt nach der Stirling'schen Formel gleichmäßig in $k \in C_n$

$$\begin{aligned} b_{n,p}(\{k\}) &= p^k\,(1-p)^{n-k}\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &\sim p^k\,(1-p)^{n-k}\,\frac{(n/e)^n}{(k/e)^k\,((n-k)/e)^{n-k}}\sqrt{\frac{2\pi n}{2\pi k\,\cdot\,2\pi(n-k)}} \\ &\sim \left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \text{für } n\to\infty. \end{aligned}$$

Nun ist ebenfalls gleichmäßig in $k \in C_n$

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Es reicht also zu zeigen, dass gleichmäßig in $k \in C_n$ gilt

$$\chi(n,k) := \left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k} \sim e^{-x_n(k)^2/2} \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Setze

$$f(t) := \left(t\log\left(\frac{t}{p}\right) + (1-t)\log\left(\frac{1-t}{1-p}\right)\right) \qquad \text{für } t\in(0,1).$$

Dann ist

$$\log\big(\chi(n,k)\big) = -nf(k/n).$$

Wir entwickeln f in eine Taylorreihe um p:

$$\begin{aligned} f(p) &= 0 \\ f'(p) &= 0 \\ f''(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$f(t) = \frac{1}{2p(1-p)}(t-p)^2 + R(t),$$

wobei für die Abschätzung des Restglieds für jedes $\varepsilon > 0$ ein $D_\varepsilon < \infty$ existiert mit

$$|R(t)| \le D_\varepsilon (t-p)^3 \qquad \text{für alle } t \text{ mit } |t-p| < \varepsilon.$$

Für $n > \frac{c^2 p(1-p)}{\varepsilon^2}$ gilt (wegen $\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \frac{c\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} < \varepsilon$)

$$\begin{aligned} &\sup_{k:\,|x_n(k)|\le c}\left|\log\chi(n,k) + \frac{x_n(k)^2}{2}\right| \\ &\quad\le \frac{1}{2}\sup_{k:\,|x_n(k)|\le c}\Bigg|\underbrace{\frac{n}{p(1-p)}\left(\frac{k}{n}-p\right)^2 - x_n(k)^2}_{=0}\Bigg| + nD_\varepsilon\frac{c^3(p(1-p))^{3/2}}{n^{3/2}}. \\ &\quad= D'\,n^{-1/2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

für $D' = D_\varepsilon c^3 (p(1-p))^{3/2}$. Dies aber impliziert (5.15) und beendet den Beweis. □

Als Folgerung aus Satz 5.16 erhalten wir:

Korollar 5.17 *Seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängig und $X_i \sim \mathrm{Ber}_p$ für ein $p \in (0,1)$. Seien $S_n := X_1 + \dots + X_n$ und*

$$S_n^* := \frac{S_n - pn}{\sqrt{np(1-p)}}\,.$$

Dann gilt für $-\infty \le a < b \le \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big[S_n^* \in [a,b]\big] \;=\; \Phi(b) - \Phi(a) \;=\; \mathcal{N}_{0,1}([a,b]). \tag{5.16}$$

Beweis Seien zunächst $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big[S_n^* \in [a,b]\big] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k:\, x_n(k)\in[a,b]} b_{n,p}(\{k\}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k:\, x_n(k)\in[a,b]} \frac{\varphi(x_n(k))}{\sqrt{np(1-p)}} \\
&= \int_a^b \varphi(x)\,dx \;=\; \Phi(b) - \Phi(a),
\end{aligned}$$

denn die Summe ist eine approximierende Riemann-Summe für das Integral. Die Fälle $a = -\infty$ und $b = \infty$ bleiben als Übung. □

Beispiel 5.18 (Korrekturterme) Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $k < l$. Wir wollen $b_{n,p}(\{k,\dots,l\})$ durch die Normalverteilung approximieren. Verwenden wir Satz 5.16, so erhalten wir

$$b_{n,p}(\{k,\dots,l\}) \;\approx\; \sum_{i=k}^{l} \frac{\varphi\left(\frac{i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Verwenden wir hingegen Korollar 5.17 mit $a = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ und $b = \frac{l-np}{\sqrt{np(1-p)}}$, so erhalten wir die einfachere Formel

$$b_{n,p}(\{k,\dots,l\}) \;\approx\; \Phi(b) - \Phi(a) \;=\; \Phi\left(\frac{l-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \tag{5.17}$$

Die Wahl von a und b war etwas willkürlich, denn für jedes a_x mit $a_x = \frac{k-x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ und jedes b_y mit $b_y = \frac{l+y-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ für $x, y \in [0,1)$ ist

$$\big\{S_n^* \in [a_x, b_y]\big\} \;=\; \big\{k - x \le S_n \le l + y\big\} \;=\; \big\{S_n \in \{k,\dots,l\}\big\},$$

also $b_{n,p}(\{k,\dots,l\}) \approx \Phi(b_y) - \Phi(a_x)$. Eine bessere Annäherung an den genauen Wert erhält man meist, statt mit $x = y = 0$ mit den Werten $x = y = \frac{1}{2}$. Wir nennen daher die Approximation

$$b_{n,p}(\{k,\dots,l\}) \;\approx\; \Phi\left(\frac{l+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \tag{5.18}$$

die Normalapproximation der Binomialverteilung **mit Korrekturtermen**. Die Approximation in (5.17) heißt entsprechend die Normalapproximation ohne Korrekturterme. ◇

Beispiel 5.19 (Wahlprognose) Bei einer Wahl erhält Kandidat A einen unbekannten Anteil $p \in (0,1)$ der Stimmen. Um den Wert von p zu ermitteln, werten wir die ersten n Wahlzettel aus. Wie groß sollte n sein, damit die Wahrscheinlichkeit eines Irrtums von mehr als einem Prozentpunkt nicht größer als 0.05 ist?

Wenn wir n Zettel auswerten, dann bekommen wir S_n Stimmen für den Kandidaten A, und S_n ist binomialverteilt mit Parametern n und p. Dies gilt jedenfalls dann, wenn wir die Anzahl der abgegebenen Stimmen als so groß annehmen können, dass n dagegen vernachlässigbar ist. Sei A das Ereignis $A := \{|\frac{1}{n}S_n - p| > 0.01\}$. Dann soll $\mathbf{P}[A] \leq 0.05$ gelten, also (mit der Normalapproximation ohne Korrekturterme)

$$\begin{aligned} 1 - 0.05 \;&\leq\; \mathbf{P}\left[-\frac{0.01\,n}{\sqrt{np(1-p)}} \;\leq\; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \;\leq\; \frac{0.01\,n}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \\ &\approx\; \Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-0.01\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \\ &=\; 2\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1. \end{aligned}$$

(Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass $\Phi(x) + \Phi(-x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-x} \varphi(x)\,dx = 1 + \int_0^x \varphi(x)\,dx + \int_0^{-x} \varphi(x)\,dx = 1$.)

Wir wollen also n bestimmen mit $\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \approx 0.975$. Die Werte von Φ sind tabelliert, siehe Anhang A.1. Der Tabelle entnehmen wir, dass $\Phi(1.96) \approx 0.975$. Also sollte $n \approx p(1-p) \cdot 10\,000 \cdot (1.96)^2$ ausreichen. Da wir keine Vorabinformation über den Wert von p besitzen, müssen wir mit dem schlechtesten Fall rechnen, nämlich mit $p(1-p) = \frac{1}{4}$. Es folgt, dass wir $n = 10\,000 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1.96)^2 = 9604$ Zettel auswerten müssen.

Eine exakte Rechnung mit den Binomialkoeffizienten zeigt, dass in der Tat schon $n = 9600$ ausreicht, denn

$$\mathbf{P}\left[\left|S_{9600} - \frac{9600}{2}\right| > 96\right] \;=\; 1 - \sum_{k=4704}^{4896} \binom{9600}{k} 2^{-9600} \;=\; 0.04885587908046\ldots \;<\; 0.05.$$

Andererseits reichen $n = 9599$ Stimmzettel schon nicht mehr aus, denn

$$\mathbf{P}\left[\left|S_{9599} - \frac{9599}{2}\right| > 95.99\right] \;=\; 1 - \sum_{k=4704}^{4895} \binom{9599}{k} 2^{-9599} \;=\; 0.05002593084878\ldots \;>\; 0.05. \quad \diamond$$

Definition 5.20 (Schwache Konvergenz) *Seien $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, \ldots$. Wir sagen: $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***konvergiert schwach*** *gegen μ, in Formeln $\mu_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu$ oder $\mu = \mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} \mu_n$, falls*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen F stetig ist.

Bemerkung 5.21 Der Begriff der schwachen Konvergenz, den wir hier beschrieben haben, stimmt mit dem Begriff der schwachen Konvergenz für Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$, den wir in Lemma 4.5 beschrieben haben, überein. Dort hieß (Charakterisierung (ii)) eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathbb{N}_0$, falls $\mu_n(\{0,\ldots,N\}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(\{0,\ldots,N\})$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Für die Verteilungsfunktionen F_n heißt dies $F_n(N) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(N)$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Wegen $F_n(x) = F_n(\lfloor x \rfloor)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt, dass $F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $\mu = \mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} \mu_n$ im Sinne der Definition 5.20.

Gelte nun andererseits $F_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x)$ in allen Stetigkeitspunkten x von F. Offenbar ist F stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Speziell ist F stetig in jedem Punkt $N + \frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{N}_0$. Also gilt

$$\mu_n(\{N\}) = F_n\Big(N + \frac{1}{2}\Big) - F_n\Big(N - \frac{1}{2}\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F\Big(N + \frac{1}{2}\Big) - F\Big(N - \frac{1}{2}\Big) = \mu(\{N\}).$$

Also ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen μ im Sinne von Lemma 4.5 (Charakterisierung (i)). $\diamond$

Satz 5.22 *Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ reelle Zufallsvariablen mit $X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ stochastisch. Dann gilt*

$$\mathbf{P}_{X_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}_X \quad \textit{schwach.}$$

Beweis Seien F, F_1, $F_2, \ldots$ die Verteilungsfunktionen von X, X_1, $X_2, \ldots$. Sei x eine Stetigkeitsstelle von F. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|F(t) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t \in (x - \delta, x + \delta)$. Für n hinreichend groß ist $\mathbf{P}[|X_n - X| \geq \delta] < \frac{\varepsilon}{2}$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[X_n \leq x] &\leq \mathbf{P}[X_n \leq x,\, |X_n - X| < \delta] + \mathbf{P}[|X_n - X| \geq \delta] \\ &\leq \mathbf{P}[X \leq x + \delta] + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq F(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir haben also $\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x)$. Die andere Ungleichung folgt analog. $\square$

Wir können nun Korollar 5.17 folgendermaßen umformulieren:

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und $X_i \sim \mathrm{Ber}_p$ für ein $p \in (0,1)$. Seien $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ und

$$S_n^* := \frac{S_n - pn}{\sqrt{np(1-p)}}\,.$$

Dann gilt

$$\mathbf{P}_{S_n^*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}_{0,1} \qquad \text{schwach.} \tag{5.19}$$

Diese Aussage kann man auch zeigen, wenn man für die einzelnen X_i nicht mehr die Bernoulli-Verteilung fordert, sondern lediglich, dass sie in $\mathcal{L}^2$ liegen. Wir führen hier den Beweis nicht, sondern verweisen auf die Bücher von Krengel [10] und von Georgii [7], sowie auf [9, Satz 15.37]. Im zweiten Teil des Stochastik-Zyklus' kommt ein (nicht-elementarer) Beweis des Satzes mit Hilfe von Fourier Transformationen.

Satz 5.23 (Zentraler Grenzwertsatz) *Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige identisch verteilte reelle Zufallsvariablen mit $\sigma^2 := \mathbf{Var}[X_i] \in (0,\infty)$. Sei*

$$S_n^* := \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}} \sum_{i=1}^{n} \big(X_i - \mathbf{E}[X_i]\big).$$

Dann gilt

$$\mathbf{P}_{S_n^*} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}_{0,1} \qquad \textit{schwach.}$$

Dieser Satz besagt also, dass die Fluktuationen von S_n um $\mathbf{E}[S_n]$ von der Größe $\sqrt{\sigma^2\, n}$ sind *und* die Gestalt einer Normalverteilung haben. Dabei ist diese Gestalt unabhängig von der Art der zu Grunde liegenden

Zufallsvariablen, solange sie quadratintegrabel sind. Der Normalverteilung kommt damit als Grenzverteilung eine ganz besondere Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu. Dies wird auch deutlich durch die im Folgenden besprochene Fixpunkteigenschaft.

Korollar 5.24 *Seien X und Y unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{Var}[X] = \mathbf{Var}[Y] = \sigma^2 \in (0,\infty)$. Ferner gebe es ein $\beta > 0$ mit*

$$X + Y \stackrel{d}{=} \beta X .$$

Dann ist $\beta = \sqrt{2}$ und es gilt $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y = \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$.

Beweis Aus $\beta^2 \mathbf{Var}[X] = \mathbf{Var}[X+Y] = 2\,\mathbf{Var}[X]$ folgt $\beta = \sqrt{2}$.

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_X$, $i \in \mathbb{N}$. Seien S_n und S_n^* wie oben. Dann ist $S_2 \stackrel{d}{=} \sqrt{2}X$ nach Voraussetzung. Nun ist aber auch $S_4 - S_2 = X_3 + X_4 \stackrel{d}{=} \sqrt{2}X$. Ferner sind $X_1 + X_2$ und $X_3 + X_4$ unabhängig, also gilt $S_4 \stackrel{d}{=} \sqrt{2}(X+Y) \stackrel{d}{=} 2X$. Iterativ erhält man

$$S_{2^n} \stackrel{d}{=} 2^{n/2} X,$$

also

$$S_{2^n}^* \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}}\, X.$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz gilt aber $\mathbf{P}_{S_{2^n}^*} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}_{0,1}$ schwach. Also ist $\mathbf{P}_X = \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$. □

Kapitel 6

Schätzen von Parametern

In diesem Kapitel werden zunächst grundsätzliche Fragestellungen und Antwortmöglichkeiten der Statistik besprochen. Danach wird die Methode der Parameterschätzung genauer untersucht. In den folgenden Kapiteln wird auf Konfidenzintervalle und Tests eingegangen.

6.1 Einführendes Beispiel und Begriffsbildung

Beispiel 6.1 Eine Süßwarenfirma stellt aus Schokolade hohle Rotationsovaloide (SRO) her, die sie mit Kleinodien der Kunststoffindustrie füllt. Damit sie diese Produkte überhaupt verkaufen kann, wirbt sie damit, dass „im Mittel" in jedem siebten SRO eine Plastikfigur eines rothaarigen Kobolds stecke.

Sie misstrauen den Angaben der Firma und kaufen nun n SROs, um die Anzahl der Kobolde festzustellen. Angenommen, dass x die Anzahl der SROs mit Kobold in der Stichprobe ist. Was machen Sie jetzt mit den gewonnenen Daten?

(i) *Punktschätzung.* Das einfachste und ein plausibles Vorgehen ist es zu sagen, dass $\frac{x}{n}$ die wirkliche Wahrscheinlichkeit ist, in einem SRO einen Kobold zu finden. Dies wäre ein **Schätzung** der wahren Wahrscheinlichkeit.

(ii) *Intervallschätzung.* Das Vorgehen in (i) lässt außer Acht, dass die beobachtete Anzahl x natürlich fehlerbehaftet ist. Wenn man weitere n SROs kauft, wird man im Allgemeinen eine andere Anzahl x' von Kobolden finden. Man möchte also vielleicht zusätzlich zum Schätzwert noch ein **Konfidenzintervall** $C = C(x)$ angeben, in dem die wahre Wahrscheinlichkeit p vermutet wird. Dieses Intervall sollte die Eigenschaft haben, dass

$$\mathbf{P}_p[C(X) \ni p] \geq 1 - \alpha,$$

wobei $\mathbf{P}_p$ das Wahrscheinlichkeitsmaß ist, wenn p der wahre Anteil von Kobolden ist, X die (zufällige) Anzahl von Kobolden in der Stichprobe der festen Größe n, und $\alpha \in [0, 1]$ eine vorher gewählte Fehlergrenze. Natürlich muss diese Ungleichung für alle $p \in [0, 1]$ gelten, denn den wahren Wert kennen wir ja noch nicht.

Hier soll gleich einer Unklarheit vorgebeugt werden: Es wird nicht die Wahrscheinlichkeit beschrieben, mit der p in $C(X)$ liegt. p ist **nicht zufällig**. Die Zahl p ist eine deterministische Zahl, die uns lediglich nicht bekannt ist. Die Beobachtung X und das Intervall $C(X)$ sind zufällig. Daher geht es hier um die Wahrscheinlichkeit, dass eine Beobachtung x vorliegt, so dass $C(x)$ den wahren Wert p enthält.

(iii) *Test.* Ein Verbraucherschützer (m/w/d) ist unter Umständen gar nicht so sehr an einer Schätzung der wahren Wahrscheinlichkeit interessiert, sondern vielmehr daran festzustellen, ob die beworbene Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{7}$ untertroffen wird. Er wird zunächst von der Hypothese $H_0 = \{\frac{1}{7}\}$ ausgehen müssen, dass tatsächlich im Schnitt jedes siebte SRO einen Kobold enthält. Als Gegenhypothese stellt er die Vermutung auf, dass p in $H_1 := \{p : p < \frac{1}{7}\}$ liegt. Ist x sehr viel kleiner als $\frac{n}{7}$, so wird er H_0 zu Gunsten von H_1 verwerfen. Ansonsten kann man gegen H_0 nichts einwenden. Der Verbraucherschützer entwirft also eine Regel $\varphi : \{0, \dots, n\} \to \{0, 1\}$, (wobei 1 für das Verwerfen von H_0 steht), mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{P}_p[\varphi = 0]$ möglichst groß ist für $p \in H_0$ und klein für $p \in H_1$. Eine solche Regel heißt ein **Test**. Als einfache Regel bietet sich hier natürlich an:

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{x \le K\}},$$

wobei der kritische Wert K geeignet gewählt werden muss, so dass die Fehlerwahrscheinlichkeiten

$$\sup_{p \in H_0} \mathbf{P}_p[x : \varphi(x) = 1] \quad \text{und} \quad \sup_{p \in H_1} \mathbf{P}_p[x : \varphi(x) = 0]$$

möglichst klein sind. Dies sind konkurrierende Ziele, die sich stets nur mit Abstrichen erreichen lassen. ◇

Wir wollen nun das vorangehende Beispiel an Hand von Zahlen durchrechnen. Wir nehmen an, dass wir $n = 200$ SRO geprüft haben. Die Anzahl der Kobolde soll demnach binomialverteilt sein mit Parametern $n = 200$ und p, wobei wir p eben noch nicht kennen.

(i) *Punktschätzung.* Wir geben als Punktschätzer an:

$$\hat{p}(x) := \frac{x}{200}.$$

(ii) *Intervallschätzung.* Wir geben uns eine Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha := 0.05$ vor und suchen ein möglichst kleines Intervall $C(x)$, so dass für jedes $p \in [0, 1]$ gilt

$$b_{200,p}(\{x : C(x) \ni p\}) \ge 1 - \alpha.$$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass wir die Binomialverteilung durch die Normalverteilung $\mathcal{N}_{np,np(1-p)}$ ersetzen dürfen. Der Satz von de Moivre und Laplace rechtfertigt dieses Vorgehen. Diese Verteilung ist symmetrisch um pn, und es sollte auch das gesuchte Intervall symmetrisch um $\hat{p}(x)$ liegen, also die Gestalt haben $(\frac{x}{n} - c, \frac{x}{n} + c)$, wobei wir jetzt $c \in \frac{1}{n}\mathbb{N}_0$ so wählen, dass (Normalapproximation ohne Korrekturterme)

$$\mathcal{N}_{np,\, np(1-p)}\big((n(p - c),\, n(p + c))\big) \ge 1 - \alpha.$$

Dies ist äquivalent zu $\mathcal{N}_{0,np(1-p)}\big((-nc,\, nc)\big) \ge 1 - \alpha$ und dies wiederum zu

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \alpha}{2} \le \mathcal{N}_{0,np(1-p)}\big((0,\, nc)\big) &= \mathcal{N}_{0,1}\left(\left(0,\, \frac{nc}{(np(1-p))^{1/2}}\right)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{nc}{(np(1-p))^{1/2}}\right) - \Phi(0) \\
&= \Phi\left(\frac{nc}{(np(1-p))^{1/2}}\right) - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Also soll gelten
$$c \;\geq\; \sqrt{p(1-p)/n}\;\Phi^{-1}\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big).$$
Hierbei bezeichnet Φ^{-1} die Umkehrfunktion zur Verteilungsfunktion Φ der Normalverteilung. Da wir p nicht kennen, müssen wir den maximalen Wert einsetzen, also $p = \frac{1}{2}$, und erhalten als kleinstmögliches c
$$c \;=\; \frac{1}{2\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$
In unseren konkreten Zahlen heißt dies
$$c \;\geq\; \frac{1}{2\sqrt{200}}\,\Phi^{-1}(0.975) \;=\; \frac{1}{20\sqrt{2}}\cdot 1.96 \;\approx\; 0.069.$$
Damit $c \in \frac{1}{200}\mathbb{N}$ liegt, müssen wir $c = \frac{14}{200} = 0.07$ wählen. Wir wählen also als Konfidenzintervall
$$C(x) \;:=\; \Big(\frac{x}{200} - 0.07,\; \frac{x}{200} + 0.07\Big) \;=\; \left(\frac{x-14}{200},\; \frac{x+14}{200}\right)$$
Eine genaue Rechnung ergibt für den Fall größter Varianz (nämlich $p = \frac{1}{2}$):
$$\begin{aligned} b_{200,\frac{1}{2}}\left(\left\{x:\; \frac{x-14}{200} \;\leq\; \frac{1}{2} \;\leq\; \frac{x+14}{200}\right\}\right) \;&=\; b_{200,\frac{1}{2}}\big(\{x:\; x-14 \;\leq\; 100 \;\leq\; x+14\}\big) \\ &=\; b_{200,\frac{1}{2}}\big(\{86,\ldots,114\}\big) \;=\; 0.95996 \;>\; 0.95 \end{aligned}$$
und
$$b_{200,\frac{1}{2}}\big(\{x:\; x-13 \;\leq\; 100 \;\leq\; x+13\}\big) \;=\; b_{200,\frac{1}{2}}\big(\{87,\ldots,113\}\big) \;=\; 0.94403 \;<\; 0.95.$$
In der Tat muss also $c = \frac{14}{200} = 0.07$ gewählt werden.

(iii) *Test.* Wir wollen nun die Hypothese $H_0 = \{\frac{1}{7}\}$ gegen die Gegenhypothese $H_1 = [0, \frac{1}{7})$ testen. Wir erlauben ein Fehlerniveau von $\alpha = 0.02$ für das fälschliche Verwerfen der Hypothese H_0, also
$$\alpha \;\geq\; b_{200,1/7}\big(\{x:\; \varphi(x) = 1\}\big).$$
Unsere Regel soll die Gestalt haben:
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq K, \\ 0, & \text{falls } x > K, \end{cases}$$
für ein zu bestimmendes K. Wir wollen natürlich K so groß wie möglich wählen, um es auch wirklich zu entdecken, falls $p < \frac{1}{7}$ ist. Gesucht ist also das größte K mit $b_{200,1/7}(\{0,\ldots,K\}) \leq 0.02$.

Normalapproximation liefert
$$0.02 \;\geq\; b_{200,1/7}(\{0,\ldots,K\}) \;\approx\; \Phi\left(\frac{K - 200/7}{\sqrt{1200/49}}\right).$$
Also
$$K \;\leq\; \frac{200}{7} + \frac{20\sqrt{3}}{7}\underbrace{\Phi^{-1}(0.02)}_{\approx -2.054} \;\approx\; 18.407.$$
Wir verwerfen also die Hypothese H_0, falls wir 18 oder weniger Kobolde gefunden haben.

(Die genaue Rechnung liefert: $b_{200,1/7}(\{0,\ldots,18\}) = 0.01667570174$ und $b_{200,1/7}(\{0,\ldots,19\}) = 0.02861317290$. Also ist der approximativ ermittelte Wert $K = 18$ richtig.)

Wir wollen jetzt einen abstrakten Rahmen schaffen, in den wir die obige Situation einbetten können.

Definition 6.2 *Ein **statistisches Modell** ist ein Tripel $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$, bestehend aus*

- *einem Beobachtungsraum $\mathfrak{X}$,*
- *einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathfrak{X}$,*
- *einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}$ auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$, wobei Θ eine Indexmenge ist.*

Wir wollen zudem annehmen, dass stets $X = \mathrm{id}_{\mathfrak{X}}$ die identische Abbildung auf $\mathfrak{X}$ ist. So können wir X als Zufallsvariable auffassen, wobei $\mathfrak{X}$ einmal der Wahrscheinlichkeitsraum ist, einmal der Wertebereich von X. Dies ist formal nützlich, um intuitive Schreibweisen wie $\mathbf{P}_\vartheta[X \in A]$, (für $\mathbf{P}_\vartheta[\{x : x \in A\}]$) oder $\mathbf{E}_\vartheta[X]$ (für $\sum_{x\in\mathfrak{X}} \mathbf{P}_\vartheta[\{x\}]x$, falls $\mathfrak{X} \subset \mathbb{N}_0$) zu ermöglichen.

In der Situation mit den Kobolden ist $\mathfrak{X} = \{0, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathfrak{X}}$, $\Theta = [0, 1]$ und $\mathbf{P}_\vartheta = b_{n,\vartheta}$.

Von besonderem Interesse ist nicht der Fall, wo Θ und $\mathfrak{X}$ möglichst abstruse Mengen sind, sondern diskrete Mengen, oder offene oder abgeschlossene (allgemeiner: messbare) Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. Wir treffen daher die folgende Definition.

Definition 6.3 *Ein statistisches Modell $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ heißt **parametrisches Modell**, falls $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$. Das Modell heißt **einparametrig**, falls $\Theta \subset \mathbb{R}$.*

Definition 6.4 *Ein statistisches Modell $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ heißt **diskret**, falls $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ diskret ist (also $\mathfrak{X}$ höchstens abzählbar und $\mathcal{A} = 2^{\mathfrak{X}}$). Das Modell heißt **stetiges Modell**, falls*

- *$\mathfrak{X}$ eine offene oder abgeschlossene (allgemeiner: eine Borel-messbare) Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist und $\mathcal{A}$ die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathfrak{X}$,*
- *und jedes $\mathbf{P}_\vartheta$ eine Dichte ϱ_ϑ besitzt.*

*Ist $\mathcal{M}$ ein stetiges Modell oder ein diskretes Modell, so heißt $\mathcal{M}$ ein **Standardmodell**.*

Ein wesentliches Prinzip der Statistik ist, dass man die Experimente wiederholen kann, um auf Grund einer größeren Datenbasis genauere Aussagen treffen zu können. Dabei spielt natürlich die unabhängige Wiederholung der Experimente die entscheidende Rolle. Wir betrachten nun ein Standardmodell $(E, \mathcal{E}, (\mathbf{Q}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$, das wir n–fach wiederholen möchten. Dazu müssen wir den Produktraum $\mathfrak{X} = E^n$ mit der Produktwahrscheinlichkeit $\mathbf{P}_\vartheta := \mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes n}$ bilden. Das ist dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die Projektionen $X_i : \mathfrak{X} \to E$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$, $i = 1, \dots, n$ eine unabhängige Familie bilden. Die σ-Algebra $\mathcal{A} := \mathcal{E}^{\otimes n}$ ist im diskreten Fall definiert als $2^{\mathfrak{X}}$ und im stetigen Fall als Borel'sche σ-Algebra auf $\mathfrak{X}$. (Allgemein ist die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{E}^{\otimes n}$ die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$, so dass alle X_i messbar sind bezüglich $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. Dieses Thema werden wir erst in der Stochastik I vertiefen. Hier spielen die σ-Algebren keine Rolle und werden nur der Vollständigkeit halber mitgeschleppt.)

Definition 6.5 *Ist $\mathcal{M} = (E, \mathcal{E}, (\mathbf{Q}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein Standardmodell und $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir*

$$\mathcal{M}^{\otimes n} := (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}) = \left(E^n, \mathcal{E}^{\otimes n}, (\mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes n})_{\vartheta\in\Theta}\right)$$

*das n–fache **Produktmodell** zu $\mathcal{M}$. In diesem Zusammenhang benennen wir mit X_i stets die i-te Projektion.*

Wir können unser Kobold-Beispiel als Produktmodell auffassen, wenn wir die Untersuchung von einem SRO als ein Experiment auffassen. Es ist dann $E = \{0,1\}$, $\mathcal{E} = 2^E$, $\mathbf{Q}_\vartheta = \mathrm{Ber}_\vartheta$. Unsere Beobachtung ist dann ein Element von $\mathfrak{X} = \{0,1\}^n$, ausgestattet mit dem Produktmaß $\mathbf{P}_\vartheta = \mathrm{Ber}_\vartheta^{\otimes n}$, also ein Bernoulli-Experiment der Länge n (vergleiche Beispiel 1.17(iv)).

6.2 Punktschätzung

Wir betrachten ein statistisches Modell $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$. Wir wollen aus einer Beobachtung x Rückschlüsse ziehen, welches ϑ „in Wahrheit" vorliegt. Gelegentlich wollen wir auch nur einfachere Kenngrößen beschreiben, die Werte zum Beispiel in einem Messraum $(\Sigma, \mathcal{S})$ annehmen. Da dieser Vorgang in der Statistik fundamental ist, bekommen die Abbildungen, die unseren Beobachtungen Werte in Θ beziehungsweise in Σ zuordnen, eigene Namen.

Definition 6.6 *(i) Eine $\mathcal{A}-\mathcal{S}$-messbare Abbildung $\mathfrak{X} \to \Sigma$ heißt eine* ***Statistik****.*

(ii) Sei $\tau : \Theta \to \Sigma$ eine beliebige Abbildung. Eine Statistik $T : \mathfrak{X} \to \Sigma$ heißt dann ein ***Schätzer*** *(oder* ***Punktschätzer*** *im Gegensatz zu Intervallschätzern) für τ.*

Wir interpretieren $\tau(\vartheta)$ als Kenngröße der Verteilung $\mathbf{P}_\vartheta$, etwa Erwartungswert, Median, Varianz etc.

Beispiel 6.7 (i) Im Kobold-Beispiel ist

$$\Sigma = \Theta = [0,1]$$
$$\tau : \Theta \to \Sigma, \quad p \mapsto \tau(p) = p.$$

D.h., wir interessieren uns für die Erfolgswahrscheinlichkeit selber. (Dies ist meistens der Fall.)

(ii) Wenn wir bei zufälligen normalverteilten Beobachtungsgrößen unbekannter Varianz und unbekannten Erwartungswertes nur den Erwartungswert schätzen wollen, so bietet sich das zweiparametrige Modell an: $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\Theta = \{\vartheta = (\mu,\sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ und $\mathbf{Q}_{(\mu,\sigma^2)} = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$, $\mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)} = \mathbf{Q}_{(\mu,\sigma^2)}^{\otimes n}$. Die Kenngröße, die uns interessiert, ist $\tau(\vartheta) = \tau(\mu,\sigma^2) = \mu$. Hier ist also $\Sigma = \mathbb{R}$. Als Statistik kommt zum Beispiel $T((x_1,\ldots,x_n)) = (x_1 + \ldots + x_n)/n$ in Frage. Formal ist natürlich auch jede andere messbare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Statistik und damit ein Schätzer für τ.

(iii) Wir machen n Beobachtungen einer reellen Größe mit gänzlich unbekannter Verteilung $\mathbf{Q}_F$ mit (unbekannter) Verteilungsfunktion F. Wir nehmen also an, dass $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$,

$$\Theta = \{\text{alle Verteilungsfunktionen auf } \mathbb{R}\},$$

und $\mathbf{P}_F = \mathbf{Q}_F^{\otimes n}$ ist. Dieses Modell ist weder ein Standardmodell noch ein parametrisches Modell. Als Kenngröße interessiert uns der Median der Verteilung $\tau(F) = \inf\{x : F(x) \geq 1/2\}$. Es ist also $\Sigma = \mathbb{R}$. Als Schätzer kommt zum Beispiel die Mitte der Beobachtungsdaten in Frage:

$$T((x_1,\ldots,x_n)) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}\right], & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x_{((n+1)/2)}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dabei sind $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ die geordneten Werte der $x_1,\ldots,x_n$. Man nennt daher $(x_{(k)})_{k=1,\ldots,n}$ auch die **Ordnungsstatistik** von $x_1,\ldots,x_n$.

Man beachte, dass die Definition offenbar überhaupt keine Aussage zur Qualität des Schätzers macht. In der Tat braucht der Schätzer mit der zu schätzenden Größe in keinem erkennbaren Zusammenhang zu stehen. Dies mag auf den ersten Blick verwundern, erleichtert aber die Begriffsbildung.

Es kommt jetzt also ganz maßgeblich darauf an, Qualitätsmerkmale festzulegen, die ein Schätzer erfüllen sollte.

Definition 6.8 *Seien $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und $\tau : \Theta \to \mathbb{R}$ eine reelle Kenngröße. Sei $T : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ ein Schätzer.*

*(i) T heißt **erwartungstreu**, falls $\mathbf{E}_\vartheta[T] = \tau(\vartheta)$ existiert für alle $\vartheta \in \Theta$. Die Differenz*

$$b_\vartheta(T) := \mathbf{E}_\vartheta[T] - \tau(\vartheta)$$

*heißt **Bias** des Schätzers T.*

*(ii) Ein erwartungstreuer Schätzer T heißt **Varianz minimierend** oder **gleichmäßig bester Schätzer**, falls für jeden erwartungstreuen Schätzer S gilt*

$$\mathbf{Var}_\vartheta[T] \leq \mathbf{Var}_\vartheta[S] \quad \textit{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

(iii) Die Größe

$$\mathrm{mqF}_\vartheta(T) := \mathbf{E}_\vartheta\left[(T - \tau(\vartheta))^2\right] = b_\vartheta(T)^2 + \mathbf{Var}_\vartheta[T]$$

*heißt der **mittlere quadratische Fehler**.*

Definition 6.9 *Ist $\mathcal{M}_n := \left(E^n, \mathcal{E}^{\otimes n}, (\mathbf{P}_\vartheta^{\otimes n})_{\vartheta\in\Theta}\right)$, sowie $\tau : \Theta \to \mathbb{R}^d$ eine d-dimensionale Kenngröße, so heißt eine Folge von Schätzern $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $T_n : E^n \to \mathbb{R}^d$ eine **konsistente** Folge für τ, falls*

$$\mathbf{P}_\vartheta^{\otimes n}\left[|T_n - \tau(\vartheta)| > \varepsilon\right] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0 \textit{ und } \vartheta \in \Theta.$$

Beispiel 6.10 Wir schauen uns jetzt das Beispiel mit den Kobolden noch einmal an. Hier hat der Schätzer T den Erwartungswert

$$\mathbf{E}_\vartheta[T] \;=\; \frac{1}{n}\sum_{x=0}^{n} x\, b_{n,\vartheta}(\{x\}) = \vartheta.$$

Also ist T erwartungstreu. Ferner hat T die Varianz

$$\mathbf{Var}_\vartheta[T] \;=\; \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}.$$

Insbesondere gilt natürlich

$$\mathbf{P}_\vartheta[|T - \vartheta| > \varepsilon] \;\leq\; \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n\,\varepsilon^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Konstruieren wir also für jedes n einen solchen Schätzer T_n, so ist die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent.

Sei nun S ein weiterer Schätzer, der nur auf der Gesamtzahl x der Kobolde basiert (nicht aber auf der Reihenfolge des Auftretens). Dann sind die Koeffizienten des Polynoms (in ϑ)

$$r(\vartheta) \;:=\; \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}\, S(x) \;=\; \mathbf{E}_\vartheta[S]$$

durch die Werte $r(\vartheta)$, $\vartheta \in [0,1]$ eindeutig festgelegt. Ist nun S erwartungstreu, so ist $r(\vartheta) = \vartheta = \mathbf{E}_\vartheta[T]$, also ist $S(x) = T(x) = \frac{x}{n}$, $x = 0, \ldots, n$. Das arithmetische Mittel ist also der einzige erwartungstreue Schätzer, der nur auf der Gesamtzahl x beruht.

Wir können natürlich mehrere erwartungstreue Schätzer konstruieren, die auch auf die Reihenfolge der Ziehungen Rücksicht nehmen, beispielsweise das arithmetische Mittel der ersten 5 Ziehungen. Man kann allerdings zeigen, dass auch in dieser Klasse T die kleinste Varianz hat. (Das ist eine Schlussfolgerung aus der so genannten Informationsungleichung, siehe Buch von Krengel, oder Buch von Georgii). ◇

Beispiel 6.11 Eine Maschine produziert unabhängige Zufallszahlen $X_1, X_2, \ldots$, die uniform auf $[0,\vartheta]$ verteilt sind, wobei wir den Parameter $\vartheta > 0$ nicht kennen. Wir machen n Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ und wollen hieraus ϑ schätzen. Das Modell $\mathcal{M}$ ist ein Produktmodell, wobei die einzelnen Faktoren gegeben sind durch

$$E = [0,\infty), \quad \mathcal{E} = \mathcal{B}([0,\infty)), \quad \mathbf{Q}_\vartheta = \mathcal{U}_{[0,\vartheta]},\ \vartheta \in \Theta := (0,\infty).$$

Also ist $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, \mathbf{P}_\vartheta)$, wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &:= E^n = [0,\infty)^n \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{E}^{\otimes n} = \mathcal{B}([0,\infty)^n) \\ \mathbf{P}_\vartheta &:= \mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes n} = \mathcal{U}_{[0,\vartheta]^n}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun mit $X = \mathrm{id}_{\mathfrak{X}}$ die identische Abbildung und mit $X_i : \mathfrak{X} \to E$ die Koordinatenabbildungen.

(i) Offenbar ist

$$\mathbf{E}_\vartheta[X_i] = \frac{\vartheta}{2} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n. \tag{6.1}$$

Also ist der Schätzer

$$T_n^1(x) := \frac{2}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$$

erwartungstreu für ϑ. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}_\vartheta[T_n^1] &= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbf{Var}_\vartheta[X_i] \\ &= \frac{4n}{n^2}\Big(- \Big(\frac{\vartheta}{2}\Big)^2 + \underbrace{\int_0^\vartheta \frac{1}{\vartheta} t^2\, dt}_{=\vartheta^2/3} \Big) \\ &= \frac{\vartheta^2}{3n}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Also gilt

$$\mathbf{P}\big[|T_n^1 - \vartheta| > \varepsilon\big] \le \frac{\vartheta^2}{3n\varepsilon^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit ist die Folge $(T_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent.

(ii) Eine weitere plausible Schätzmöglichkeit ist

$$T_n^2(x) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}. \tag{6.3}$$

Offenbar ist $\mathbf{P}_\vartheta[T_n^2 < \vartheta] = 1$, also ist $\mathbf{E}_\vartheta[T_n^2] < \vartheta$. Mithin ist T_n^2 nicht erwartungstreu. Es gilt aber für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\vartheta\big[|T_n^2 - \vartheta| > \varepsilon\big] &= \mathbf{P}_\vartheta\big[T_n^2 < \vartheta - \varepsilon\big] \\ &= \Big(\frac{\vartheta - \varepsilon}{\vartheta}\Big)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also ist auch $(T_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent für ϑ.

Wir rechnen jetzt genauer den Bias und den mittleren quadratischen Fehler aus. Wegen

$$\mathbf{P}_\vartheta[T_n^2 \le t] \;=\; \mathbf{P}_\vartheta[\{x:\, x_1 \le t,\dots,x_n \le t\}] \;=\; \left(\frac{t}{\vartheta}\right)^n \qquad \text{für } \; t\in[0,\vartheta],$$

hat die Verteilung von T_n^2 die Dichte

$$f_\vartheta^2(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\vartheta}\right)^n = \vartheta^{-n}\, n\, t^{n-1} \qquad \text{für } \; t\in[0,\vartheta].$$

Es ist also

$$\mathbf{E}_\vartheta[T_n^2] \;=\; \int_0^\vartheta f_\vartheta^2(t)\, t\; dt \;=\; \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^n\; dt \;=\; \frac{n}{n+1}\,\vartheta. \tag{6.4}$$

und

$$\mathbf{E}_\vartheta[(T_n^2)^2] \;=\; \int_0^\vartheta f_\vartheta^2(t)\, t^2\; dt \;=\; \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta t^{n+1}\; dt \;=\; \frac{n}{n+2}\,\vartheta^2. \tag{6.5}$$

Also ist der Bias

$$b_\vartheta(T_n^2) \;=\; \mathbf{E}_\vartheta[T_n^2]-\vartheta \;=\; -\frac{1}{n+1}\,\vartheta. \tag{6.6}$$

Die Varianz ist

$$\mathbf{Var}_\vartheta[T_n^2] \;=\; \frac{n}{n+2}\,\vartheta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\vartheta^2 \;=\; \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\,\vartheta^2. \tag{6.7}$$

Der mittlere quadratische Fehler ist daher

$$\mathrm{mqF}_\vartheta(T_n^2) \;=\; b_\vartheta(T_n^2)^2 + \mathbf{Var}_\vartheta[T_n^2] \;=\; \frac{2}{(n+1)(n+2)}\,\vartheta^2. \tag{6.8}$$

Dies konvergiert immerhin um eine Größenordnung schneller gegen 0 als die Varianz $\mathbf{Var}_\vartheta[T_n^1] = \frac{1}{3n}\,\vartheta^2$ des erwartungstreuen Schätzers T_n^1. Schon für $n\ge 5$ hat daher T_n^2 den kleineren mittleren quadratischen Fehler.

(iii) Es geht aber noch besser. Wir machen aus T_n^2 einen erwartungstreuen Schätzer, indem wir einfach mit $\frac{n+1}{n}$ multiplizieren:

$$T_n^3 \;:=\; \frac{n+1}{n}T_n^2 \;=\; \frac{n+1}{n}\max\{x_1,\dots,x_n\}.$$

Offenbar ist dann der mittlere quadratische Fehler

$$\begin{aligned}\mathrm{mqF}_\vartheta(T_n^3) \;&=\; \mathbf{E}_\vartheta\big[(T_n^3-\vartheta)^2\big]\\ &=\; \mathbf{Var}_\vartheta\big[T_n^3\big]\\ &=\; \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mathbf{Var}_\vartheta\big[T_n^2\big]\\ &=\; \frac{1}{n(n+2)}\,\vartheta^2.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Für große n ist dies nur rund halb so viel wie $\mathrm{mqF}_\vartheta(T_n^2)$.

(iv) Manchmal kommt der besonders schlaue Vorschlag, als Schätzer

$$T_n^4(x) = \max\{x_1, \dots, x_n\} + \min\{x_1, \dots, x_n\} \tag{6.10}$$

zu verwenden. Für das diskrete Analogon dieses Problems, das so genannte Taxi-Problem, findet man diesen Vorschlag beispielsweise im Buch von Krengel beschrieben. Ob dies sinnvoll ist, sehen wir sofort.

Wir definieren

$$\begin{aligned} Y &:= \min\{x_1, \dots, x_n\}, \\ Z &:= \max\{x_1, \dots, x_n\}. \end{aligned}$$

Dann ist $T_n^4 = Y + Z$. Die gemeinsame Verteilung von Y und Z berechnen wir, indem wir für $0 \le y \le z \le \vartheta$ betrachten

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\vartheta[Y \ge y,\, Z \le z] &= \mathbf{P}_\vartheta[\{x : x_i \in [y,z],\, i = 1, \dots, n\}] \\ &= \mathbf{P}_\vartheta[[y,z]^n] = \vartheta^{-n}(z-y)^n. \end{aligned}$$

Also hat die gemeinsame Verteilung $\mathbf{P}_\vartheta \circ (Y,Z)^{-1}$ die Dichte

$$\begin{aligned} f_\vartheta(y,z) &= -\frac{d}{dy}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_\vartheta\big[Y \ge y,\ Z \le z\big] \\ &= -\vartheta^{-n}\frac{d}{dy}\frac{d}{dz}(z-y)^n \\ &= \vartheta^{-n}\, n\,(n-1)(z-y)^{n-2}, \qquad 0 \le y \le z \le \vartheta. \end{aligned}$$

Wir erhalten so (oder durch Symmetrieüberlegungen)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\vartheta[Y] &= \vartheta^{-n}(n-1)n \int_0^\vartheta dy \int_y^\vartheta dz\, y(z-y)^{n-2} \\ &= \vartheta^{-n} n \int_0^\vartheta dy\, y(\vartheta - y)^{n-1} \\ &= \vartheta^{-n} n \left(\frac{1}{n}\vartheta^{n+1} - \int_0^\vartheta dy\,(\vartheta - y)^n \right) \\ &= \frac{1}{n+1}\,\vartheta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\vartheta[Y^2] &= \vartheta^{-n}(n-1)n \int_0^\vartheta dy \int_y^\vartheta dz\, y^2(z-y)^{n-2} \\ &= \vartheta^{-n} n \int_0^\vartheta dy\, y^2(\vartheta - y)^{n-1} \\ &= \vartheta^2 n \int_0^1 dy\, y^2(1-y)^{n-1} \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\,\vartheta^2. \end{aligned} \tag{6.11}$$

(Hier haben wir im letzten Schritt zweimal partiell integriert. Allgemeiner bekommt man für den Wert des Beta-Integrals bei $u, v \in \mathbb{N}$

$$B(m,n) := \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$$

durch partielle Integration (falls $m \geq 2$)

$$\begin{aligned} B(m,n) &= \underbrace{-\frac{1}{n}x^{m-1}(1-x)^n\Big|_0^1}_{=0} + \frac{m-1}{n}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^n\,dx \\ &= \frac{m-1}{n}B(m-1,n+1). \end{aligned}$$

Offenbar ist $B(1,n) = B(n,1) = \frac{1}{n}$. Man erhält also $B(2,n) = \frac{1}{n}B(1,n+1) = \frac{1}{n(n+1)}$ und $B(3,n) = \frac{2}{n}B(2,n+1) = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$. Iterativ bekommt man

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}. \tag{6.12}$$

Dies haben wir in (6.11) ausgenutzt mit $m = 3$.)

Also ist

$$\mathbf{Var}_\vartheta[Y] = \mathbf{E}_\vartheta[Y^2] - \mathbf{E}_\vartheta[Y]^2 = \frac{n}{(n+1)^2\,(n+2)}\,\vartheta^2.$$

Die gleichen Ergebnisse hätten wir auch herleiten können, indem wir bemerken, dass $Z = T^2$ und daher

$$\mathbf{E}_\vartheta[Z] = \frac{n}{n+1}\,\vartheta \quad \text{und} \quad \mathbf{Var}_\vartheta[Z] = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\,\vartheta^2.$$

und schließlich

$$\mathbf{E}_\vartheta[Z^2] = \mathbf{Var}_\vartheta[Z] + \mathbf{E}_\vartheta[Z]^2 = \frac{n}{n+2}\,\vartheta^2.$$

Nun ist $\mathbf{P}_\vartheta \circ Z^{-1} = \mathbf{P}_\vartheta \circ (\vartheta - Y)^{-1}$, also $\mathbf{E}_\vartheta[Y] = n - \mathbf{E}_\vartheta[Z]$ und $\mathbf{Var}_\vartheta[Y] = \mathbf{Var}_\vartheta[Z]$. Bislang haben wir die gemeinsame Verteilung von Y und Z noch gar nicht gebraucht. Dies geschieht im folgenden Schritt:

$$\mathbf{E}_\vartheta\big[(Z-Y)^2\big] = \vartheta^{-n}(n-1)n\int_0^\vartheta dy\int_y^\vartheta dz\,(z-y)^2(z-y)^{n-2} = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\,\vartheta^2.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}_\vartheta[T^4] &= \mathbf{Var}_\vartheta[Y+Z] \\ &= \mathbf{E}_\vartheta[(Y+Z)^2] - \vartheta^2 \\ &= 2\,\mathbf{E}_\vartheta[Y^2] + 2\mathbf{E}_\vartheta[Z^2] - \mathbf{E}[(Y-Z)^2] - \vartheta^2 \\ &= \left(\frac{4}{(n+1)(n+2)} + \frac{2n}{n+2} - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} - 1\right)\vartheta^2 \\ &= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\,\vartheta^2. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$\mathrm{mqF}_\vartheta(T_n^4) = \mathbf{Var}_\vartheta[T_n^4] = \mathrm{mqF}(T_n^2).$$

Wir haben also gegenüber dem naiven Schätzer T^2 keine Verbesserung erzielt. Verglichen mit dem erwartungstreuen Schätzer T_n^3 haben wir sogar eine Verschlechterung um den Faktor ≈ 2.

(v) Zu guter Letzt betrachten wir den Median als Schätzer

$$T^5(x) := 2\,\mathrm{median}(x_1, \dots, x_n).$$

Unter $\mathbf{P}_\vartheta$ ist $X_i \sim \mathcal{U}_{[0,\vartheta]}$ und $\vartheta - X_i \sim \mathcal{U}_{[0,\vartheta]}$. Also haben auch $T^5(X)$ und $2\vartheta - T^5(X)$ die gleich Verteilung unter $\mathbf{P}_\vartheta$. Speziell gilt

$$\mathbf{E}_\vartheta[T^5(X)] = 2\vartheta - \mathbf{E}_\vartheta[T^5(X)].$$

Also ist

$$\mathbf{E}_\vartheta[T^5(X)] = \vartheta,$$

das heißt, T^5 ist erwartungstreu. Um die Varianz zu bestimmen, bemerken wir zunächst, dass

$$\mathbf{Var}_\vartheta[T^5(X)] = \vartheta^2\mathbf{Var}_1[T^5(X)] = 4\vartheta^2\mathbf{Var}_1[\mathrm{median}(X)].$$

Wir brauchen also das zweite Moment

$$\mathbf{E}_1[\mathrm{median}(X)^2] = \int_0^{4\vartheta^2} \mathbf{P}_1[\mathrm{median}(X)^2 > t]\,dt \quad = \int_0^1 \mathbf{P}_1[\mathrm{median}(X) > \sqrt{t}]\,dt = \int_0^1 \mathbf{P}_1[\mathrm{median}(X) > s]\,2s\,ds.$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass n ungerade ist, so dass der Median gleich $X_{((n+1)/2)}$ ist (Ordnungsstatistik von X). Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1[\mathrm{median}(X) > s] &= \mathbf{P}_1[X_i > s \ \text{ für mind. } (n+1)/2 \text{ der } i\ ] \\
&= \int_0^1 \sum_{k=(n+1)/2}^{n} \binom{n}{k} (1-s)^k s^k\, 2s\,ds \\
&= 2 \sum_{k=(n+1)/2}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 (1-s)^k s^{n-k}\, s\,ds \\
&= 2 \sum_{k=(n+1)/2}^{n} \binom{n}{k} \frac{(k+1)!(n-k+1)!}{(n+2)!} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=(n+1)/2}^{n} n-k+1 \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=1}^{(n+1)/2} k \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+1)(n+3)}{8} \\
&= \frac{1}{4}\frac{n+3}{n+2}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbf{Var}_1[\mathrm{median}(X)] = \mathbf{E}_1[\mathrm{median}(X)^2] - \mathbf{E}_1[\mathrm{median}(X)]^2 = \frac{1}{4}\frac{n+3}{n+2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4(n+2)}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{Var}_\vartheta[T^5(X)] = \frac{\vartheta^2}{(n+2)}.$$

Die Varianz ist also etwa um den Faktor 3 größer als die von T^1. ◇

6.3 Maximum-Likelihood Schätzer

Wir betrachten jetzt stets ein statistisches Standardmodell $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$. Wir wollen einen Schätzer konstruieren für die identische Abbildung id_Θ. Das heißt, wir wollen den Parameter ϑ selbst schätzen.

Für den Moment nehmen wir an, dass $\mathfrak{X}$ diskret ist. Ein plausibles Vorgehen ist es, zu gegebener Beobachtung $x \in \mathfrak{X}$ denjenigen Wert $\vartheta = \vartheta(x) \in \Theta$ zu wählen, für den $\mathbf{P}_\vartheta[\{x\}]$ maximal wird (falls es ein solches ϑ gibt). Ob dieses Verfahren einen *guten* Schätzer liefert, muss man sicherlich im Einzelfall entscheiden. Immerhin ist ein solcher Schätzer meist nicht völlig abwegig. Außerdem gibt es einem in unübersichtlichen Situationen einen ersten Einstieg.

Definition 6.12 (Maximum-Likelihood Schätzer) *Sei* $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ *ein statistisches Standardmodell.*

(i) Ist $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ *diskret, so definieren wir für jedes* $x \in \mathfrak{X}$ *die Abbildung*

$$L_x : \Theta \to [0,1], \qquad \vartheta \mapsto \mathbf{P}_\vartheta[\{x\}].$$

(ii) Ist $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}^n$ *und hat* $\mathbf{P}_\vartheta$ *die Dichte* f_ϑ, *so definieren wir für jedes* $x \in \mathfrak{X}$

$$L_x : \Theta \to [0,\infty), \qquad \vartheta \mapsto f_\vartheta(x).$$

Wir nennen jeweils L_x *die* ***Likelihoodfunktion*** *für das Modell. Die Abbildung*

$$\mathcal{L}_x : \Theta \to [-\infty,\infty), \qquad \vartheta \mapsto \log(L_x(\vartheta))$$

nennen wir die ***log-Likelihoodfunktion****.*

Ein Schätzer T *für* id_Θ *heißt* ***Maximum-Likelihood Schätzer*** *(kurz: ML Schätzer), falls*

$$L_x(T(x)) = \max\{L_x(\vartheta),\, \vartheta \in \Theta\} \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{X}.$$

Bemerkung 6.13 Die Abbildung $\mathcal{L}_x$ ist maximal genau für diejenigen ϑ, für die L_x maximal ist. Mit $\mathcal{L}_x$ kann man in vielen Fällen leichter rechnen, weil

- man leichter Ableitungen bilden kann,
- für sehr kleine Werte von L_x der Logarithmus die etwas übersichtlichere Größe ist. ◇

Beispiel 6.14 Seien $\mathfrak{X} = \{0,\ldots,n\}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathfrak{X}}$, $\mathbf{P}_\vartheta = b_{n,\vartheta}$, $\vartheta \in [0,1]$ die Binomialverteilung mit Parametern n und unbekanntem ϑ. Für $x \in \mathfrak{X}$ ist

$$L_x(\vartheta) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\vartheta}\mathcal{L}_x(\vartheta) &= \frac{d}{d\vartheta}\log(\vartheta^x) + \frac{d}{d\vartheta}\log((1-\vartheta)^{n-x})\\ &= \frac{x}{\vartheta} - \frac{n-x}{1-\vartheta}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist gleich Null, genau dann, wenn $\frac{x}{\vartheta} = \frac{n-x}{1-\vartheta}$, also genau dann, wenn $\vartheta = \frac{x}{n}$. Daher hat L_x ein isoliertes globales Maximum an dieser Stelle ϑ. Also ist

$$T(x) := \frac{x}{n}$$

der eindeutige Maximum-Likelihood Schätzer. ◇

Beispiel 6.15 Wir betrachten das Modell mit dem Zufallszahlengenerator aus Beispiel 6.11. Es ist also $\mathfrak{X} = [0,\infty)^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ die Borel'sche σ-Algebra und $\mathbf{P}_\vartheta = \mathcal{U}_{[0,\vartheta]}^{\otimes n}$, $\vartheta \in \Theta = (0,\infty)$ das n-fache Produkt der Gleichverteilung auf $[0,\vartheta]$, also die Gleichverteilung auf $[0,\vartheta]^n$. Dann ist die Likelihoodfunktion gegeben durch

$$L_x(\vartheta) = \vartheta^{-n} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{x_i \leq \vartheta\}}.$$

Offenbar ist L_x maximal genau für

$$\vartheta = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Also ist $T : \mathfrak{X} \to \Theta$, $x \mapsto \max\{x_1, \dots, x_n\}$ der eindeutige Maximum-Likelihood Schätzer.

Diesen Schätzer hatten wir schon im obigen Beispiel als T^2 kennen gelernt. Er war nicht optimal, in dem Sinne, dass er nicht den mittleren quadratischen Fehler minimiert und auch nicht erwartungstreu ist, aber wir haben gesehen, dass er

- nicht zu schlecht ist (besser als T^1 allemal),
- eine Idee gibt, wie man den besseren Schätzer T^3 konstruiert. ◇

Beispiel 6.16 Seien $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ diskret und Θ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ sowie $\mathbf{P}_\vartheta = \vartheta$, also $\mathbf{P}_\vartheta[\{x\}] = \vartheta[\{x\}]$. In dieser Situation ist offenbar $T(x) = \delta_x$ der eindeutige Maximum-Likelihood Schätzer. Ist dieser Schätzer aber sinnvoll? Das Problem liegt hier in der Tat nicht bei dem Schätzer, sondern bei dem Modell. Wenn wir alle Delta-Maße als Möglichkeiten zulassen, können wir einfach keine sinnvolle Antwort erwarten. Dies entspricht in etwa einem völlig hypothesenfreien wissenschaftlichen Arbeiten. Dabei kann man nur die tatsächlich gemessenen Werte sehen, nicht aber Zusammenhänge. Diese offenbaren sich erst bei dem Versuch, die Information zu reduzieren. Im statistischen Modell entspricht diese Reduktion einer Verkleinerung der Klasse von Verteilung, die man in Betracht zieht. ◇

Beispiel 6.17 (Beißschrecken) Das Mainzer Öko-Institut untersucht eine Beißschreckenpopulation im fränkischen Hammelburg. Um die Frage nach der Aussterbewahrscheinlichkeit der Population (etwa innerhalb 30 Jahren) zu beantworten, muss man sich zunächst einen Überblick über die aktuelle Größe N der Population verschaffen. Das Durchzählen aller Individuen ist praktisch nicht durchführbar, da wir es mit größenordungsmäßig $N \approx 10^5$ Individuen zu tun haben. Das Standardverfahren in einer solchen Situation sieht so aus:

1. Fange m Individuen. Markiere sie und setze sie wieder aus.
2. Warte, bis sich die markieren Individuen mit der restlichen Population gut durchmischt haben.
3. Fange erneut n Individuen. Zähle aus dieser Stichprobe die x Individuen, die markiert sind.
4. Schätze hieraus den Wert von N.

Wir wollen jetzt diesen Schätzvorgang beleuchten. Dazu stellen wir folgendes Modell auf: $\mathfrak{X} := \mathbb{N}_0$, $\mathcal{A} = 2^{\mathfrak{X}}$, $\mathbf{P}_N = \mathrm{Hyp}_{m,N-m,n}$, $N \in \Theta := \big\{i \in \mathbb{N} : i \geq \max\{m,n\}\big\}$. Dabei ist $\mathrm{Hyp}_{S,W,n}$ mit Parametern S, W und n die hypergeometrische Verteilung (siehe Beispiel 1.35 auf Seite 18). Wir erhalten also die Likelihoodfunktion

$$L_x(N) := \mathbf{P}_N[\{x\}] = \mathrm{Hyp}_{m,N-m,n}(\{x\}) = \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Hierbei muss $N - m \geq n - x$ sein (Gesamtzahl der Unmarkierten muss mindestens so groß sein, wie die Anzahl der gefundenen Unmarkierten), also $N - m - n + x \geq 0$. Um die Maximalstelle von $L_x(N)$ zu bestimmen, betrachten wir für $N - m - n + x > 0$ die Quotienten

$$\frac{L_x(N)}{L_x(N-1)} = \frac{(N-m)(N-n)}{(N-m-n+x)N} = \frac{mn - Nx}{(N-m-n+x)N} + 1.$$

Der Nenner ist positiv. Es ist also

$$\frac{L_x(N)}{L_x(N-1)} \begin{cases} = 1, & \text{falls } N = \frac{mn}{x}, \\ > 1, & \text{falls } N < \frac{mn}{x}, \\ < 1, & \text{falls } N > \frac{mn}{x}. \end{cases}$$

Also ist $L_x(N)$ maximal für $N = \left\lfloor \frac{mn}{x} \right\rfloor$, falls $\frac{mn}{x} \notin \mathbb{N}$, und für $N = \frac{mn}{x}$ und $N = \frac{mn}{x} - 1$, falls $\frac{mn}{x} \in \mathbb{N}$. Insgesamt erhalten wir

$$T(x) = \left\lfloor \frac{mn}{x} \right\rfloor \quad \text{ist ein Maximum-Likelihood Schätzer für } N. \qquad \diamond$$

Beispiel 6.18 (Normalverteilung) Seien $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathbf{P}_\vartheta = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}^{\otimes n} \quad \text{für } \vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Wir führen also ein n-faches Produktexperiment zur Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungswert und unbekannter Varianz durch. Die Verteilung $\mathbf{P}_\vartheta$ hat die Dichte

$$f_\vartheta(x) = f_{\mu,\sigma^2}(x) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \Big/ 2\sigma^2 \right).$$

Offenbar ist

$$\frac{d}{d\mu}\mathcal{L}_x(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0 \iff \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

sowie

$$\frac{d}{d(\sigma^2)}\mathcal{L}_x(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2(\sigma^2)^2}$$

Dies ist gleich Null genau dann, wenn

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Um zu zeigen, dass an dieser Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, müssten wir eigentlich noch die Hessematrix ausrechnen. Dies bleibt dem geneigten Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Wir erhalten so, dass $L_x(\mu, \sigma)$ maximal ist für

$$\begin{aligned} \mu &= M_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \\ \sigma^2 &= V_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big(x_i - M_n(x)\big)^2. \end{aligned} \qquad \diamond$$

Wir haben also den folgenden Satz gezeigt:

Satz 6.19 *Der eindeutige Maximum-Likelihood Schätzer* $T_n = (M_n, V_n)$ *im Gauß-Modell* $\mathbf{P}^n_{(\mu,\sigma^2)} = \mathcal{N}^{\otimes n}_{\mu,\sigma^2}$ *hat die Gestalt*

$$\begin{aligned} M_n(x) &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \\ V_n(x) &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big(x_i - M_n(x)\big)^2. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Bemerkung 6.20 Der Schätzer M_n ist erwartungstreu und hat die kleinste Varianz, ist also ein gleichmäßig bester Schätzer. Außerdem ist offenbar $\mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)} \circ M_n^{-1} = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2/n}$. Also ist

$$\mathbf{P}_{(\mu,\sigma^2)}\big[|M_n - \mu| > \varepsilon\big] \;=\; 2\,\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\big((\varepsilon\sqrt{n}\,,\,\infty)\big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konsistent.

Der Schätzer V_n hingegen ist nicht erwartungstreu, denn (wegen $\mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}[X_i - M_n] = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}[V_n] &= \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_{(\mu,\sigma^2)}\left[(X_i - M_n)^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{Var}_{(\mu,\sigma^2)}\left[X_i - M_n\right] \\ &= \mathbf{Var}_{(\mu,\sigma^2)}\left[X_1 - M_n\right] \\ &= \mathbf{Var}_{(\mu,\sigma^2)}\left[\frac{n-1}{n}X_1 \;-\; \frac{1}{n}(X_2 + \ldots + X_n)\right] \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \mathbf{Var}_{(\mu,\sigma^2)}[X_1] \;+\; \frac{1}{n^2}\mathbf{Var}_{(\mu,\sigma^2)}[X_2 + \ldots + X_n] \\ &= \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2}\sigma^2 \;+\; \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 \\ &= \frac{n-1}{n}\sigma^2. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren jetzt einfach mit $\frac{n}{n-1}$ und erhalten so den erwartungstreuen Schätzer

$$V_n^*(x) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - M_n(x))^2. \tag{6.14}$$

◇

Beispiel 6.21 Wir betrachten die selbe Situation wie in Satz 6.19, jedoch soll jetzt μ bekannt sein: $\mathbf{P}_{\sigma^2} = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}^{\otimes n}$, $\sigma^2 \in \Theta = (0, \infty)$. Dann ist

$$V(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2, und zwar derjenige mit dem gleichmäßig kleinsten mittleren quadratischen Fehler. ◇

Beispiel 6.22 (Schätzung der Lage der Cauchy-Verteilung) Wir betrachten ein n-faches Produktexperiment, wobei das einzelne Experiment beschrieben wird durch $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, $\Theta = \mathbb{R}$ und $\mathbf{Q}_\vartheta$ die Cauchy-Verteilung mit Zentrum ϑ, also diejenige Verteilung auf $\mathbb{R}$ mit Dichte

$$g_\vartheta(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1 + (x-\vartheta)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

Es ist also $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}) = (E^n, \mathcal{E}^{\otimes n}, (\mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes n})_{\vartheta\in\Theta})$. Die Verteilung $\mathbf{P}_\vartheta$ hat also die Dichte

$$f_\vartheta(x) = \prod_{i=1}^{n} g_\vartheta(x_i).$$

Wir wollen jetzt einen Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ angeben.

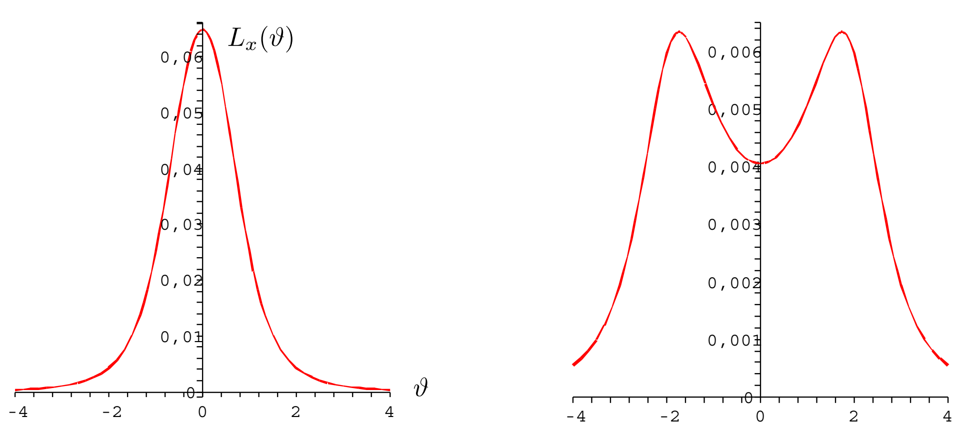
Für $n = 1$ ist dies einfach. Offenbar ist $L_x(\vartheta)$ maximal genau in $\vartheta = x$, also ist $T(x) = x$ ein Maximum-Likelihood Schätzer.

Für $n = 2$ ist

$$L_x(\vartheta) = \pi^{-2}\,\frac{1}{1 + (x_1 - \vartheta)^2}\,\frac{1}{1 + (x_2 - \vartheta)^2}.$$

Diese Funktion hat jedoch ein eindeutiges Maximum nur genau dann, wenn $|x_1 - x_2| \le 1$. Wenn die Beobachtungen um mehr als Eins auseinander liegen, gibt es zwei mögliche Maximum-Likelihood Schätzer, wobei keiner in der Mitte der Beobachtungen schätzt. Hier ist der Maximum-Likelihood Schätzer also von zweifelhafter Qualität. ◇

Likelihoodfunktionen der Cauchyverteilung, $n = 2$



$x_1 = -0.5$, $x_2 = 0.5$ $\qquad$ $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

Das vorige Beispiel lässt uns vermuten, dass ein Maximum-Likelihood Schätzer vor allem dann gut sein kann, wenn die Likelihoodfunktion ein *eindeutiges* Maximum besitzt. Wir fordern nun sogar noch etwas mehr, nämlich, dass die Funktion links bis zum Maximum wächst und danach wieder monoton abfällt. Unter dieser Bedingung kann man Konsistenz von Maximum-Likelihood Schätzern zeigen.

Definition 6.23 *Sei $\Theta \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Likelihoodfunktion heißt* ***unimodal****, falls für jedes $x \in \mathfrak{X}$ ein Wert $T(x) \in \Theta$ existiert mit*

$$\begin{aligned} L_x &\text{ ist monoton wachsend auf } \{\vartheta \in \Theta : \vartheta < T(x)\} \\ L_x &\text{ ist monoton fallend auf } \{\vartheta \in \Theta : \vartheta > T(x)\}. \end{aligned}$$

Satz 6.24 *Seien $\Theta \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\mathcal{M}_n := (E^n, \mathcal{E}^{\otimes n}, (\mathbf{Q}_\vartheta^{\otimes n})_{\vartheta \in \Theta})$, $n \in \mathbb{N}$ das Produktmodell eines statistischen Standardmodells mit*

(i) $\mathbf{Q}_\vartheta \neq \mathbf{Q}_{\vartheta'}$, falls $\vartheta \neq \vartheta'$,

(ii) für hinreichend großes n gilt: für jedes $x \in E^n$ ist die Likelihoodfunktion L_x^n unimodal.

Dann ist jede Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Maximum-Likelihood Schätzern konsistent.

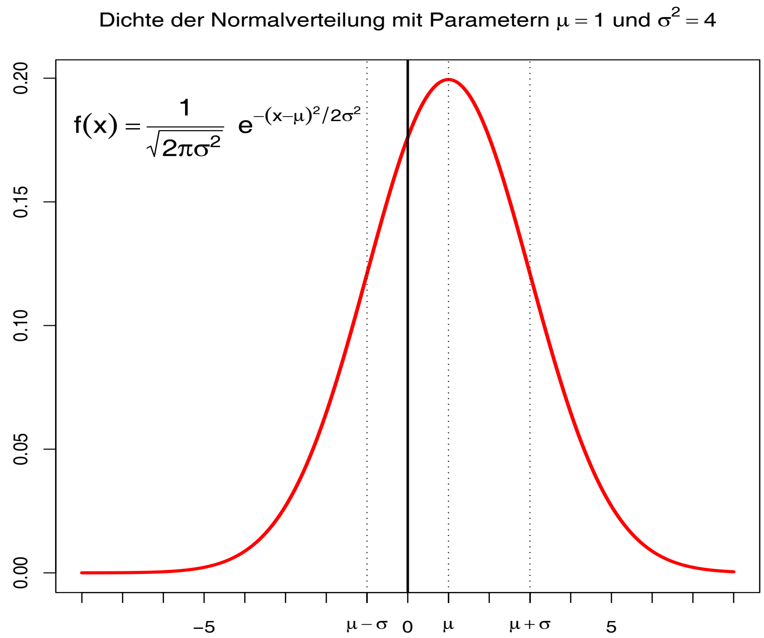
Beweis Siehe Buch von Georgii. □

Bemerkung 6.25 Andere Aussagen über die Qualität von Maximum-Likelihood Schätzern sind in dieser Allgemeinheit nicht möglich. Manche Maximum-Likelihood Schätzer sind erwartungstreu, manche nicht. Manche minimieren den mittleren quadratischen Fehler, andere nicht. ◇

Beispiel 6.26 Wir kommen jetzt noch einmal auf die Normalverteilung zurück. Seien also $E = \mathbb{R}$, $\Theta = \mathbb{R}$, $\mathbf{Q}_\vartheta = \mathcal{N}_{\vartheta,1}$. Dann ist für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $T_n(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$

$$\begin{aligned} L_x^n(\vartheta) &= (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \vartheta)^2\right) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}(T_n(x) - \vartheta)^2\right) \end{aligned}$$

unimodal mit Maximum in $\vartheta = T_n(x)$. Also ist $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konsistent. Dies hatten wir elementar allerdings auch schon in Bemerkung 6.20 gesehen. ◇



6.4 Kleinste-Quadrate Schätzer und Regression

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, salopp gesagt, ein Naturgesetz zu schätzen. Beispielsweise hängt die Auslenkung y einer hängenden Feder vom Gewicht x ab, das wir daran hängen. Dabei nehmen wir an, dass wir das Gewicht, das wir anhängen, exakt vorgeben können, jedoch können wir in einem Experiment die Auslenkung der Feder immer nur mit einem zufälligen Fehler behaftet messen. Wir wollen nun den funktionalen Zusammenhang $\theta : x \mapsto y$ experimentell herausfinden. Dabei wird die Menge Θ der in Betracht kommenden Abbildungen der Parameterbereich eines statistischen Modells.

Sei also $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ (wir könnten auch $\mathbb{R}^n$ betrachten, wollen aber die Sache möglichst einfach halten) der Parameterbereich für die einstellbare Größe, zum Beispiel die möglichen Werte für das Gewicht, das wir anhängen. Ferner sei $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}$ der Wertebereich für die Messung, im Beispiel die Auslenkung der Feder. Schließlich betrachten wir eine Teilmenge

$$\Theta \subset \mathrm{Abb}(\mathcal{P}, \mathcal{W})$$

aller Abbildungen $\mathcal{P} \to \mathcal{W}$. Beispielsweise könnte man vermuten, dass im Federbeispiel ein linearer Zusammenhang besteht zwischen Gewicht und Auslenkung, also würde man wählen

$$\begin{aligned}\Theta &= \big\{\vartheta : \mathcal{P} \to \mathcal{W} : \ \vartheta \ \text{ ist affin linear}\big\}\\ &= \big\{(\vartheta : x \mapsto mx + b) : \ m, b \in \mathbb{R}\big\}.\end{aligned}$$

Wir wollen nun n Messungen mit Parametern $x_1, \dots, x_n$ durchführen. Anders als bisher sind diese $x_1, \dots, x_n$ keine Beobachtungen, sondern vorgegebene Werte, die für den Rest des Abschnitts konstant bleiben. Die wirklich beobachteten Werte der zu messenden Größe nennen wir $y_1, \dots, y_n$. Wir nehmen an, dass diese Werte Realisierungen von Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_n$ sind. Das heißt, die Messungen sind mit einem zufälligen Fehler behaftet.

Wir geben nun ein statistisches Modell an, das unser Experiment beschreibt:

$$\mathcal{M} = \big(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}\big) = \big(\mathcal{W}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}\big).$$

Wir definieren $Y := \mathrm{id}_{\mathfrak{X}}$ und die Zufallsvariablen $Y_i : \mathcal{W}^n \to \mathcal{W}$ als die i-te Projektion, $i = 1, \ldots, n$. Damit ist $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$. Die Y übernehmen also die Rolle, die bisher die X hatten. Bei Messungen wird aber eben meist die abhängige Größe mit Y bezeichnet, deshalb weichen etwas von unserer bisherigen Notation ab.

Falls ϑ das wirklich zugrunde liegende Naturgesetz ist, sollen die Messfehler

$$\xi_i := Y_i - \vartheta(x_i)$$

die folgenden Eigenschaften haben:

- der Fehler ist nicht systematisch, also ist $\mathbf{E}_\vartheta[\xi_i] = 0$ für jedes i,
- die Fehler sind von Messung zu Messung unabhängig, das heißt $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bilden (unter $\mathbf{P}_\vartheta$) eine unabhängige Familie,
- die Verteilungen der ξ_i sollen nicht von i abhängen und auch nicht von ϑ, sondern sind allein durch die Auswahl des Messinstruments bestimmt. Es ist also

  $$\mathbf{P}_\vartheta \circ \xi_i^{-1} = Q \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta,\, i = 1, \ldots, n,$$

  für ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $\mathbb{R}$.

Man beachte, dass dieses Modell im Allgemeinen nichtparametrisch ist.

Das Ziel ist nun, das wahre Naturgesetz ϑ zu schätzen. Ein nahe liegender Versuch ist, falls $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ gilt, der empirische Maximum-Likelihood Schätzer

$$\hat{\vartheta}_e(y) := \left(x \mapsto \begin{cases} y_i, & \text{falls } x = x_i, \\ \text{beliebig}, & \text{sonst.} \end{cases} \right).$$

Unter $\hat{\vartheta}_e(y)$ ist $\mathbf{P}_{\hat{\vartheta}_e(y)}[Y = y] = 1$. Also ist $\hat{\vartheta}_e$ tatsächlich ein Maximum-Likelihood Schätzer. Das Problem ist hier wieder das selbe wie in Beispiel 6.16, nämlich, dass die Aussage, die $\hat{\vartheta}_e$ macht, völlig nutzlos ist, weil sie nur exakt das Ergebnis des Experiments wiedergibt. In einem vernünftig angelegten Experiment dürfen wir also erwarten, dass Θ von vornherein so klein gewählt wurde, dass typischerweise $\hat{\vartheta}_e(y) \notin \Theta$ gilt.

Wir nehmen also an, dass Θ nun eine Klasse von plausiblen „Naturgesetzen“ $\mathbf{P}_\vartheta$ parametrisiert. Die Idee ist nun, einen Abstand zu definieren und denjenigen Wert $\vartheta \in \Theta$ als Schätzwert zu akzeptieren, der den Abstand zu $\hat{\vartheta}_e(y)$ minimiert. Ein natürlicher Kandidat ist der euklidische Abstand

$$\|\vartheta - \vartheta'\|_{x,2} := \sqrt{\sum_{i=1}^n \big(\vartheta(x_i) - \vartheta'(x_i)\big)^2}.$$

(Der Index x soll dabei andeuten, dass der Abstand von den Parametern $x = (x_1, \ldots, x_n)$ abhängt.) Wir definieren zudem den quadratischen Fehler als

$$Q_y(\vartheta) := \sum_{i=1}^n (\vartheta(x_i) - y_i)^2.$$

Man beachte, dass, falls $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind, gilt

$$Q_y(\vartheta) = \|\vartheta - \hat{\vartheta}_e(y)\|_{x,2}^2.$$

Ziel ist es also, bei gegebener Beobachtung y, den Wert $Q_y(\vartheta)$ zu minimieren. Wir treffen daher folgende Definition.

Definition 6.27 *Ein Schätzer T für ϑ heißt* ***kleinste-Quadrate Schätzer****, falls*

$$Q_y(T(y)) = \min_{\vartheta\in\Theta} Q_y(\vartheta) \quad \text{für alle } y.$$

Satz 6.28 *Wir nehmen an, dass $Q = \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$ ist für ein $\sigma^2 > 0$. Das heißt, die $\xi_1, \dots, \xi_n$ sind unabhängig und $\mathcal{N}_{0,\sigma^2}$–verteilt. Ist T ein kleinste-Quadrate-Schätzer für ϑ, so ist T ein Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ.*

Beweis Unter $\mathbf{P}_\vartheta$ sind $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig und $\mathbf{P}_\vartheta \circ Y_i = \mathcal{N}_{\vartheta(x_i),\sigma^2}$, $i = 1, \dots, n$. Also ist die Likelihoodfunktion das Produkt der Dichten

$$L_y(\vartheta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - \vartheta(x_i))^2}{2\sigma^2}\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{Q_y(\vartheta)}{2\sigma^2}\right).$$

Dies ist offenbar genau dann maximal, wenn Q_y minimal ist. Also ist T ein Maximum-Likelihood Schätzer. □

Wir wollen jetzt den wichtigen Spezialfall untersuchen, wo Θ ein linearer Raum ist. Um die Formeln griffiger zu machen, führen wir die folgende Schreibweise ein: Für $h : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$\langle h\rangle := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_i.$$

Wir haben speziell im Sinn: $h = x$, $h = xy$, $h = x^2$ usf.

Wir betrachten jetzt also die Situation, wo $\Theta \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein endlich-dimensionaler linearer Unterraum ist. Dann ist die Einsetzungsabbildung

$$\Psi : \Theta \to \mathbb{R}^n, \qquad \vartheta \mapsto \big(\vartheta(x_1), \dots, \vartheta(x_n)\big)$$

ein Vektorraum-Homomorphismus. Mit $V := \Psi(\Theta)$ bezeichnen wir das Bild von Ψ in $\mathbb{R}^n$ und mit π_V die orthogonale Projektion $\mathbb{R}^n \to V$ (bezüglich des euklidischen Abstands auf $\mathbb{R}^n$).

Satz 6.29 (Lineare Regression) *(i) Ist Ψ injektiv, so ist*

$$T := \Psi^{-1} \circ \pi_V$$

der kleinste-Quadrate Schätzer für ϑ.

(ii) Ist speziell

$$\Theta = \big\{\vartheta :\ (x \mapsto mx + b),\ m, b \in \mathbb{R}\big\},$$

und $\#\{x_1, \dots, x_n\} \geq 2$, so ist der eindeutige kleinste-Quadrate Schätzer $T = (\hat{m}, \hat{b})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{m}(y) &= \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}, \\ \hat{b}(y) &= \frac{\langle x^2\rangle\langle y\rangle - \langle x\rangle\langle xy\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Beweis (i) Per Definition minimiert die orthogonale Projektion π_V den Abstand zum linearen Unterraum V. Die Abbildung Ψ hingegen ist eine Isometrie bezüglich der $\|\cdot\|_{x,2}$ – Norm auf Θ.

(ii) Wegen $\#\{x_1,\ldots,x_n\} \geq 2$ ist Ψ injektiv, also T wohldefiniert. Wir können T explizit ausrechnen, indem wir die Minimalstelle von

$$(m,b) \mapsto Q(m,b) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2$$

bestimmen.

Die ersten Ableitungen sind

$$D_1Q(m,b) \;=\; \frac{d}{dm}Q(m,b) \;=\; 2m\langle x^2\rangle - 2\langle xy\rangle + 2b\langle x\rangle$$

und

$$D_2Q(m,b) \;=\; \frac{d}{db}Q(m,b) \;=\; 2b - 2\langle y\rangle + 2m\langle x\rangle.$$

Damit Q minimal ist, muss $D_1Q(m,b) = D_2Q(m,b) = 0$ sein, also erhalten wir für m und b die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}\langle x^2\rangle\, m + \langle x\rangle\, b &= \langle xy\rangle\\ \langle x\rangle\, m + b &= \langle y\rangle.\end{aligned}$$

Auflösen ergibt

$$m = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{\langle x^2\rangle\langle y\rangle - \langle x\rangle\langle xy\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}.$$

Liegt hier wirklich ein Minimum vor? Wir bemerken zunächst, dass $\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 > 0$ gilt. Nun berechnen wir die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned}D_{11}Q(m,b) &= 2\langle x^2\rangle \;>\; 0,\\ D_{21}Q(m,b) &= 2\langle x\rangle,\\ D_{22}Q(m,b) &= 2.\end{aligned}$$

Also ist die Determinante der Hessematrix H^Q

$$\det\big(H^Q(m,b)\big) \;=\; D_{11}Q\cdot D_{22}Q - (D_{12}Q)^2 \;=\; 4\langle x^2\rangle - 4\langle x\rangle^2 \;>\; 0.$$

Nach dem Hurwitz-Kriterium ist also $H^Q(m,b)$ positiv definit, und damit liegt in $(\hat{m},\hat{b})$ ein isoliertes lokales Minimum vor. □

Kapitel 7

Konfidenzbereiche

Wir wollen wieder eine Größe $\tau : \Theta \to \Sigma$ schätzen. Jedoch wollen wir diesmal nicht nur einen Wert $T(x)$ angeben, der uns besonders plausibel erscheint, sondern einen ganzen Bereich $C(x) \subset \Sigma$ solcher plausibler Werte, der den wahren Wert $\tau(\vartheta)$ mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit enthält. Dieses Vorgehen ist deshalb sinnvoll, weil die Punktschätzung keine konkrete Aussage über die Qualität des geschätzten Wertes macht. Hier hingegen können wir durch Angabe des Bereichs $C(x)$ und durch Angabe der Wahrscheinlichkeit, dass $C(x)$ den Wert $\tau(\vartheta)$ enthält gleich eine quantifizierte Qualitätsaussage unserer Schätzung mitliefern.

Definition 7.1 (Konfidenzbereich) *Seien $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und $\tau : \Theta \to \Sigma$ eine zu schätzende Kenngröße. Ferner sei $\alpha \in [0,1]$ vorgegeben. Jede Abbildung $C : \mathfrak{X} \to 2^\Sigma$ mit den Eigenschaften*

(i) $\{x : C(x) \ni \tau(\vartheta)\} \in \mathcal{A}$ *für alle* $\vartheta \in \Theta$,

(ii) $\mathbf{P}_\vartheta[\{x : C(x) \ni \tau(\vartheta)\}] \geq 1 - \alpha$ *für alle* $\vartheta \in \Theta$,

*heißt **Konfidenzbereich** für τ zum **Fehlerniveau** α, bzw. zum **Konfidenzniveau** $1-\alpha$.*

*Ist speziell $\Sigma \subset \mathbb{R}$ und jedes $C(x)$ ein Intervall, so heißt C ein **Konfidenzintervall**.*

Soweit zur allgemeinen Definition. Um die Notation etwas übersichtlicher zu halten, beschränken wir uns nun auf den Fall, wo $\tau = \mathrm{id}_\Theta$ ist, also ϑ selbst geschätzt werden soll.

7.1 Konstruktion

Wie konstruiert man nun solche Bereiche $C(x)$? Wir können die Abbildung C identifizieren mit einer Teilmenge

$$C \subset \mathfrak{X} \times \Theta$$

und setzen dann

$$C(x) := \big\{\vartheta \in \Theta : (x,\vartheta) \in C\big\}$$

und

$$A(\vartheta) := \big\{x \in \mathfrak{X} : (x,\vartheta) \in C\big\}.$$

Dann ist für jedes $\vartheta \in \Theta$

$$\{x : C(x) \ni \vartheta\} = A(\vartheta).$$

Die Forderungen aus der Definition lauten also

$$A(\vartheta) \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_\vartheta[A(\vartheta)] \geq 1 - \alpha \quad \text{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

Offenbar sollte $A(\vartheta)$ möglichst klein sein. Die *Definition* des Konfidenzbereichs macht allerdings keine Aussage zur Brauchbarkeit. Speziell ist $C(x) \equiv \Theta$ natürlich ein Konfidenzbereich für jedes Niveau. Allerdings ein völlig nutzloser.

Diskreter Fall

Sind nun $\mathfrak{X}$ und Θ diskret, so können wir wie folgt vorgehen, um C zu bestimmen. Wir tragen die Zahlen $\mathbf{P}_\vartheta[\{x\}]$, $\vartheta \in \Theta$, $x \in \mathfrak{X}$, in eine Tabelle ein, x nach rechts und ϑ nach unten. Wir markieren dann in jeder Zeile (also für jedes ϑ) die n_ϑ größten Werte $\mathbf{P}_\vartheta[\{x_{\vartheta,1}\}] \geq \mathbf{P}_\vartheta[\{x_{\vartheta,2}\}] \geq \ldots$, so lange bis die Zeilensumme dieser Werte $1 - \alpha$ erreicht:

$$\sum_{i=1}^{n_\vartheta} \mathbf{P}_\vartheta[\{x_{\vartheta,i}\}] \geq 1 - \alpha.$$

Danach setzen wir

$$A(\vartheta) = \{x_{\vartheta,i} : i = 1, \ldots, n_\vartheta\}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} C(x) &= \{\vartheta \in \Theta : x \in \{x_{\vartheta,1}, \ldots, x_{\vartheta,n_\vartheta}\}\} \\ &= \{\vartheta \in \Theta : \text{der Wert } \mathbf{P}_\vartheta[\{x\}] \text{ wurde markiert}\}. \end{aligned}$$

Beispiel 7.2 In einer Urne befinden sich zehn Kugeln. Davon ist eine unbekannte Anzahl $\vartheta \in \Theta = \{0, \ldots, 10\}$ rot, die anderen Kugeln sind weiß. Durch fünffaches Ziehen mit Zurücklegen wollen wir die Anzahl der roten Kugeln schätzen mit einem Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 0.9$. Dabei wollen wir nur die Summe der gezogenen roten Kugeln berücksichtigen. Es ist also $\mathfrak{X} = \{0, \ldots, 5\}$, $\mathbf{P}_\vartheta = b_{5,\vartheta/10}$. Wir erhalten für die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}_\vartheta[\{x\}]$ die folgende Tabelle.

ϑ	$x = 0$	1	2	3	4	5	$A(\vartheta)$
10	0	0	0	0	0	1	$\{5\}$
9	0.000	0.000	0.008	0.073	0.328	0.590	$\{4,5\}$
8	0.000	0.006	0.051	0.205	0.410	0.328	$\{3,4,5\}$
7	0.002	0.028	0.132	0.309	0.360	0.168	$\{2,3,4,5\}$
6	0.010	0.077	0.230	0.346	0.260	0.078	$\{2,3,4,5\}$
5	0.031	0.156	0.312	0.312	0.156	0.031	$\{1,2,3,4\}$
4	0.078	0.260	0.346	0.230	0.077	0.010	$\{0,1,2,3\}$
3	0.168	0.360	0.309	0.132	0.028	0.002	$\{0,1,2,3\}$
2	0.328	0.410	0.205	0.051	0.006	0.000	$\{0,1,2\}$
1	0.590	0.328	0.073	0.008	0.000	0.000	$\{0,1\}$
0	1	0	0	0	0	0	$\{0\}$
$C(x)$	$\{0,\ldots,4\}$	$\{1,\ldots,5\}$	$\{2,\ldots,7\}$	$\{3,\ldots,8\}$	$\{5,\ldots,9\}$	$\{6,\ldots,10\}$	

Wir erhalten also als Konfidenzintervalle

$$\begin{aligned} C(0) &= \{0,\dots,4\} \\ C(1) &= \{1,\dots,5\} \\ C(2) &= \{2,\dots,7\} \\ C(3) &= \{3,\dots,8\} \\ C(4) &= \{5,\dots,9\} \\ C(5) &= \{6,\dots,10\}. \end{aligned}$$

◇

Stetiger Fall

Ist $\mathfrak{X} \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und hat $\mathbf{P}_\vartheta$ die Dichte f_ϑ, so wähle ein Teilintervall $A(\vartheta) = [x_\vartheta^-, x_\vartheta^+] \subset \mathfrak{X}$, wo

- f_ϑ möglichst große Werte annimmt,
- und wo $\mathbf{P}_\vartheta[A(\vartheta)] \;=\; \displaystyle\int_{x_\vartheta^-}^{x_\vartheta^+} f_\vartheta(t)\,dt \;\geq\; 1-\alpha$ gilt.

Ein solches Intervall auszuwählen, ist der Idealfall. Weil das im Allgemeinen etwas kompliziert ist, werden oftmals wir solche Intervall aussuchen, wo $\int_{-\infty}^{x_\vartheta^-} f_\vartheta(t)\,dt \;\leq\; \frac{\alpha}{2}$ und $\int_{x_\vartheta^+}^{\infty} f_\vartheta(t)\,dt \;\leq\; \frac{\alpha}{2}$ gilt. Wir wollen etwas allgemeiner auch unstetige Verteilungen (also ohne Dichte) zulassen und treffen daher die folgende Definition.

Definition 7.3 (Quantile) *Sei* $\mathbf{P}$ *eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf* $\mathbb{R}$*, und sei* $\alpha \in (0,1)$*. Jede Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *mit der Eigenschaft*

$$\mathbf{P}[(-\infty, x]] \geq \alpha \quad \textit{und} \quad \mathbf{P}[(-\infty, x)] \leq \alpha$$

heißt ein α*–**Quantil** von* $\mathbf{P}$*. Wir schreiben*

$$Q_\alpha(\mathbf{P}) = \{x : \, x \textit{ ist } \alpha\textit{–Quantil von } \mathbf{P}\}.$$

Speziell ist jedes $\frac{1}{2}$*–Quantil ein Median.*

Manchmal wird ein $(1-\alpha)$*–Quantil auch* α*–**Fraktil** genannt.*

Ist $\mathbf{P}$ eine Verteilung mit Dichte und ist x ein α–Quantil von $\mathbf{P}$, so gilt sogar die Gleichheit

$$\mathbf{P}[(-\infty, x)] = \mathbf{P}[(-\infty, x]] = \alpha.$$

Satz 7.4 *Für jedes* $\alpha \in (0,1)$ *ist* $Q_\alpha(\mathbf{P})$ *ein nichtleeres kompaktes Intervall.*

Beweis Das geht ganz genau wie der Beweis von Satz 3.35 für den Fall des Medians. □

Bemerkung Die Aussage des Satzes ist für $\alpha \in \{0,1\}$ im Allgemeinen falsch. (Warum?)

Nun wollen wir unsere Quantile auch benutzen, wenn $\mathfrak{X}$ keine Teilmenge der reellen Zahlen ist. Zu diesem Zweck müssen wir zunächst eine geeignete Statistik $T : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ finden, deren Verteilung wir leicht bestimmen können, und die möglichst viel Information über das Experiment enthält. Zu jedem $\vartheta \in \Theta$ wählen wir dann ein $\frac{\alpha}{2}$–Quantil $t_\vartheta^- \in Q_{\alpha/2}(\mathbf{P}_\vartheta \circ T^{-1})$ und ein $(1-\frac{\alpha}{2})$–Quantil $t_\vartheta^+ \in Q_{(1-\alpha/2)}(\mathbf{P}_\vartheta \circ T^{-1})$, also

$$\mathbf{P}_\vartheta\big[T < t_\vartheta^-\big] \le \frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_\vartheta\big[T > t_\vartheta^+\big] \le \frac{\alpha}{2}. \tag{7.1}$$

Tatsächlich brauchen wir nicht, dass $t_\vartheta^\pm$ exakte Quantile sind, sondern nur (7.1). Dies ist speziell dann wichtig, wenn wir die Quantile nicht genau ausrechnen können.

Wir setzen dann

$$C := \big\{(x,\vartheta) : T(x) \in [t_\vartheta^-, t_\vartheta^+]\big\}.$$

Es ist dann $A(\vartheta) = T^{-1}([t_\vartheta^-, t_\vartheta^+])$, also

$$\mathbf{P}_\vartheta[A(\vartheta)^c] \;=\; \mathbf{P}_\vartheta[T < t_\vartheta^-] + \mathbf{P}_\vartheta[T > t_\vartheta^+] \;\le\; \alpha.$$

Wir haben also den folgenden Satz gezeigt.

Satz 7.5 *Durch*

$$C(x) := \big\{\vartheta \in \Theta : t_\vartheta^- \le T(x) \le t_\vartheta^+\big\} \tag{7.2}$$

wird ein Konfidenzbereich zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ definiert. Sind die Abbildungen $\vartheta \mapsto t_\vartheta^-$ und $\vartheta \mapsto t_\vartheta^+$ monoton, dann ist $C(x)$ ein Intervall.

Beispiel 7.6 (Normalverteilung mit bekannter Varianz) Wir wollen aus n unabhängigen Beobachtungen den Erwartungswert ϑ einer Normalverteilung mit bekannter Varianz σ^2 zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ schätzen. Es ist also $\Theta = \mathbb{R}$, $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}_\vartheta = \mathcal{N}_{\vartheta,\sigma^2}^{\otimes n}$. Als Statistik wählen wir den arithmetischen Mittelwert

$$T(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Dann ist $\mathbf{P}_\vartheta \circ T^{-1} = \mathcal{N}_{\vartheta,\sigma^2/n}$. Seien Φ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}_{0,1}$ und Φ^{-1} deren Umkehrfunktion. Dann ist

$$\begin{aligned} Q_{\alpha/2}(\mathbf{P}_\vartheta \circ T^{-1}) &= \vartheta + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \vartheta - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = t_\vartheta^- \\ Q_{1-\alpha/2}(\mathbf{P}_\vartheta \circ T^{-1}) &= \vartheta + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = t_\vartheta^+. \end{aligned}$$

Den Wert $\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ kann man in Tabellen nachgucken. Offenbar sind $\vartheta \mapsto t_\vartheta^-$ und $\vartheta \mapsto t_\vartheta^+$ monoton, also bekommen wir ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ durch

$$\begin{aligned} C(x) &= \big\{\vartheta : t_\vartheta^- \le T(x) \le t_\vartheta^+\big\} \\ &= \left[T(x) - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right),\; T(x) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.3}$$

◇

7.2 Konfidenzintervalle für die Binomialverteilung

Wir wollen den Parameter $p \in [0,1]$ der Binomialverteilung $b_{n,p}$ schätzen. Da p jetzt unendlich viele Werte annehmen kann, ist das Verfahren aus Abschnitt 7.1 mit der Tabelle nicht mehr ganz praktikabel.

Wir wollen also gemäß (7.1) (mit $T(x) = x$ und mit $x_p^\pm$ statt $t_\vartheta^\pm$) für jedes p Werte x_p^- und x_p^+ angeben, für die gilt

$$b_{n,p}(\{0, \ldots, x_p^- - 1\}) \leq \frac{\alpha}{2}, \qquad b_{n,p}(\{x_p^+ + 1, \ldots, n\}) \leq \frac{\alpha}{2}. \tag{7.4}$$

Wir setzen dann

$$C(x) := \{p \in [0,1] : \, x_p^- \leq x \leq x_p^+\}. \tag{7.5}$$

Bevor wir die Werte $x_p^\pm$ konkret ausrechnen, wollen wir uns der Frage zuwenden, ob dieses $C(x)$ tatsächlich ein Intervall ist. Dazu müssen wir prüfen, dass die Abbildungen $p \mapsto x_p^-$ und $p \mapsto x_p^+$ monoton wachsend sind. Die positive Antwort gibt das folgende Lemma.

Lemma 7.7 *Für $p, p' \in [0,1]$, $p < p'$ und $x \in \{1, \ldots, n\}$ ist*

$$b_{n,p}(\{x, \ldots, n\}) \; < \; b_{n,p'}(\{x, \ldots, n\}).$$

Beweis Wir benutzen ein Kopplungsargument. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und uniform verteilt auf $[0,1]$. Für $q \in [0,1]$ setzen wir

$$X_i^q := \mathbb{1}_{[0,q]}(X_i) \quad \text{für } \; i = 1, \ldots, n,$$

sowie

$$S^q = \sum_{i=1}^n X_i^q.$$

Dann sind $X_1^q, \ldots, X_n^q$ unabhängig und Ber_q–verteilt. Also ist $S^q \sim b_{n,q}$. Nach Konstruktion ist aber auch $S^p \leq S^{p'}$. Also ist

$$\begin{aligned} b_{n,p'}\big(\{x, \ldots, n\}\big) - b_{n,p}\big(\{x, \ldots, n\}\big) \; &= \; \mathbf{P}\big[S^{p'} \geq x\big] - \mathbf{P}\big[S^p \geq x\big] \\ &= \; \mathbf{P}\big[S^{p'} \geq x, \, S^p < x\big] \\ &\geq \; \mathbf{P}\big[S^{p'} = n, \, S^p = 0\big] \\ &= \; \mathbf{P}\big[X_i \in (p, p'] \; \text{ für alle } \; i = 1, \ldots, n\big] \\ &= \; (p' - p)^n \; > \; 0. \end{aligned}$$

□

7.2.1 Normalapproximation

Wir nehmen an, dass n so groß ist, dass wir die Normalapproximation (mit Korrekturtermen!) einsetzen können

$$b_{n,p}\big(\{0, \ldots, x\}\big) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\right).$$

Es ist dann also $p_x^\pm$ so zu wählen, dass

$$b_{n,p_x^-}\big(\{0, \ldots, x-1\}\big) \approx \Phi\left(\frac{x - \frac{1}{2} - np_x^-}{\sqrt{n\,p_x^-\,(1-p_x^-)}}\right) = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$b_{n,p_x^+}\big(\{x+1, x+2, \ldots\}\big) \approx \Phi\left(\frac{x + \frac{1}{2} - np_x^+}{\sqrt{n\,p_x^+\,(1-p_x^+)}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Dann ist $C(x) = [p_x^-, p_x^+]$ ein Konfidenzintervall für p. Wir erhalten wegen $\Phi^{-1}(\alpha/2) = -\Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ für $p_x^\pm$ die Gleichungen

$$\left(x - \frac{1}{2} - p_x^-\, n\right)^2 = \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \, n\, p_x^- \,(1 - p_x^-)$$

und

$$\left(x + \frac{1}{2} - p_x^+\, n\right)^2 = \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \, n\, p_x^+ \,(1 - p_x^+).$$

Auflösen ergibt (mit $\varrho := n\Phi^{-1}(1-\alpha/2)^2$)

$$\begin{aligned} p_x^- &= \frac{2n(x-\frac{1}{2}) + \varrho - \sqrt{4n(x-\frac{1}{2})\varrho + \varrho^2 - 4\varrho(x-\frac{1}{2})^2}}{2n^2 + 2\varrho} \\ p_x^+ &= \frac{2n(x+\frac{1}{2}) + \varrho + \sqrt{4n(x+\frac{1}{2})\varrho + \varrho^2 - 4\varrho(x+\frac{1}{2})^2}}{2n^2 + 2\varrho}\,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Wir erhalten mit $p_x^\pm$ aus (7.6) also ein approximatives Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1-\alpha$ durch

$$C(x) := [p_x^-, p_x^+]. \tag{7.7}$$

Wir können (unter Inkaufnahme eines weiteren kleinen Fehlers) die Sache noch wesentlich vereinfachen, indem wir in dem Bruch in (7.6) nur die größten Terme berücksichtigen. Tatsächlich ist im Nenner das ϱ von kleinerer Größenordnung (nämlich n) als der $2n^2$-Term, wir können also den Nenner durch $2n^2$ ersetzen. Im Zähler ist $2nx$ der größte Term (nämlich von der Ordnung n^2). In der Wurzel sind die Terme $4nx\varrho$ und $4\varrho x^2$ jeweils die größten Terme, nämlich von der Ordnung n^3. Der gesamte Wurzelausdruck ist von der Ordnung $n^{3/2}$ und damit größer als das ϱ im Zähler. Nehmen wir alle diese Vereinfachungen vor, so erhalten wir die Approximation, die allerdings nur für große n gut ist:

$$p_x^\pm \approx \frac{x}{n} \pm \Phi^{-1}\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{x}{n}\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)}\,. \tag{7.8}$$

Beispiel 7.8 (i) Wir betrachten als Zahlenbeispiel $n = 20$, $x = 12$ und $\alpha = 0.05$. Der Tabelle entnehmen wir den Zahlenwert $\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.95996$. Setzen wir dies in (7.7) ein, so erhalten wir

$$[0.3641,\ 0.8002].$$

Tatsächlich kann man mit dem Computer ausrechnen, dass das Konfidenzintervall aus (7.7) für $n = 20$ und $\alpha = 5\%$ sogar das Fehlerniveau 4.5% einhält (für $p \in [0.01,\ 0.99]$).

Verwenden wir hingegen die Approximation (7.8), so bekommen wir

$$[0.3853,\ 0.8147].$$

Die Approximation ist für $n = 20$ noch nicht sehr gut, was man daran erkennt, dass das mit (7.8) bestimmte Konfidenzintervall nur das Fehlerniveau 37% einhält (sogar für $p \in [0.05,\ 0.95]$).

(ii) Als zweites Zahlenbeispiel betrachten wir $n = 50$, $x = 22$ und $\alpha = 0.02$. Der Tabelle entnehmen wir den Zahlenwert $\Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \Phi^{-1}(0.99) = 2.32635$. Setzen wir dies in (7.7) ein, so erhalten wir

$$[0.2820,\ 0.6104].$$

Das Konfidenzintervall aus (7.7) für $n = 50$ und $\alpha = 2\%$ hält nur das Fehlerniveau 2.3% ein (für $p \in [0.01,\ 0.99]$). Verwenden wir hingegen die Approximation (7.8), so bekommen wir

$$[0.2767,\ 0.6033].$$

Die Approximation ist für $n = 50$ immer noch nicht gut. Hier hält das mit (7.8) für $\alpha = 2\%$ bestimmte Konfidenzintervall nur das Fehlerniveau 15% ein (sogar für $p \in [0.05,\ 0.95]$).

(iii) Als letztes Zahlenbeispiel betrachten wir $n = 500$, $x = 400$ und $\alpha = 0.02$. Mit (7.7) erhalten wir

$$[0.7542,\ 0.8392].$$

Das so bestimme Konfidenzintervall hält das geforderte Fehlerniveau von 2% exakt ein.

Verwenden wir hingegen die Approximation (7.8), so bekommen wir

$$[0.7584,\ 0.8416].$$

In diesem Fall hält das mit (7.8) für $\alpha = 2\%$ bestimmte Konfidenzintervall immerhin schon mal das Fehlerniveau 3.5% ein (für $p \in [0.05,\ 0.95]$).

(iv) Ab $n = 10\,000$ hält das approximative Konfidenzintervall aus (7.8) das Fehlerniveau einigermaßen gut ein (für $p \in [0.05,\ 0.95]$). Dasjenige aus (7.7) ist schon ab $n = 20$ brauchbar. $\diamond$

7.2.2 Quantile der Betaverteilung

Definition 7.9 *Für $m, n > 0$ sei*

$$B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt$$

das Euler'sche Betaintegral. Die Verteilung $\beta_{m,n}$ auf $[0,1]$ mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{B(m,n)}\,x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

*heißt **Betaverteilung** mit Parametern m und n.*

Lemma 7.10 *Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist*

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Beweis Das hatten wir schon in (6.12) gezeigt. $\square$

Satz 7.11 *Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ und $x \in \{1,\ldots,n\}$ ist*

$$b_{n,p}(\{x,\ldots,n\}) = \beta_{x,n-x+1}([0,p]). \tag{7.9}$$

Beweis Wie in Lemma 7.7 seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig und uniform auf $[0,1]$ verteilt, sowie $X_i^p := \mathbb{1}_{[0,p]}(X_i)$ und $S^p = X_1^p + \ldots + X_n^p$. Ferner sei

$$N = \big\{\#\{X_1,\ldots,X_n\} = n\big\}$$

das Ereignis, dass keine zwei Zufallsvariablen den selben Wert annehmen. Da die Zufallsvariablen unabhängig sind und eine Dichte haben, hat N die Wahrscheinlichkeit 1:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[\#\{X_1,\ldots,X_n\}=n\big] \;&\geq\; 1-\sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}\big[X_i=X_j\big]\\
&\geq\; 1-\sum_{i,j=1}^n \int_0^1 dt_i \int_0^1 dt_j\, \mathbb{1}_{\{t_i=t_j\}}\\
&=\; 1.
\end{aligned}$$

Ferner sei Π_n die Gruppe der Permutationen $\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ mit neutralem Element id. Außerdem sei

$$\Pi_n^x := \big\{\sigma\in\Pi_n:\ \sigma(x)=x,\ \sigma(i)<x \ \text{ für alle } \ i<x\big\}.$$

Offenbar lässt sich jedes $\sigma\in\Pi_n^x$ in genau einer Weise durch $\sigma_1\in\Pi_{x-1}$, $\sigma_2\in\Pi_{n-x}$ darstellen:

$$\sigma(i)=\begin{cases} \sigma_1(i), & \text{falls } \ i<x,\\ x, & \text{falls } \ i=x,\\ x+\sigma_2(i-x), & \text{falls } \ i>x.\end{cases}$$

Speziell ist

$$\#\Pi_n^x \;=\; \#\Pi_{x-1}\cdot\#\Pi_{n-x} \;=\; (x-1)!\,(n-x)!.$$

Dann sind die Ereignisse

$$A_\sigma := \big\{X_{\sigma(1)}<X_{\sigma(2)}<\ldots<X_{\sigma(x)}\leq p<X_{\sigma(x+1)}<\ldots<X_{\sigma(n)}\big\},\qquad \sigma\in\Pi_n,$$

disjunkt und

$$\{S^p\geq x\}\cap N=\bigcup_{\sigma\in\Pi_n} A_\sigma.$$

Ferner ist

$$\bigcup_{\sigma\in\Pi_n^x} A_\sigma=\{\max(X_1,\ldots,X_{x-1})\leq X_x\leq\min(X_{x+1},\ldots,X_n)\}\cap\{X_x\leq p\}\cap N.$$

Aus Symmetriegründen ist für jedes $\sigma\in\Pi_n$

$$\mathbf{P}[A_\sigma]=\mathbf{P}[A_{\mathrm{id}}].$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[S^p\geq x] &= \sum_{\sigma\in\Pi_n}\mathbf{P}[A_\sigma]\\
&= n!\,\mathbf{P}[A_{\mathrm{id}}]\\
&= \frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!}\sum_{\sigma\in\Pi_n^x}\mathbf{P}[A_\sigma]\\
&= \frac{1}{B(x,n-x+1)}\mathbf{P}\big[\max(X_1,\ldots,X_{x-1})\leq X_x\leq\min(X_{x+1},\ldots,X_n) \text{ und } X_x\leq p\big]\\
&= \frac{1}{B(x,n-x+1)}\int_0^p dt_x\left(\int_0^{t_x}dt_1\cdots\int_0^{t_x}dt_{x-1}\right)\left(\int_{t_x}^1 dt_{x+1}\cdots\int_{t_x}^1 dt_n\right)\\
&= \frac{1}{B(x,n-x+1)}\int_0^p t_x^{x-1}(1-t_x)^{n-x}\,dt_x\\
&= \beta_{x,n-x+1}([0,p]).
\end{aligned}$$

□

Im folgenden Korollar setzen wir formal $\beta_{0,t} = \delta_0$ und $\beta_{t,0} = \delta_1$ für $t > 0$. Man beachte, dass in der Tat $\beta_{\varepsilon,t} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \delta_0$ und $\beta_{t,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \delta_1$ gilt. Mit dieser Festsetzung erhalten wir für die Quantile

$$Q_\gamma(\beta_{0,t}) = 0 \quad \text{und} \quad Q_\gamma(\beta_{t,0}) = 1 \quad \text{für alle } \gamma, t > 0.$$

Korollar 7.12 *Für den Erfolgsparameter p der Binomialverteilung $b_{n,p}$ erhalten wir bei Beobachtung von $x \in \{0, \ldots, n\}$ ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ durch*

$$C(x) = \big[1 - Q_{1-\alpha/2}(\beta_{n-x+1,x}),\, Q_{1-\alpha/2}(\beta_{x+1,n-x})\big]. \tag{7.10}$$

Diese Darstellung des Konfidenzintervalls ist deshalb so nützlich, weil die Quantile der Betaverteilung tabelliert sind und auch numerisch sehr leicht bestimmt werden können.

Beweis Aus der Symmetrie der Betaverteilung

$$\beta_{m,n}([0,p]) = \beta_{n,m}([1-p,1]) = 1 - \beta_{n,m}([0,1-p])$$

folgt

$$Q_{\alpha/2}(\beta_{x,n-x+1}) = 1 - Q_{1-\alpha/2}(\beta_{n-x+1,x}).$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$C(x) = \big[Q_{\alpha/2}(\beta_{x,n-x+1}),\, Q_{1-\alpha/2}(\beta_{x+1,n-x})\big]$$

ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ definiert.

(Der Vorteil der Darstellung in (7.10) liegt darin, dass die Quantile der Beta-Verteilung für Werte größer als 50% tabelliert sind, also die Werte für $Q_{1-\alpha/2}$, nicht aber für $Q_{\alpha/2}$.)

Setze nun

$$p_x^- = Q_{\alpha/2}(\beta_{x,n-x+1}) \quad \text{und} \quad p_x^+ = Q_{1-\alpha/2}(\beta_{x+1,n-x})$$

sowie

$$x_p^- = \min\{x : p_x^+ \geq p\} \quad \text{und} \quad x_p^+ = \max\{x : p_x^- \leq p\}.$$

Dann ist

$$A(p) = \{x_p^-, \ldots, x_p^+\} = \{x : C(x) \ni p\}.$$

Es reicht also zu zeigen, dass

$$b_{n,p}\big(\{x_p^+ + 1, \ldots, n\}\big) \;\leq\; \frac{\alpha}{2} \tag{7.11}$$

und

$$b_{n,p}\big(\{0, \ldots, x_p^- - 1\}\big) \;\leq\; \frac{\alpha}{2}. \tag{7.12}$$

Für $x > x_p^+$ ist $p < p_x^-$ also nach Satz 7.11

$$b_{n,p}\big(\{x, \ldots, n\}\big) \;=\; \beta_{x,n-x+1}([0,p]) \;<\; \frac{\alpha}{2}.$$

Analog ist für $x < x_p^-$ dann $p > p_x^+$, also

$$b_{n,p}\big(\{0, \ldots, x\}\big) \;=\; 1 - \beta_{x+1,n-x}([0,p]) \;<\; \frac{\alpha}{2}. \qquad \square$$

Beispiel 7.13 (i) Wir betrachten $n = 20$, $x = 12$ und $\alpha = 0.05$. Der Tabelle entnehmen wir die Zahlenwerte $Q_{0.975}(\beta_{9,12}) = 0.6395$ und $Q_{0.975}(\beta_{13,8}) = 0.8081$. So erhalten wir als 95%-Konfidenzintervall

$$[0.3605,\ 0.8081].$$

(ii) Als zweites Zahlenbeispiel sei $n = 50$, $x = 22$ und $\alpha = 0.02$. Der Tabelle entnehmen wir die Zahlenwerte $Q_{0.99}(\beta_{29,22}) = 0.723$ und $Q_{0.99}(\beta_{23,28}) = 0.612$. Als 99%-Konfidenzintervall erhalten wir

$$[0.277,\ 0.612].$$

(iii) Als letztes Zahlenbeispiel betrachten wir $n = 500$, $x = 400$ und $\alpha = 0.02$. Die Quantile der Beta-Verteilung sind für so große Zahlen nicht tabelliert. Jedoch können wir mit dem Computer, etwa mit dem Statistik-Paket R, die Zahlenwerte bestimmen: $Q_{0.99}(\beta_{101,400}) = 0.2449439$ und $Q_{0.99}(\beta_{401,100}) = 0.8400809$. Als 99%-Konfidenzintervall erhalten wir

$$[0.7551,\ 0.8401].$$

Man vergleiche die Zahlenwerte mit den approximativ ermittelten aus Beispiel 7.8. $\diamond$

7.3 Normalverteilung mit unbekannter Varianz

Wir haben bereits in Beispiel 7.6 das Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung bei bekannter Varianz σ^2 kennen gelernt (siehe (7.3)). Das Ziel dieses Abschnitts ist es, ein entsprechendes Konfidenzintervall für den Erwartungswert anzugeben, wenn die Varianz nicht bekannt ist. Wir müssen hierzu weiter ausholen und verschiedene Verteilungen definieren, sowie deren Zusammenhang mit der Normalverteilung diskutieren.

Definition 7.14 *Seien $Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und $\mathcal{N}_{0,1}$–verteilt.*

*(i) Die Verteilung von $S_n := Y_1^2 + \ldots + Y_n^2$ heißt **Chi-Quadrat Verteilung** mit n Freiheitsgraden, kurz χ_n^2.*

*(ii) Die Verteilung von $\dfrac{Y_0}{\sqrt{\frac{1}{n}S_n}}$ heißt **t-Verteilung** mit n Freiheitsgraden, kurz t_n.*

*(iii) Für $a, t > 0$ ist die **Gammaverteilung** mit Formparameter t und Größenparameter a, kurz $\Gamma_{a,t}$–Verteilung, diejenige Verteilung auf $[0, \infty)$ mit Dichtefunktion*

$$f_{a,t}(x) = \frac{a^t}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-ax}, \qquad x \geq 0. \tag{7.13}$$

Dabei ist $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$ die Gammafunktion.

Satz 7.15 *(i) Für $a, s, t > 0$ ist* $\Gamma_{a,t} * \Gamma_{a,s} = \Gamma_{a,s+t}$.

(ii) Es gilt $\chi_n^2 = \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{n}{2}}$.

(iii) Die t_n–Verteilung hat die Dichte

$$f_n(x) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)\sqrt{n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{7.14}$$

Dabei ist $B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$.

(iv) Es gilt $\mathcal{N}_{0,1} = \mathrm{w} - \lim_{n\to\infty} t_n$.

Beweis Dies findet man in den einschlägigen Lehrbüchern. □

Sei A eine orthogonale (reelle) $n \times n$–Matrix, wir schreiben $A \in O(n)$, das heißt, die Zeilenvektoren bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist bekanntermaßen $\det(A) \in \{-1,+1\}$ und ebenfalls $A^{-1} \in O(n)$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $Ax \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j$. Bekanntermaßen ist $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ und $\|A^{-1}y\|_2 = \|y\|_2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Wir definieren nun für einen Zufallsvektor $X = (X_1,\ldots,X_n)^T$ den Zufallsvektor $Y = (Y_1,\ldots,Y_n)^T = AX$ eben durch

$$Y_i = \sum_{j=1}^n A_{i,j}X_j.$$

Lemma 7.16 *Sind $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig und $\mathcal{N}_{0,\sigma^2}$–verteilt, und ist $A \in O(n)$ sowie $Y = AX$, so sind $Y_1,\ldots,Y_n$ unabhängig und $\mathcal{N}_{0,\sigma^2}$–verteilt.*

Beweis Die Verteilung von X hat als Dichte f_X, das Produkt der Dichten f_{X_i} der $\mathbf{P}_{X_i}$, also

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-x_i^2/2\sigma^2} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{2\sigma^2}\right).
\end{aligned}$$

Die Dichtetransformationsformel (Satz 1.62) liefert nun die Dichte f_Y von Y

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{f_X(A^{-1}y)}{|\det(A)|} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|A^{-1}y\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|y\|_2^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= f_X(y).
\end{aligned}$$

Da Y die selbe Dichte wie X hat, gilt $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$. Das ist aber die Behauptung. □

Lemma 7.17 *Es existiert eine orthogonale Matrix $A \in O(n)$ mit*

$$A_{1,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \textit{für } j = 1, \dots, n.$$

Beweis Setze $a^1 = (n^{-1/2}, \dots, n^{-1/2})^T$, $a^2 = (0,1,0,\dots,0)^T$, $a^3 = (0,0,1,0,\dots,0)^T$,..., $a^n = (0,\dots,0,1)^T$. Wende auf diese Vektoren das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren an. So erhält man eine Orthonormalbasis $\hat{a}^1, \dots, \hat{a}^n$, wobei $\hat{a}^1 = a_1$. Setze nun $A_{i,j} = \hat{a}^i_j$. □

Zur Erinnerung: Als erwartungstreue Schätzer für Erwartungswert μ und Varianz σ^2 der Normalverteilung hatten wir berechnet

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$
$$V^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2.$$

Satz 7.18 *Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$–verteilt. Dann gilt:*

(i) M und V^* sind unabhängige Zufallsvariablen.

(ii) Die Verteilungen von M und V^* sind $M \sim \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2/n}$ und $\frac{n-1}{\sigma^2} V^* \sim \chi^2_{n-1}$.

(iii)
$$T_\mu := \frac{\sqrt{n}\,(M-\mu)}{\sqrt{V^*}} \sim t_{n-1}. \tag{7.15}$$

Beweis Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\mu = 0$ gilt.

(i) Wähle nun A wie in Lemma 7.17 und $Y = AX$. Dann ist

$$M = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1,$$

und wegen $\|Y\|_2^2 = \|X\|_2^2$ ist

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - M)^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{n}{n-1} M^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{n}{n-1} \frac{1}{n} Y_1^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2. \end{aligned}$$

Da $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig sind, sind M und V^* unabhängig.

(ii) Offenbar ist $M \sim \mathcal{N}_{0,\sigma^2/n}$. Da $Y_2, \dots, Y_n \sim \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$ ist, folgt (ii).

(iii) Offenbar ist $\sqrt{n}\,M = Y_1$. Nach (i) und (ii) sind $(\sigma^2)^{-1/2}\sqrt{n}\,M \sim \mathcal{N}_{0,1}$ und $\frac{n-1}{\sigma^2}V^* \sim \chi^2_{n-1}$ unabhängig, also ist

$$T_0 = \frac{(\sigma^2)^{-1/2}\,\sqrt{n}\,M}{\sqrt{(\sigma^2)^{-1}\,V^*}} \sim t_{n-1}$$

nach Definition der t_{n-1}–Verteilung (Definition 7.14), es folgt also (iii). □

Wir wollen nun das Schätzproblem betrachten. Sei $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathcal{N}^{\otimes n}_{\mu,\sigma^2})_{(\mu,\sigma^2)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)})$. Unser Ziel ist es, ein Konfidenzintervall für μ anzugeben. Die Statistik

$$T_\mu(x) := \frac{\sqrt{n}\,(M(x)-\mu)}{\sqrt{V^*(x)}}$$

hat eine von σ^2 nicht abhängende Verteilung und eignet sich daher zur Konstruktion eines Konfidenzintervalls.

Satz 7.19 (Konfidenzintervall für die Normalverteilung bei unbekannter Varianz) *Sei*

$$\mathcal{M} = \Big(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\, (\mathcal{N}^{\otimes n}_{\mu,\sigma^2})_{(\mu,\sigma^2)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)}\Big)$$

das statistische Modell von n unabhängigen Beobachtungen, die normalverteilt sind mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Betrachte die erwartungstreuen Schätzer für Erwartungswert und Varianz:

$$M(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \quad \textit{und} \quad V^*(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \big(x_i - M(x)\big)^2.$$

Seien $\alpha \in (0,1)$ und $Q_{1-\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1}) = -Q_{\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1})$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$–Quantil der t_{n-1}–Verteilung. Dann definiert

$$C(x) = \left[M(x) - \frac{\sqrt{V^*(x)}}{\sqrt{n}}Q_{1-\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1}),\ M(x) + \frac{\sqrt{V^*(x)}}{\sqrt{n}}Q_{1-\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1})\right] \tag{7.16}$$

ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$.

Beweis Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}[C(X) \not\ni \mu] \\
&\quad = \mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left[\mu < M - \frac{\sqrt{V^*}}{\sqrt{n}}\,Q_{1-\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1})\right] + \mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left[\mu > M + \frac{\sqrt{V^*}}{\sqrt{n}}\,Q_{1-\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1})\right] \\
&\quad = 2\,\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left[\mu < M - \frac{\sqrt{V^*}}{\sqrt{n}}\,Q_{1-\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1})\right] \\
&\quad = 2\,\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2}\left[(M-\mu)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{V^*}} > Q_{1-\frac{\alpha}{2}}(t_{n-1})\right] = 2\cdot\frac{\alpha}{2} = \alpha,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 7.18(iii) ausgenutzt haben. □

Kapitel 8

Statistische Tests

8.1 Begriffsbildung und Beispiele

Beispiel 8.1 Die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante Alpha hat einen Zahlenwert von

$$a_0 \approx \frac{1}{137.036}.$$

Der genaue Wert ist bis auf 10^{-15} genau bekannt. Nun behaupten gewisse australische Astronomen, dass Alpha früher einen anderen Wert gehabt habe (SÜDDEUTSCHE ZEITUNG VOM 11.02.04):

> Die Währung der Physik, das System der Naturkonstanten, scheint zu schwanken. [...] Das jedenfalls behauptet seit fünf Jahren ein internationales Astronomenteam unter der Leitung des australischen Physikers John Webb, das die Lichtspektren entfernter Sterne beobachtet. [...] Vor zehn Milliarden Jahren lag Alpha näher bei eins durch 137.037, behaupten die australischen Astronomen.

Wir wollen hier nicht das genaue Datenmaterial der Forscher um Webb untersuchen, sondern nur das etwaige Vorgehen betrachten.

Es gibt also eine konservative Meinung, die die so genannte Nullhypothese H_0 vertritt, dass der Wert von a vor 10^{10} Jahren genau der Wert $a = a_0$ war:

$$H_0 = „a = a_0“.$$

Dagegen gibt es eine neue Meinung, die Gegenhypothese H_1, die besagt, dass a früher den Wert $a_1 = \frac{1}{137.037} < a_0$ hatte:

$$H_1 = „a = a_1“.$$

Wir wollen nun die alte Hypothese gegen die Alternative mit einem Experiment testen. Dabei wollen wir sicher sein, dass wir auf Grund zufälliger Messfehler die Hypothese H_0 höchstens mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von α, zum Beispiel $\alpha = 0.05$, verwerfen, obwohl sie gültig ist.

Wir nehmen an, dass die Messungen $X_1, \ldots, X_n$ der Gruppe um Webb unabhängig sind und $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$–verteilt, wobei wir auch annehmen, dass σ^2 bekannt ist. (Eine Variante bei unbekanntem σ^2 werden wir später noch kennen lernen. Typischerweise ist σ^2 in der Tat unbekannt, aber wir wollen hier die Dinge simpel halten.)

Dabei ist a der wahre Wert von Alpha vor 10^{10} Jahren. Wir setzen

$$M := \frac{1}{n}\big(X_1 + \ldots + X_n\big)$$

und verwerfen H_0, wenn

$$M < K$$

gilt, wobei wir die Zahl $K \in \mathbb{R}$ noch bestimmen müssen.

Damit wir das Fehlerniveau α einhalten können, muss gelten

$$\mathbf{P}_{H_0}[M < K] \leq \alpha.$$

Unter der Hypothese H_0 ist $M \sim \mathcal{N}_{a_0,\sigma^2/n}$, also muss gelten (mit Φ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}_{0,1}$)

$$1 - \Phi\left(\frac{K - a_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \leq \alpha.$$

Das maximale K, das dies erfüllt, ist

$$K \;=\; a_0 + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\;\Phi^{-1}(\alpha) = a_0 - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\;\Phi^{-1}(1-\alpha). \tag{8.1}$$

Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass wir H_0 auch tatsächlich verwerfen, wenn H_1 gilt? Unter H_1 ist $M \sim \mathcal{N}_{a_1,\sigma^2}$, also

$$\mathbf{P}_{H_1}[M < K] = \Phi\left(\frac{K - a_1}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right).$$

Diese Größe bezeichnen wir als Macht oder Schärfe des Tests. ◇

Wir wollen jetzt die wichtigsten Begriffe statistischer Tests definieren.

Definition 8.2 (Test) *Sei $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell. Seien $\Theta_0 \subset \Theta$ und $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.*

*(i) Wir nennen Θ_0 die **Nullhypothese** (H_0) und Θ_1 die **Gegenhypothese** oder **Alternative**. Die Hypothese (Alternative) heißt **einfach**, falls $\#\Theta_0 = 1$ (beziehungsweise $\#\Theta_1 = 1$), und sonst **zusammengesetzt**.*

*(ii) Eine Statistik $\varphi : \mathfrak{X} \to [0,1]$ heißt **Test** (für Θ_0 gegen Θ_1). Ist $\varphi(x) \in \{0,1\}$ für alle $x \in \mathfrak{X}$, so heißt φ **nichtrandomisiert**, ansonsten heißt φ **randomisiert**.*

(iii) Ist φ ein nichtrandomisierter Test, so heißt

$$R := \{x \in \mathfrak{X} :\; \varphi(x) = 1\}$$

*der **Ablehnungsbereich** oder **Verwerfungsbereich** von φ.*

(iv) Ist $\alpha \in [0,1]$ und

$$\sup_{\vartheta\in\Theta_0} \mathbf{E}_\vartheta[\varphi] \leq \alpha,$$

*so heißt φ ein Test zum **Niveau** α. Die Zahl $\sup_{\vartheta\in\Theta_0} \mathbf{E}_\vartheta[\varphi]$ heißt maximale Wahrscheinlichkeit für einen **Fehler 1. Art** (fälschliches Verwerfen der Nullhypothese), oder **effektives Niveau**, des Tests.*

(v) Die Abbildung

$$\vartheta \mapsto \mathcal{G}_\varphi(\vartheta) := \mathbf{E}_\vartheta[\varphi]$$

heißt ***Gütefunktion*** *des Tests. Für $\vartheta \in \Theta_1$ heißt $\mathcal{G}_\varphi(\vartheta)$ die Macht des Tests und $1 - \mathcal{G}_\varphi(\vartheta)$ die Wahrscheinlichkeit für einen* ***Fehler 2. Art*** *(fälschliches Beibehalten der Nullhypothese).*

(vi) Ist $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in (0,1)}$ eine Familie von nichtrandomisierten Tests mit effektiven Niveaus α und $\varphi_\alpha \le \varphi_{\alpha'}$ für $\alpha \le \alpha'$, so heißt für jedes $x \in \mathfrak{X}$ die Zahl

$$p(x) := \inf\big\{\alpha > 0 : \varphi_\alpha(x) = 1\big\}$$

*der p-**Wert** von x.*

Bemerkung 8.3 Das Ergebnis $\varphi(x) = 1$ wird als Ablehnung der Nullhypothese zugunsten der Alternative interpretiert. Sehen wir $\varphi(x) = 0$, so behalten wir die Hypothese bei. Bei Zwischenwerten $\varphi(x) \in (0,1)$ wird durch einen weiteren Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ entschieden, ob die Nullhypothese verworfen wird.

Wir können also aus einem randomisierten Test φ einen nichtrandomisierten Test $\tilde{\varphi}$ gleicher Güte herstellen, indem wir das statistische Modell $\mathcal{M} = (\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ um eine uniform auf $[0,1]$ verteilte Zufallsvariable Y erweitern zu $\tilde{\mathcal{M}} = (\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathcal{A}}, (\tilde{\mathbf{P}}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ mit

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \times [0,1], \qquad \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}([0,1]), \qquad \tilde{\mathbf{P}}_\vartheta = \mathbf{P}_\vartheta \otimes \mathcal{U}_{[0,1]}.$$

Durch

$$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathfrak{X}} \to \{0,1\}, \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } y \le \varphi(x), \\ 0, & \text{falls } y > \varphi(x), \end{cases} \tag{8.2}$$

wird dann ein nichtrandomisierter Test definiert mit $\mathcal{G}_{\tilde{\varphi}} = \mathcal{G}_\varphi$. ◇

In Beispiel 8.1 ist $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}_\vartheta = \mathcal{N}_{\vartheta,\sigma^2}^{\otimes n}$, $\vartheta \in \Theta = \{a_0, a_1\}$, und $\Theta_0 = \{a_0\}$, $\Theta_1 = \{a_1\}$. Also sind H_0 und H_1 einfach. Als nichtrandomisierter Test diente die Abbildung

$$\varphi_\alpha : \mathfrak{X} \to \{0,1\}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } M(x) < c_\alpha, \\ 0, & \text{falls } M(x) \ge c_\alpha, \end{cases} \tag{8.3}$$

mit

$$c_\alpha \;=\; a_0 + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}(\alpha) \;=\; a_0 - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Der Verwerfungsbereich ist also $R = \{x \in \mathbb{R}^n : M(x) < c_\alpha\}$. Das Niveau ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{a_0}[\varphi_\alpha] &= \mathbf{P}_{a_0}[\varphi_\alpha = 1] \\ &= \mathbf{P}_{a_0}[M < c_\alpha] \\ &= \mathcal{N}_{a_0,\sigma^2/n}((-\infty, c_\alpha)) = \alpha, \end{aligned}$$

nach Wahl von c_α. Die Macht in a_1 ist

$$\mathbf{P}_{a_1}[M < c_\alpha] = \mathcal{N}_{a_1,\sigma^2/n}((-\infty, c_\alpha)) \;=\; \Phi\left(\frac{a_0 - a_1}{\sqrt{\sigma^2/n}} + \Phi^{-1}(\alpha)\right) \;=\; \Phi\left(\frac{a_0 - a_1}{\sqrt{\sigma^2/n}} - \Phi^{-1}(1-\alpha)\right).$$

Wenn wir für den Fehler 2. Art höchstens die Wahrscheinlichkeit β zulassen, ist die Schärfe mindestens $1 - \beta$, also gilt

$$1 - \beta = \Phi\left(\frac{a_0 - a_1}{\sqrt{\sigma^2/n}} - \Phi^{-1}(1-\alpha)\right).$$

Auflösen nach n ergibt für die **Fallzahlplanung**

$$n = \sigma^2 \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\beta) + \Phi^{-1}(1-\alpha)}{a_1 - a_0} \right)^2 . \tag{8.4}$$

Offenbar ist $\alpha \mapsto c_\alpha$ monoton wachsend, also ist auch $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$ monoton wachsend. Für $x \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir daher den p–Wert durch

$$M(x) \;=\; c_{p(x)} \;=\; a_0 + \sqrt{\sigma^2/n}\;\Phi^{-1}(p(x)),$$

also

$$p(x) = \Phi\left(\frac{M(x) - a_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right). \qquad \diamond$$

8.2 Beispiele für Tests

8.2.1 Binomialtest

Wir beginnen mit einem Beispiel zum Binomialtest und bringen dann systematisch die einzelnen Fälle.

Beispiel 8.4 (Fortführung des Koboldbeispiels) In Beispiel 6.1 ist $\mathfrak{X} = \{0, \ldots, 200\}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathfrak{X}}$, $\mathbf{P}_p = b_{200,p}$, $p \in \Theta = [0, 1/7]$, sowie $\Theta_0 = \{1/7\}$ und $\Theta_1 = [0, 1/7)$. Als plausibler Test bot sich an:

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{0,\ldots,c_\alpha\}}(x),$$

wobei $c_\alpha \in \{0, \ldots, 200\}$ geeignet zu wählen ist, so dass

$$\sup_{p \in \Theta_0} \mathbf{E}_p[\varphi] = b_{200,1/7}(\{0, \ldots, c_\alpha\}) \le \alpha$$

gilt. Für $\alpha = 0.05$ erhalten wir etwa

$$b_{200,1/7}(\{0, \ldots, 20\}) = 0.0466 \quad \text{und} \quad b_{200,1/7}(\{0, \ldots, 21\}) = 0.0723.$$

Der Test $\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{0,\ldots,20\}}(x)$ hält also das Niveau $\alpha = 0.05$ ein. In der Tat hat der Test das effektive Niveau 0.0466. Wenn wir das Niveau vollkommen ausschöpfen wollen, können wir bei der Beobachtung $x = 21$ noch einen (unfairen) Münzwurf mit Erfolgswahrscheinlichkeit

$$\gamma = \frac{\alpha - b_{200,1/7}(\{0, \ldots, 20\})}{b_{200,1/7}(\{21\})} = \frac{0.05 - 0.0466}{0.0723 - 0.0466} = 0.132$$

durchführen. Wir erhalten also als randomisierten Test mit effektivem Niveau $\alpha = 0.05$

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x < 21, \\ 0.132, & \text{falls } x = 21, \\ 0, & \text{falls } x > 21. \end{cases}$$

Angenommen, wir haben $x = 15$ beobachtet. Wie groß ist dann der p-Wert? Dazu bestimmen wir das kleinste $\alpha > 0$, so dass ein (nicht-randomisierter) Test $\varphi_\alpha = \mathbb{1}_{\{0,\ldots,c_\alpha\}}$, der das Niveau α einhält, bei Beobachtung von $x = 15$ noch H_0 verwirft. Damit $\varphi_\alpha(15) = 1$ gilt, muss $c_\alpha \ge 15$ sein. Also gilt

$$\alpha \ge b_{200,1/7}(\{0, \ldots, c_\alpha\}) \ge b_{200,1/7}(\{0, \ldots, 15\}).$$

Das kleinste α, das diese Ungleichung erfüllt, ist offenbar $\alpha = b_{200,1/7}(\{0, \ldots, 15\})$. Also ist der p-Wert

$$p(15) = b_{200,1/7}(\{0, \ldots, 15\}) = 0.0023. \qquad \diamond$$

Binomialtest: Der allgemeine Fall

Etwas allgemeiner als im vorangehenden Beispiel betrachten wir $\mathfrak{X} = \{0, \ldots, n\}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathfrak{X}}$ und $\mathbf{P}_p = b_{n,p}$, $p \in \Theta \subset [0,1]$. Der Einfachheit halber sei $\Theta_0 = \{p_0\}$, für ein $p_0 \in (0,1)$.

(i) Linksseitige Alternative. Sei $\Theta_1 \subset [0, p_0)$ links von p_0 gelegen. Dann ist ein plausibler Test $\varphi(x) = \mathbb{1}_{\{0,\ldots,c_\alpha\}}(x)$, wobei

$$c_\alpha = \max\big\{x : \, b_{n,p_0}(\{0, \ldots, x\}) \le \alpha\big\}. \tag{8.5}$$

Der p-Wert beträgt, ähnlich wie im Kobold-Beispiel,

$$p(x) = b_{n,p_0}(\{0, \ldots, x\}). \tag{8.6}$$

Wie in Satz 7.11 gezeigt, können wir c_α auch durch die Quantile der Beta-Verteilung ausdrücken:

$$c_\alpha = \max\big\{x : \, Q_{1-\alpha}(\beta_{x+1,n-x}) < p_0\big\}. \tag{8.7}$$

Ist etwa $n = 30$, $p = 0.3$ und $\alpha = 0.01$, so lesen in der Tabelle der Quantile der 99%-Quantile der β-Verteilung nach:

$$Q_{0.99}(\beta_{3+1,27}) = 0.298 < 0.3 \quad \text{und} \quad Q_{0.99}(\beta_{4+1,26}) = 0.34 > 0.3.$$

Damit folgt $c_{0.01} = 3$. In der Tat rechnet man leicht nach, dass

$$b_{30,0.3}(\{0,1,2,3\}) = 0.0093 < 0.01 \quad \text{und} \quad b_{30,0.3}(\{0,1,2,3,4\}) = 0.03 > 0.01$$

ist.

Für große n ist die β-Verteilung nicht tabelliert. Hier muss man ein Statistikprogramm benutzen, oder die Normalapproximation verwenden. Normalapproximation liefert

$$c_\alpha \approx np_0 - \sqrt{np_0(1-p_0)}\, \Phi^{-1}(1-\alpha) \tag{8.8}$$

sowie als p-Wert

$$p(x) \approx 1 - \Phi\left(\frac{np_0 - x}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right). \tag{8.9}$$

Im Kobold-Beispiel ergibt diese Approximation

$$c_{0.05} \approx \frac{200}{7} - \sqrt{200 \cdot 6/49}\, \Phi^{-1}(0.95) = 20.43.$$

Abgerundet erhalten wir also $c_{0.05} = 20$, wie in der exakten Rechnung. Für die Beobachtung $x = 15$ erhalten wir als p-Wert

$$p(15) \approx 1 - \Phi\left(\frac{(200/7) - 15}{\sqrt{200 \cdot 6/49}}\right) = 1 - \Phi(2.74) = 1 - 0.99693 = 0.00307.$$

Dieser Wert weicht allerdings schon von dem exakten Wert ab (siehe Beispiel 8.4).

(ii) Rechtsseitige Alternative. Hier ist $\Theta_1 \subset (p_0, 1]$ und $\varphi = \mathbb{1}_{\{C_\alpha,\ldots,n\}}$. Analog zu den obigen Betrachtungen erhalten wir

$$C_\alpha = \min\big\{x : \, b_{n,p_0}(\{x, \ldots, n\}) \le \alpha\big\} \tag{8.10}$$

und

$$p(x) = b_{n,p_0}(\{x, \dots, n\}). \tag{8.11}$$

Zur konkreten Berechung kann bei kleinem n die β-Verteilung herangezogen werden:

$$C_\alpha = \min\{x : \, Q_{1-\alpha}(\beta_{n-x+1,x}) < 1 - p_0\}. \tag{8.12}$$

Für große n liefert die Normalapproximation

$$C_\alpha \approx np_0 + \sqrt{np_0(1-p_0)}\, \Phi^{-1}(1-\alpha) \tag{8.13}$$

und

$$p(x) \approx 1 - \Phi\left(\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right). \tag{8.14}$$

(iii) Beidseitige Alternative. Hier ist $\Theta_1 \cap [0, p_0) \neq \emptyset$ und $\Theta_1 \cap (p_0, 1] \neq \emptyset$. Der Test sollte nun bei besonders großen und bei besonders kleinen Beobachtungen die Nullhypothese verwerfen. Das heißt

$$\varphi = \mathbb{1}_{\{0,\dots,c_{\alpha/2}\}} + \mathbb{1}_{\{C_{\alpha/2},\dots,n\}}.$$

Dabei sind $c_{\alpha/2}$ und $C_{\alpha/2}$ die kritischen Werte für den links- bzw. rechtsseitigen Test zum Niveau $\alpha/2$. Es gilt also für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art:

$$\mathbf{P}_{p_0}[\varphi = 1] = b_{n,p_0}(\{0, \dots, c_{\alpha/2}\}) + b_{n,p_0}(\{C_{\alpha/2}, \dots, n\}) \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Das heißt, der Test φ hält das Niveau α ein.

Als p-Wert erhalten wir

$$p(x) = 2\, b_{n,p_0}(\{0, \dots, x\}) \quad \text{für } \ x < np_0 \tag{8.15}$$

und

$$p(x) = 2\, b_{n,p_0}(\{x, \dots, n\}) \quad \text{für } \ x > np_0. \tag{8.16}$$

Normalapproximation liefert für große n

$$p(x) \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{|x - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)\right). \tag{8.17}$$

8.2.2 Gaußtest

Eine einfache Konstruktion von Tests erhalten wir durch Konfidenzbereiche.

Satz 8.5 (Tests via Konfidenzbereiche) *Seien $(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und $\Theta_0 \subset \Theta$ sowie $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Ferner sei $\alpha \in (0,1)$ und $C : \mathfrak{X} \to 2^\Theta$ ein Konfidenzbereich zum Fehlerniveau α. Dann ist*

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1, & \textit{falls } \ C(x) \cap \Theta_0 = \emptyset, \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases} \tag{8.18}$$

ein nichtrandomisierter Test zum Niveau α.

Beweis Für $\vartheta \in \Theta_0$ ist nach Definition des Konfidenzintervalls

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\vartheta[\varphi = 1] &= \mathbf{P}_\vartheta[\{x : C(x) \cap \Theta_0 = \emptyset\}] \\ &\leq \mathbf{P}_\vartheta[\{x : C(x) \not\ni \vartheta\}] \\ &\leq \alpha.\end{aligned}$$

□

Wir verwenden diese Konstruktion von Tests für die Normalverteilung mit bekannter Varianz und (in Abschnitt 8.2.3) mit unbekannter Varianz.

Gaußtest: Normalverteilung mit bekannter Varianz

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$-verteilt mit bekanntem $\sigma^2 > 0$ und unbekanntem μ. Die Nullhypothese ist $\Theta_0 = \{\mu_0\}$ für ein $\mu_0 \in \mathbb{R}$.

(i) Zweiseitige Alternative. Sei die Alternative **zweiseitig**, also etwa $\Theta_1 = \mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}$ oder $\Theta_1 = \{\mu : |\mu - \mu_0| \geq a\}$ für einen Indifferenzabstand $a > 0$. Ferner sei $M(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$. Dann ist ein Konfidenzintervall zum Fehlerniveau α

$$C(x) := \left[M(x) - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right),\ M(x) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Setze

$$T(x) := \frac{M(x) - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}.$$

Dann ist

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |T(x)| > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{8.19}$$

der Test für Θ_0 gegen Θ_1 zum Niveau α, der auf das obige Konfidenzintervall zurückgeht.

Als p-Wert erhalten wir

$$p(x) = 2\big(1 - \Phi(|T(x)|)\big) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\big|\mu_0 - M(x)\big|}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)\right) \tag{8.20}$$

(ii) Linksseitige Alternative. Sei nun die Alternative linksseitig, also $\Theta_0 = \{\mu_0\}$, oder $\Theta_0 = [\mu_0, \infty)$ und $\Theta_1 = \{\mu_1\}$ für ein $\mu_1 < \mu_0$ oder allgemeiner $\Theta_1 \subset (-\infty, \mu_0)$. Nach Satz 8.5 ist φ aus (8.19) ein Test für Θ_0 gegen Θ_1 zum Niveau α. Da man aber die zusätzliche Information hat, dass die Alternative auf der linken Seite ist, kann man auf einen schärferen Test zum Niveau α hoffen, wenn man H_0 nur dann verwirft, wenn $T(X)$ besonders *kleine* Werte annimmt. Definiere also (merke: $\Phi(\alpha) = -\Phi(1 - \alpha)$)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) < -\Phi^{-1}(1 - \alpha), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8.21}$$

Dann ist φ ein Test für Θ_0 gegen Θ_1 zum Niveau α. Formal geht dieser Test auf das Konfidenzintervall $\Big[M(x) - \sqrt{\sigma^2/n}\,\Phi^{-1}(1 - \alpha),\ \infty\Big)$ zurück.

Als p-Wert erhalten wir

$$p(x) = 1 - \Phi(-T(x)) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - M(x)}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \tag{8.22}$$

(iii) Rechtsseitige Alternative. Sei schließlich die Alternative rechtsseitig, also $\Theta_0 = \{\mu_0\}$, oder $\Theta_0 = (-\infty, \mu_0]$ und $\Theta_1 = \{\mu_1\}$ für ein $\mu_1 > \mu_0$ oder allgemeiner $\Theta_1 \subset (\mu_0, \infty)$. Setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > \Phi^{-1}(1-\alpha), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8.23}$$

Dann ist φ ein Test für Θ_0 gegen Θ_1 zum Niveau α. Formal geht dieser Test auf das Konfidenzintervall $\Big(-\infty,\ M(x) + \sqrt{\sigma^2/n}\ \Phi^{-1}(1-\alpha)\Big]$ zurück.

Als p-Wert erhalten wir

$$p(x) = 1 - \Phi(T(x)) = 1 - \Phi\left(\frac{M(x) - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \tag{8.24}$$

(iv) Resumé. In jedem der Fälle (i), (ii), (iii) ist der angegebene Test ein Test, der das Niveau α einhält und zwar unabhängig davon, welche Alternative wir formuliert haben. Da es also offenbar mehrere Tests für eine Hypothese H_0 gibt, müssen wir je nach der Alternative H_1 einen Test auswählen, von dem wir uns versprechen, dass er H_1 besonders gut entdeckt, also eine besonders große Macht hat. Für eine beidseitige Alternative etwa wird einer der einseitigen Tests aus (ii) und (iii) für einen gewissen Teil der Alternative völlig blind sein, scheidet also aus. Andererseits ist für eine linksseitige Alternative der beidseitige Test etwas weniger mächtig, da der kritische Wert $-\Phi(1-\alpha/2)$ kleiner ist als derjenige des linksseitigen Tests $-\Phi(1-\alpha)$.

8.2.3 t-Test

Wir nehmen an, dass das Gewicht von Straußeneiern etwa normalverteilt ist mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Die gängige Meinung ist, dass $\mu = \mu_0$ sei.

(i) Beidseitige Alternative. Neuerdings behaupten gewisse Leute, dass μ einen anderen Wert habe, allerdings legen sie sich nicht fest, welchen. Jetzt soll die bisherige Meinung gegen die Neue zum Niveau $\alpha = 0.01$ getestet werden.

Wir wählen als statistisches Modell (für n Straußeneier) $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2} = \mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}^{\otimes n}$, $(\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Als Hypothese wählen wir

$$\Theta_0 = \{\mu_0\} \times (0, \infty)$$

und als Alternative

$$\Theta_1 = (\mathbb{R} \setminus \{\mu_0\}) \times (0, \infty).$$

Aus den Messungen $x_1, \ldots, x_n$ der n Eier berechnen wir

$$M(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \quad \text{und} \quad V^*(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \big(x_i - M(x)\big)^2$$

sowie

$$T_\mu(x) = \frac{\sqrt{n}\,\big(M(x) - \mu\big)}{\sqrt{V^*(x)}} \quad \text{für } \mu \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen noch $T := T_{\mu_0}$. Nach Satz 7.19 bekommen wir ein Konfidenzintervall für μ zum Fehlerniveau α durch

$$C(x) = \big\{\mu : |T_\mu(x)| \le Q_{1-\alpha/2}(t_{n-1})\big\}.$$

Dabei ist t_{n-1} die t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden aus Definition 7.14.

Folglich ist

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |T(x)| > Q_{1-\alpha/2}(t_{n-1}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{8.25}$$

ein Test für H_0 gegen die zweiseitige Alternative H_1.

Das gleiche Ergebnis hätten wir auch direkt herleiten können: Nach Satz 7.19 ist unter der Nullhypothese $T \sim t_{n-1}$, also

$$\mathbf{P}_{\mu,\sigma^2} \circ T^{-1} \; = \; t_{n-1} \quad \text{für alle } (\mu, \sigma^2) \in \Theta_0. \tag{8.26}$$

Da die Alternative unspezifisch (beidseitig) ist, verwerfen wir H_0 für große Werte von $|T|$. Wir definieren also einen Test zum Niveau α durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } |T(x)| > c, \\ 0, & \text{falls } |T(x)| \le c. \end{cases}$$

Dabei muss c geeignet gewählt werden, so dass

$$\mathbf{P}_{\mu_0,\sigma^2}[|T| > c] \; \le \; \alpha \quad \text{für alle } \sigma^2 > 0.$$

Nach (8.26) können wir

$$c = Q_{1-\alpha/2}(t_{n-1})$$

wählen. Bezeichnen wir mit t_{n-1} die Verteilungsfunktion der t_{n-1}-Verteilung, so erhalten wir für den p-Wert der Beobachtung x

$$p(x) = 2\big(1 - t_{n-1}(|T(x)|)\big). \tag{8.27}$$

(ii) Linksseitige Alternative. Ist die Alternative $\Theta_1 \subset (-\infty, \mu_0) \times (0, \infty)$ linksseitig (vergleiche Abschnitt 8.2.2), so verwerfen wir H_0 nur für besonders kleine Werte von T, nicht aber für besonders große. Nach (8.26) muss als kritische Grenze das α-Quantil $Q_\alpha(t_{n-1}) = -Q_{1-\alpha}(t_{n-1})$ der t_{n-1}-Verteilung gewählt werden. Also ist

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) < -Q_{1-\alpha}(t_{n-1}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{8.28}$$

ein Test für H_0 gegen die linksseitige Alternative H_1. Bezeichnen wir mit t_{n-1} die Verteilungsfunktion der t_{n-1}-Verteilung, so erhalten wir für den p-Wert der Beobachtung x

$$p(x) = t_{n-1}(T(x)) = 1 - t_{n-1}(-T(x)). \tag{8.29}$$

(iii) Rechtsseitige Alternative. Analog erhalten wir zu einer rechtsseitigen Alternative $\Theta_1 \subset (\mu_0, \infty) \times (0, \infty)$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } T(x) > Q_{1-\alpha}(t_{n-1}), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{8.30}$$

einen Test für H_0 gegen H_1 zum Niveau α.

Bezeichnen wir mit t_{n-1} die Verteilungsfunktion der t_{n-1}-Verteilung, so erhalten wir für den p-Wert der Beobachtung x

$$p(x) = t_{n-1}(-T(x)) = 1 - t_{n-1}(T(x)). \tag{8.31}$$

Beispiel 8.6 (Normalverteilung mit unbekannter Varianz) Es wird angenommen, das Gewicht (in Gramm) von Straußeneiern sei zufällig und $\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}$–verteilt (mit μ *und* σ^2 unbekannt). Die Lehrmeinung ist $\mu_0 = 110$. Wir haben den Verdacht, dass die Straußeneier in Wirklichkeit aber kleiner sind und wollen also die Hypothese H_0, dass $\mu = \mu_0 = 110$ sei gegen die Alternative, dass $\mu < \mu_0$ sei, testen und zwar zum Niveau $\alpha = 5\%$. Als Test verwenden wir also den linksseitigen t-Test.

Ein Stichprobe von zehn Eiern ergab die Gewichte (in Gramm):

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	106	110	100	103	109	101	97	103	111	99

Wir berechnen Mittelwert und erwartungstreue Varianz: $M(x) = 103.9$ und $V^*(x) = \frac{2149}{90} = 23.8\overline{7}$. Hieraus erhalten wir

$$T(x) = \frac{103.9 - 110}{\sqrt{23.877\,/\,10}} = -3.948.$$

Jetzt schauen wir in der Tabelle das 95% Quantil der t_9 Verteilung nach

$$Q_{0.95}(t_9) = 1.8331.$$

Es gilt also $T(x) < -Q_{0.95}(t_9)$ und damit verwirft nach (8.28) der linksseitige t-Test die Hypothese $\mu_0 = 110$ zum Niveau 5%. Tatsächlich erhalten wir als p-Wert

$$p(x) = 1 - t_9(-T(x)) = 1 - t_9(3.948) \approx 1 - t_9(3.90) = 1 - 0.99819 = 0.00181.$$

Ein Test zum Niveau 0.2% hätte also die Hypothese noch verworfen, ein Test zum Niveau 0.1% allerdings schon nicht mehr.

Im Statistik-Programm R bekommen wir den t-Test automatisch ausgewertet. Hier geben wir ein

```
x <- c(106, 110, 100, 103, 109, 101, 97, 103, 111, 99)
t.test(x, mu = 110, alternative = "less")
```

und erhalten die Ausgabe

```
        One Sample t-test

data:  x
t = -3.9476, df = 9, p-value = 0.001683
alternative hypothesis: true mean is less than 110
95 percent confidence interval:
     -Inf 106.7326
sample estimates:
mean of x
    103.9
```

Die Abweichung zu dem von uns berechneten p-Wert liegt darin begründet, dass wir $T(x) = -3.948$ auf -3.9 abrunden mussten, um den Wert in der Tabelle auszulesen. $\diamond$

8.2.4 Test auf Symmetrie

Weder die Nullhypothese noch die Alternative müssen von so einfacher Gestalt sein, wie in dem Beispiel dargestellt. In der Tat muss der Parameterbereich Θ nicht einmal parametrisch sein (vergleiche Definition 6.3). Dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 8.7 (Test auf Symmetrie) Es sollen die Wirksamkeiten zweier Augenheilmittel verglichen werden. Mittel 1 ist seit langer Zeit am Markt, Mittel 2 ist ein Nachahmerprodukt (Generikum). Wir stellen die folgenden Hypothesen auf:

- Nullhypothese (H_0): Mittel 1 und Mittel 2 sind gleich gut.
- Alternative (H_1): Mittel 1 und Mittel 2 sind unterschiedlich gut.

Wir geben uns nun ein Niveau α vor, auf dem wir H_0 gegen H_1 testen wollen. Für unseren Test wählen wir n Versuchstiere aus. Jedes Tier bekommt in das linke Auge Mittel 1, in das rechte Auge Mittel 2. Danach werden die Wirksamkeiten W_i^1 und W_i^2 am i-ten Tier gemessen, $i = 1, \ldots, n$. Unter der Nullhypothese ist

$$X_i := W_i^1 - W_i^2$$

symmetrisch verteilt: $X_i \stackrel{d}{=} -X_i$. Mit anderen Worten: Die Zufallsvariablen $V_i := \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_i)$ und $|X_i|$ sind unabhängig für jedes $i = 1, \ldots, n$ (haben aber nicht notwendigerweise die selbe Verteilung). Wir schreiben kurz $|X| = (|X_1|, \ldots, |X_n|)$. Der Einfachheit halber nehmen wir noch an, dass X_i eine Dichte besitzt, damit $\mathbf{P}_\vartheta[X_i = X_j] = 0$ ist für $i \neq j$ und alle $\vartheta \in \Theta_0$. Unter der Hypothese H_0 ist also $\mathbf{P}[V_i = v_i \ \text{ für alle } \ i = 1, \ldots, n] = 2^{-n}$ für jedes $v \in \{-1, 1\}^n$. Weiterhin folgt, dass $\mathbf{P}[|X| \in M] = 1$ gilt, wobei

$$M := \left\{ y \in (0,\infty)^n : \sum_{i=1}^n v_i y_i \neq \sum_{i=1}^n w_i y_i \ \text{ für alle } \ v, w \in \{-1,1\}^n \ \text{ mit } \ v \neq w \right\}.$$

(In der Tat ist für $v \neq w$ die Menge $U_{v,w} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum v_i x_i = \sum w_i x_i\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $n-1$. Daher gilt $\mathbf{P}[X \in U_{v,w}] = 0$ und damit $\mathbf{P}[|X| \notin M] = \mathbf{P}\big[X \in \bigcup_{v \neq w} U_{v,w}\big] = 0$.)

Für $y \in M$ und $m = 1, \ldots, 2^n$ sei $v^{y,m} \in \{-1, +1\}^n$ so gewählt, dass

$$\sum_{i=1}^n v_i^{y,1} y_i < \sum_{i=1}^n v_i^{y,2} y_i < \ldots < \sum_{i=1}^n v_i^{y,2^n} y_i.$$

Definiere

$$\begin{aligned} N^- &:= \# \left\{ v \in \{-1,1\}^n : \sum_{i=1}^n v_i |X_i| \ \leq \ \sum_{i=1}^n X_i \right\} \\ N^+ &:= \# \left\{ v \in \{-1,1\}^n : \sum_{i=1}^n v_i |X_i| \ \geq \ \sum_{i=1}^n X_i \right\}. \end{aligned}$$

Da $V_1, \ldots, V_n$ und $|X|$ unabhängig sind, gilt

$$\mathbf{P}\Big[V_i = v_i^{|X|,k} \ \text{ für alle } \ i = 1, \ldots, n\Big] = 2^{-n} \qquad \text{für jedes } \ k = 1, \ldots, 2^n.$$

Es folgt für $m = 1, \ldots, 2^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[N^- \leq m] &= \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq \sum_{i=1}^n v_i^{|X|,m} |X_i|\right] \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{P}\left[\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n v_i^{|X|,k} |X_i|\right] \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{P}\left[V_i = v_i^{|X|,k} \ \text{ für jedes } \ i = 1, \ldots, n\right] \\ &= m\, 2^{-n}. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt auch für N^+

$$\mathbf{P}[N^+ \le m] = \mathbf{P}[N^- \le m] = m2^{-n}$$

und damit

$$\mathbf{P}\big[N^- \le m \quad \text{oder} \quad N^+ \le m\big] = 2m2^{-n}.$$

Der Test

$$\varphi = \mathbb{1}_{\{N^- \le m\}} + \mathbb{1}_{\{N^+ \le m\}}$$

hat also das effektive Niveau $2m2^{-n}$. Um das Niveau α einzuhalten, wählen wir daher $m = \lfloor \alpha 2^{n-1} \rfloor$. Für kleine Zahlen n kann man den Test auf modernen Computern durchaus durchführen. ◇

Nachdem wir ein paar Beispiele gesehen haben, fassen wir zusammen, wie ein statistischer Test durchgeführt werden soll:

Handlungsanweisung 8.8 (Statistisches Programm für Tests)

(1) Modellbildung, Hypothesen formulieren, Niveau festlegen. Zunächst einmal muss ein statistisches Modell gebildet werden, innerhalb dessen sich die konservative Meinung als Nullhypothese formulieren lässt, und die neue Meinung als Alternative. Liegt keine spezifische konservative Meinung vor, so formuliert man das Gegenteil dessen, was man zeigen möchte, als Nullhypothese. Hierbei kommt es dann in besonderer Weise darauf an, das Modell groß genug zu wählen, damit „das Gegenteil" auch wirklich alle vernünftigerweise in Betracht zu ziehenden Möglichkeiten umfasst.

Schließlich muss ein Fehlerniveau α für den Fehler 1. Art (fälschliches Verwerfen der Nullhypothese) festgelegt werden.

(2) Test festlegen. Nachdem das Modell feststeht, muss ein plausibler Test φ angegeben werden, der das vorgegebene Niveau einhält. Dabei sucht man möglichst einen, der gleichzeitig eine große Macht hat. In vielen Fällen geschieht dies durch die Auswahl einer geeigneten **Teststatistik** $T : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, deren Verteilung unter den verschiedenen $\mathbf{P}_\vartheta$ man kennt, und Angabe eines Verwerfungsbereiches $R \subset \mathbb{R}$. Der Test ist dann $\varphi(x) = \mathbb{1}_R(T(x))$.

Ist man mit der Macht des Tests unzufrieden, und ist es möglich, das empirische Experiment mehrfach durchzuführen, so schlägt man den empirisch Arbeitenden einen größeren Stichprobenumfang vor. Typischerweise wird hierdurch die Macht vergrößert.

(3) Versuch durchführen und Test auswerten. Erst jetzt wird der empirische Versuch tatsächlich durchgeführt. Ist der Versuch schon vorher durchgeführt worden, so müssen die Schritte (1) und (2) von unabhängiger Seite in Unkenntnis der tatsächlich gewonnenen Daten gemacht werden. Nun werden die Daten, typischerweise von der Form $x = (x_1, \ldots, x_n)$, in die Abbildung φ eingesetzt und je nach Wert von $\varphi(x)$ die Nullhypothese verworfen oder bewahrt.

Bemerkung 8.9 Wichtig bei diesem Vorgehen ist die Reihenfolge der Schritte. Werden erst die Daten erhoben und dann die Hypothese gebildet, so darf man die selben Daten nicht noch einmal zum Testen der Hypothese verwenden. Ansonsten findet sich zu beliebigem Niveau immer ein Test, der die Hypothese zu Gunsten der Alternative verwirft. Kann man die Hypothese erst auf Grund von Daten aufstellen, so muss für den Test der Hypothese ein zweiter Datensatz verwendet werden. Eventuell muss man also die in einer Erhebung gewonnenen Daten zunächst aufteilen. Einen Teil verwendet man zur Entwicklung von Hypothese und Alternative, den anderen zur Überprüfung der Hypothese. ◇

8.3 Einfache Hypothesen

Bisher haben wir einfach gewisse Tests benutzt, die uns plausibel vorkamen. Jetzt wollen wir die Qualitätskriterien formalisieren und für den Fall einfacher Hypothese und Alternative einen optimalen Test zu festem Niveau angeben.

Definition 8.10 *Sei*

$$\mathcal{T}_{\Theta_0,\alpha} = \big\{\varphi : \ \varphi \ \textit{ist Test für } \Theta_0 \textit{ gegen } \Theta_1 \textit{ zum Niveau } \alpha\big\}.$$

Es seien $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T}_{\Theta_0,\alpha}$. *Der Test* φ_1 *heißt* ***schärfer*** *als* φ_2*, falls*

$$\mathcal{G}_{\varphi_1}(\vartheta) \ \geq \ \mathcal{G}_{\varphi_2}(\vartheta) \quad \textit{für alle} \ \ \vartheta \in \Theta_1.$$

Ein Test $\varphi \in \mathcal{T}_{\Theta_0,\alpha}$ *heißt* ***gleichmäßig bester Test*** *zum Niveau* α*, falls*

$$\mathcal{G}_{\varphi}(\vartheta) = \sup_{\varphi' \in \mathcal{T}_{\Theta_0,\alpha}} \mathcal{G}_{\varphi'}(\vartheta) \quad \textit{für alle} \ \ \vartheta \in \Theta_1.$$

In vielen Fällen ist es schwierig, beste Tests zu konstruieren. Im Folgenden betrachten wir die Situation

$$\Theta_0 = \{\vartheta_0\} \quad \text{und} \quad \Theta_1 = \{\vartheta_1\}.$$

mit einfacher Nullhypothese und einfacher Alternative. Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, dass

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = 1 \quad \text{und} \quad \Theta = \{0, 1\}$$

gilt. Wir betrachten also ein statistisches *Standardmodell* (siehe Definition 6.4)

$$\big(\mathfrak{X}, \mathcal{A}, (\mathbf{P}_\vartheta)_{\vartheta \in \{0,1\}}\big).$$

Hier kann man Existenz und Eindeutigkeit (in gewissen Grenzen) eines gleichmäßig besten Tests zu gegebenem Niveau beweisen und diesen Test explizit konstruieren.

Wir gehen vor wie bei der Herleitung von Maximum-Likelihood Schätzern und betrachten für $x \in \mathfrak{X}$ die Likelihoodfunktion $\vartheta \mapsto L_x(\vartheta)$. Wir wollen nun für diejenigen Werte x die Nullhypothese verwerfen, für die der **Likelihood-Quotient**

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{L_x(1)}{L_x(0)}, & \text{falls} \ \ L_x(0) > 0, \\ \infty, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{8.32}$$

besonders große Werte annimmt.

Definition 8.11 (Neyman-Pearson Test) *Ein Test* $\varphi : \mathfrak{X} \to [0, 1]$ *heißt* ***Neyman-Pearson Test****, falls es ein* $c \in [0, \infty]$ *gibt mit*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \ \ R(x) > c, \\ 0, & \textit{falls} \ \ R(x) < c. \end{cases} \tag{8.33}$$

Für $R(x) = c$ *wird für die Werte von* $\varphi(x)$ *nichts gefordert.*

Satz 8.12 (Neyman-Pearson Lemma) *In der obigen Situation des Testens einer einfachen Hypothese gegen eine einfache Alternative gilt:*

(i) Zu jedem $\alpha \in [0,1]$ existiert ein Neyman-Pearson Test φ mit effektivem Niveau $\mathbf{E}_0[\varphi] = \alpha$.

(ii) Jeder Neyman-Pearson Test φ mit effektivem Niveau $\alpha \in (0,1]$ ist gleichmäßig bester Test zum Niveau α.

Bemerkung Für $\alpha = 0$ ist die Aussage (ii) im Allgemeinen nicht richtig. Beispiel?

Beweis (i) Für $\alpha = 0$ ist offenbar $c = \infty$ eine gute Wahl, denn in diesem Fall ist $\varphi \equiv 0$.

Sei nun $\alpha \in (0,1]$. Wir definieren für jedes $c \in [0,\infty)$ die Mengen

$$\begin{aligned} A_c &= \{x : R(x) > c\}, \\ A_c^+ &= \{x : R(x) \geq c\}, \\ B_c &= A_c^+ \setminus A_c = \{x : R(x) = c\}. \end{aligned}$$

Offenbar ist $c \mapsto \mathbf{P}_0[A_c]$ monoton fallend. Setzen wir also

$$c(\alpha) := \inf\{c \geq 0 : \mathbf{P}_0[A_c] \leq \alpha\},$$

so gilt $\mathbf{P}_0[A_c] > \alpha$ für alle $c < c(\alpha)$ und $\mathbf{P}_0[A_c] \leq \alpha$ für alle $c > c(\alpha)$. Offenbar gilt

$$A_c \uparrow A_{c(\alpha)} \quad \text{für } c \downarrow c(\alpha)$$

und

$$A_c \downarrow A_{c(\alpha)}^+ \quad \text{für } c \uparrow c(\alpha).$$

Es folgt

$$\mathbf{P}_0[A_{c(\alpha)}] = \lim_{c \downarrow c(\alpha)} \mathbf{P}_0[A_c] \leq \alpha,$$

und

$$\mathbf{P}_0[A_{c(\alpha)}^+] = \lim_{c \uparrow c(\alpha)} \mathbf{P}_0[A_c] \geq \alpha.$$

Wir setzen

$$\gamma := \begin{cases} \dfrac{\alpha - \mathbf{P}_0[A_{c(\alpha)}]}{\mathbf{P}_0[B_{c(\alpha)}]}, & \text{falls } \mathbf{P}_0[B_{c(\alpha)}] > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Beachte: $\gamma \in [0,1]$.) Definiere nun den Test φ durch

$$\varphi(x) \;=\; \mathbb{1}_{A_{c(\alpha)}}(x) + \gamma\, \mathbb{1}_{B_{c(\alpha)}}(x).$$

Dann ist das effektive Niveau

$$\mathbf{E}_0[\varphi] \;=\; \mathbf{P}_0[A_{c(\alpha)}] + \gamma\, \mathbf{P}_0[B_{c(\alpha)}] \;=\; \alpha.$$

(ii) Sei nun φ ein Neyman-Pearson Test mit effektivem Niveau $\alpha \in (0,1]$, und sei $c \in [0,\infty)$ die Konstante in der Definition von φ. Sei φ' ein weiterer Test zum Niveau α. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathbf{E}_1[\varphi'] \leq \mathbf{E}_1[\varphi]. \tag{8.34}$$

Definiere eine Abbildung $G : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} G(x) &= \big(L_x(1) - c\,L_x(0)\big)\,\big(\varphi(x) - \varphi'(x)\big) \\ &= L_x(0)\big(R(x) - c\big)\,\big(\varphi(x) - \varphi'(x)\big). \end{aligned}$$

Ist $R(x) > c$, so ist $\varphi(x) = 1$, also $\varphi(x) \geq \varphi'(x)$. Ist $R(x) < c$, so ist $\varphi(x) = 0$, also $\varphi(x) \leq \varphi'(x)$. Also ist $G(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathfrak{X}$.

Ist nun $(\mathfrak{X}, \mathcal{A})$ diskret, so ist $L_x(i) = \mathbf{P}_i[\{x\}]$ für $i = 0, 1$, also

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; \sum_{x \in \mathfrak{X}} G(x) \;&=\; \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}_1[\{x\}]\,\big(\varphi(x) - \varphi'(x)\big) \;-\; c \sum_{x \in \mathfrak{X}} \mathbf{P}_0[\{x\}]\,\big(\varphi(x) - \varphi'(x)\big) \\ &=\; \mathbf{E}_1[\varphi] \;-\; \mathbf{E}_1[\varphi'] \;-\; c\,\big(\mathbf{E}_0[\varphi] - \mathbf{E}_0[\varphi']\big). \end{aligned}$$

Ist hingegen $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^n$ (oder eine Teilmenge), und hat $\mathbf{P}_i$ die Dichte f_i, so ist $L_x(i) = f_i(x)$, für $i = 0, 1$, also ist mit der selben Rechnung

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq\; \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, G(x) \\ &=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, f_1(x)\,\big(\varphi(x) - \varphi'(x)\big) \\ &\qquad\qquad - c \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\, f_0(x)\,\big(\varphi(x) - \varphi'(x)\big) \\ &=\; \mathbf{E}_1[\varphi] \;-\; \mathbf{E}_1[\varphi'] \;-c\,\big(\mathbf{E}_0[\varphi] - \mathbf{E}_0[\varphi']\big). \end{aligned}$$

Wegen $c \geq 0$ und $\mathbf{E}_0[\varphi'] \leq \alpha = \mathbf{E}_0[\varphi]$, folgt in beiden Fällen (8.34). □

Beispiel 8.13 (Binomialverteilung) Wir wollen einen Test für den Parameter p der Binomialverteilung $b_{5,p}$ durchführen. Die Nullhypothese ist $p = p_0 := 0.7$, die Alternative soll $p = p_1 = 0.2$ sein. Wir wollen die Nullhypothese zum Niveau $\alpha = 0.05$ testen. Wir wählen also als Modell

$$\mathcal{M} = \Big(\{0, \ldots, 5\},\ 2^{\{0,\ldots,5\}},\ (b_{5,p})_{p \in \{0.2, 0.7\}}\Big)$$

und $\Theta_0 = \{0.7\}$, $\Theta_1 = \{0.2\}$. Es sind also Hypothese und Alternative einfach, und wir können einen Neyman-Pearson Test konstruieren, der dann der schärfste Test zum gegebenen Niveau ist. Dazu erstellen wir eine Tabelle für die Likelihoodfunktionen und den Likelihoodquotienten R:

	$k = 0$	1	2	3	4	5
$b_{5,0.7}(\{k\})$	0.002	0.028	0.132	0.309	0.360	0.168
$b_{5,0.2}(\{k\})$	0.328	0.410	0.205	0.051	0.006	0.000
$R(k)$	164	14.64	1.55	0.17	0.02	0.00

Es ist $b_{5,0.7}(\{0,1\}) = 0.03 < 0.05$ und $b_{5.0.7}(\{0,1,2\}) = 0.162 > 0.05$. Also müssen wir $c = 1.55$ wählen und

$$\gamma = \frac{\alpha - b_{5,0.7}(\{0,1\})}{b_{5,0.7}(\{2\})} = 0.151.$$

Insgesamt hat unser Neyman-Pearson Test nun die Gestalt

$$\varphi(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{falls } x \leq 1, \\ 0.151, & \text{falls } x = 2, \\ 0, & \text{falls } x \geq 3. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{falls } R(x) > 1.55, \\ 0.151, & \text{falls } R(x) = 1.55, \\ 0, & \text{falls } R(x) < 1.55. \end{array}\right.$$

$\diamond$

Beispiel 8.14 (Normalverteilung mit bekannter Varianz) Eine Beobachtungsgröße sei normalverteilt mit Varianz σ^2 und strittigem Erwartungswert μ. Wir wollen zum Niveau α die Nullhypothese $\mu = \mu_0$ gegen die Alternative $\mu = \mu_1$ testen. Dabei sei $\mu_1 < \mu_0$. Wir führen ein statistisches Experiment mit n unabhängigen Versuchen durch: $\mathcal{M} = \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathcal{N}_{\mu,\sigma^2}^{\otimes n})_{\mu \in \{\mu_0,\mu_1\}}\big)$. Vermittels des empirischen Mittels $M(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ können wir den Likelihoodquotienten schreiben als

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{L_x(1)}{L_x(0)} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_1)^2\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2\right)} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left((x_i-\mu_1)^2 - (x_i-\mu_0)^2\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{\mu_0^2-\mu_1^2}{2\sigma^2}\right)\exp\left(-n\frac{M(x)(\mu_0-\mu_1)}{\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Wegen $\mu_0 - \mu_1 > 0$ ist dieser Ausdruck streng monoton fallend als Funktion von $M(x)$. Wir erhalten also für jedes $c > 0$ ein eindeutiges $K \in \mathbb{R}$ mit

$$\{x : R(x) > c\} = \{x : M(x) < K\}.$$

Also hat der Neyman-Pearson Test die Gestalt

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } M(x) < K, \\ 0, & \text{falls } M(x) \geq K. \end{cases}$$

(Man bemerke, dass wir wegen $\mathbf{P}_{\mu_0}[M = K] = 0$ den Wert bei $M(x) = 0$ beliebig festsetzen konnten, hier $= 0$.) Jetzt müssen wir noch K an das gewünschte Niveau anpassen:

$$\alpha \stackrel{!}{=} \mathbf{P}_{\mu_0}[M(x) < K] = \mathcal{N}_{\mu_0,\sigma^2/n}((-\infty, K)) = \Phi\left(\frac{K-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right).$$

Dazu wählen wir $K = \mu_0 + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}(\alpha) = \mu_0 - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\,\Phi^{-1}(1-\alpha)$ und erhalten so den gleichen Test, den wir in Beispiel 8.1 ganz naiv hergeleitet hatten. Jetzt allerdings wissen wir, dass dieser Test der gleichmäßig beste zum vorgegebenen Niveau ist. $\diamond$

8.4 Ein Rangtest

Beispiel 8.15 Ein Glühlampenhersteller (A) behauptet, dass seine Lampen länger leben als die von Hersteller B. Dies soll getestet werden. Wenn wir annehmen, dass die Lebensdauer einer Lampe von A zufällig ist mit Verteilung $\mathbf{P}_A$ und die von B mit Verteilung $\mathbf{P}_B$, so müssen wir zunächst präzisieren, was „länger leben" heißen soll. Je nach Interessenlage des Kunden ist nicht die erwartete Lebensdauer entscheidend, sondern der Erwartungswert einer anderen Nutzenfunktion $U : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Offenbar sollte diese Funktion sinnvollerweise monoton wachsend sein. $\diamond$

Definition 8.16 *Mit $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$. Mit $\mathcal{M}_1^s(\mathbb{R})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit stetiger Verteilungsfunktion.*

Definition 8.17 (Stochastische Ordnung) *Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, und seien X, Y reelle Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}_X = \mu$, $\mathbf{P}_Y = \nu$. Wir sagen, dass μ **stochastisch größer** ist als ν (in Formeln $\mu \geq_{\mathrm{st}} \nu$), falls für jede monotone Funktion $U : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ gilt*

$$\mathbf{E}[U(X)] \;\geq\; \mathbf{E}[U(Y)].$$

Wir schreiben $\mu >_{\mathrm{st}} \nu$, falls $\mu \geq_{\mathrm{st}} \nu$ und $\mu \neq \nu$.

Satz 8.18 (Stochastische Ordnung und Kopplung) *Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sind äquivalent*

(i) $\mu \geq_{\mathrm{st}} \nu$,

(ii) $\mu([x,\infty)) \;\geq\; \nu([x,\infty))$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,

(iii) $\mu((-\infty,x]) \;\leq\; \nu((-\infty,x])$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$,

(iv) es existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ und Zufallsvariablen X, Y mit $\mathbf{P}_X = \mu$, $\mathbf{P}_Y = \nu$ und $\mathbf{P}[X \geq Y] = 1$.

Beweis **(i) $\Longrightarrow$ (ii)** Sei $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $t \mapsto \mathbb{1}_{[x,\infty)}(t)$ ist monoton wachsend, also ist

$$\mu([x,\infty)) \;=\; \mathbf{E}[U(X)] \;\geq\; \mathbf{E}[U(Y)] \;=\; \nu([x,\infty)).$$

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) Trivial.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Seien $F_\mu(x) = \mu((-\infty,x])$ und $F_\nu(x) = \nu((-\infty,x])$ die Verteilungsfunktionen von μ und ν sowie

$$\begin{aligned} F_\mu^{-1}(t) &:= \inf\{x \in \mathbb{R} : F_\mu(x) \geq t\}, \\ F_\nu^{-1}(t) &:= \inf\{x \in \mathbb{R} : F_\nu(x) \geq t\}, \end{aligned}$$

deren linksstetige Inverse. Ferner sei $\Omega = (0,1)$ mit der Gleichverteilung $\mathbf{P} = \mathcal{U}_{(0,1)}$. Setze $X(\omega) = F_\mu^{-1}(\omega)$ und $Y(\omega) = F_\nu^{-1}(\omega)$. Nach Voraussetzung ist $F_\mu \leq F_\nu$, also $X(\omega) \geq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Nach Satz 1.57 ist aber $X \sim \mu$ und $Y \sim \nu$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Sei $U : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ monoton wachsend. Dann ist $\mathbf{P}[U(X) \geq U(Y)] = 1$, also (nach Satz 3.5(iv)) auch $\mathbf{E}[U(X)] \geq \mathbf{E}[U(Y)]$. $\square$

Beispiele 8.19 (i) Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$, dann ist $\delta_x \leq_{\mathrm{st}} \delta_y$.

(ii) Sind X und Y reelle Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}[Y \geq 0] = 1$, dann ist $\mathbf{P}_X \leq_{\mathrm{st}} \mathbf{P}_{X+Y}$. (Klar nach Teil (iv) des Satzes.)

(iii) Seien $\sigma^2 > 0$ und $\mu_1 \leq \mu_0$, dann sind die Normalverteilungen geordnet: $\mathcal{N}_{\mu_1,\sigma^2} \leq_{\mathrm{st}} \mathcal{N}_{\mu_0,\sigma^2}$. In der Tat folgt dies aus (ii) mit $X \sim \mathcal{N}_{\mu_1,\sigma^2}$ und $Y = \mu_0 - \mu_1 > 0$. Wir können die Aussage aber auch durch eine explizite Rechnung erhalten. Es ist für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{N}_{\mu_0,\sigma^2}((-\infty,x]) = \Phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \leq \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sqrt{\sigma^2}}\right) = \mathcal{N}_{\mu_1,\sigma^2}((-\infty,x]).$$

(iv) Bei Normalverteilungen mit unterschiedlicher Varianz gibt es keine Ordnung. Seien nämlich $\sigma_1^2, \sigma_2^2 \in (0,\infty)$, $\mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R}$ mit $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ und sei

$$f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

die Dichte von $\mathcal{N}_{\mu_i,\sigma_i^2}$, $i = 1, 2$. Dann existiert ein $K > 0$, so, dass

$$f_1(x) < f_2(x) \qquad \text{für alle } \ |x| > K.$$

Also ist

$$\mathcal{N}_{\mu_1,\sigma_1^2}((-\infty,-K]) < \mathcal{N}_{\mu_2,\sigma_2^2}((-\infty,-K])$$

und

$$\mathcal{N}_{\mu_1,\sigma_1^2}((-\infty,K]) > \mathcal{N}_{\mu_2,\sigma_2^2}((-\infty,K]).$$

(v) Sind $k, l \in \mathbb{N}$ und $k \leq l$, dann gilt $\chi_k^2 \leq_{\mathrm{st}} \chi_l^2$. In der Tat: Sind $X_1, \ldots, X_l$ unabhängige Zufallsvariablen, $X_i \sim \mathcal{N}_{0,1}$, so ist $X_1^2 + \ldots + X_k^2 \sim \chi_k^2$ und $X_1^2 + \ldots + X_l^2 \sim \chi_l^2$. Nach (ii) mit $X = X_1^2 + \ldots + X_k^2$ und $Y = X_{k+1}^2 + \ldots + X_l^2$ gilt daher die Aussage.

(vi) Seien $n \in \mathbb{N}$, $p, p' \in [0,1]$, $p \leq p'$. Dann ist $b_{n,p'} \geq_{\mathrm{st}} b_{n,p}$ nach Lemma 7.7. ◇

Wir können jetzt das Problem mit den Lampen folgendermaßen formalisieren. Als Nullhypothese betrachten wir

$$\Theta_0 = \big\{(\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})^2 : \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B\big\},$$

als Alternative

$$\Theta_1 = \big\{(\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})^2 : \mathbf{P}_A \geq_{\mathrm{st}} \mathbf{P}_B,\, \mathbf{P}_A \neq \mathbf{P}_B\big\}.$$

Bei unseren Betrachtungen wird es gelegentlich etwas einfacher sein, wenn wir nur Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B \in \mathcal{M}_1^s(\mathbb{R})$ zulassen. Wir schreiben dann

$$\begin{aligned}\Theta_0^s &= \big\{(\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B) \in \mathcal{M}_1^s(\mathbb{R})^2 : \mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B\big\},\\ \Theta_1^s &= \big\{(\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B) \in \mathcal{M}_1^s(\mathbb{R})^2 : \mathbf{P}_A \geq_{\mathrm{st}} \mathbf{P}_B,\, \mathbf{P}_A \neq \mathbf{P}_B\big\}.\end{aligned}$$

Dies hat den Vorteil, dass für unabhängige X und Y mit $\mathbf{P}_X, \mathbf{P}_Y \in \mathcal{M}_1^s(\mathbb{R})$ keine **Bindung** auftritt, also $\mathbf{P}[X = Y] = 0$ gilt.

Untersuchen wir nun m Lampen vom Typ A und n Lampen vom Typ B, so ist das statistische Modell unseres Testproblems

$$\mathcal{M} = \Big(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n),\, \big(\mathbf{P}_A^{\otimes m} \otimes \mathbf{P}_B^{\otimes n} : (\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B) \in \Theta^s\big)\Big),$$

wobei

$$\Theta^s = \Theta_0^s \cup \Theta_1^s.$$

Ferner sei ein Niveau α gegeben. Wir suchen jetzt eine geeignete Teststatistik $U : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ und einen Verwerfungsbereich $R = (c, \infty)$, so dass der Test

$$\varphi(x) = \mathbb{1}_R(U(x))$$

ein Test für Θ_0^s gegen Θ_1^s zum Niveau α ist.

Definition 8.20 *Sind $X_1, \ldots, X_n$ reelle Zufallsvariablen, so heißt für jedes $k = 1, \ldots, n$ die Zahl*

$$R_k := R_{k:n} = \#\big\{i \in \{1, \ldots, n\} : X_i \leq X_k\big\}$$

der ***Rang*** *von X_k.*

Bemerkung 8.21 Gilt $\mathbf{P}_{X_i} \in \mathcal{M}_1^s(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, so sind alle Ränge unterschiedlich,

$$\{R_1, \ldots, R_n\} = \{1, \ldots, n\},$$

und speziell

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad \diamond$$

Definition 8.22 *Seien $X_1, \ldots, X_{m+n}$ reelle Zufallsvariablen mit $\mathbf{P}_{X_i} \in \mathcal{M}_1^s$, $i = 1, \ldots, m+n$. Dann heißt*

$$W_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} R_{k:m+n}$$

die ***Rangsumme*** *der $X_1, \ldots, X_m$, oder* ***Wilcoxon-Statistik****. Ferner heißt*

$$U_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=m+1}^{m+n} \mathbb{1}_{\{X_k > X_l\}} = W_{m,n} - \frac{m(m+1)}{2} \tag{8.35}$$

die Mann-Whitney ***U-Statistik*** *der $X_1, \ldots, X_m$.*

Wir setzen für $m, n, w \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}(m,n,w) = \Big\{ r \in \{1, \ldots, m+n\}^m : r_1 < r_2 < \ldots < r_m, \sum_{i=1}^{m} r_i = w \Big\}. \tag{8.36}$$

und

$$\overline{\mathcal{P}}(m,n,w) = \Big\{ s \in \{1, \ldots, m+n\}^{m+n} : s_i \neq s_j \text{ für } i \neq j \text{ und } \sum_{i=1}^{m} s_i = w \Big\}. \tag{8.37}$$

Für jedes m-Tupel $r \in \mathcal{P}(m,n,w)$ gibt es $n!$ Möglichkeiten, ein $(m+n)$-Tupel $s \in \overline{\mathcal{P}}(m,n,w)$ zu wählen mit $s_i = r_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Zu jedem solchen s gibt es dann $m!$ Möglichkeiten, ein $s' \in \overline{\mathcal{P}}(m,n,w)$ zu wählen mit $s_i' = s_i$ für $i = m+1, \ldots, m+n$. Also gibt es zu jedem $r \in \mathcal{P}(m,n,w)$ genau $m!\,n!$ unterschiedliche $s' \in \overline{\mathcal{P}}(m,n,w)$. Daher gilt

$$\#\overline{\mathcal{P}}(m,n,w) = m!\,n!\,\#\mathcal{P}(m,n,w). \tag{8.38}$$

Satz 8.23 *Seien $X_1, \ldots, X_{m+n}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbf{P}_{X_1} \in \mathcal{M}_1^s(\mathbb{R})$. Dann gilt*

(i) $\mathrm{Wil}_{m,n}(\{w\}) := \mathbf{P}[W_{m,n} = w] = \dfrac{\#\mathcal{P}(m,n,w)}{\binom{m+n}{m}}.$

*Die Verteilung $\mathrm{Wil}_{m,n}$ nennen wir **Wilcoxon-Verteilung** mit Parametern m und n. Hingegen heißt die Verteilung $\mathrm{MWU}_{m,n}$, die durch*

$$\mathrm{MWU}_{m,n}(\{w\}) := \mathbf{P}[U_{m,n} = w] = \frac{\#\mathcal{P}\big(m,n,w+m(m+1)/2\big)}{\binom{m+n}{m}}$$

*definiert wird, die **Mann-Whitney (-Wilcoxon) U-Verteilung** mit Parametern m und n. (In R implementiert als wilcox(). Achtung: In R wird die hier definierte Größe U mit W bezeichnet. Das weicht von der Standardnotation ab.)*

(ii)

$$\mathbf{E}[U_{m,n}] \;=\; \frac{mn}{2} \qquad \textit{und} \qquad \mathbf{Var}[U_{m,n}] \;=\; \frac{mn\,(m+n+1)}{12}.$$

Bevor wir den Satz beweisen, stellen wir noch ein Lemma bereit.

Lemma 8.24 *Seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und identisch verteilt mit stetiger Verteilungsfunktion. Dann gilt*

$$\mathbf{P}\big[Y_1 > Y_i \;\textit{für alle}\; i = 2, \ldots, n\big] = \frac{1}{n}.$$

Beweis Für $t \in (0,1)$ sei

$$x_t := \max\{x : F(x) = t\}.$$

Da F stetig ist, ist $F(x_t) = t$ und

$$\mathbf{P}[F(Y_i) \le t] = \mathbf{P}[Y_i \le x_t] = F(x_t) = t.$$

Das heißt

$$F(Y_i) \sim \mathcal{U}_{[0,1]}.$$

Für $i \neq j$ ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[Y_i = Y_j] &\le \mathbf{P}[F(Y_i) = F(Y_j)] \\
&\le \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}\left[F(Y_i) \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]\right]^2 \\
&= \frac{1}{N} \qquad \text{für alle } \; N \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbf{P}[Y_i = Y_j] = 0.$$

Sei

$$M := \max\{Y_1, \ldots, Y_n\}.$$

Nach der Einschluss-/Ausschlussformel ist

$$
\begin{aligned}
1 &= \mathbf{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n}\{Y_i = M\}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}[Y_i = M] - \sum_{i \neq j} \mathbf{P}[Y_i = Y_j = M] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}[Y_i = M] \\
&= n\mathbf{P}[Y_1 = M].
\end{aligned}
$$

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}[Y_1 = M] = 1/n$. □

Beweis (von Satz 8.23)

(i) Das Ereignis $\{W_{m,n} = w\}$ ist die disjunkte Vereinigung

$$\{W_{m,n} = w\} = \bigcup_{s \in \overline{\mathcal{P}}(m,n,w)} \big\{R_1 = s_1, \ldots, R_{m+n} = s_{m+n}\big\}.$$

Für jedes $s \in \{1, \ldots, m+n\}^{m+n}$ mit $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$ ist unter der Nullhypothese

$$\mathbf{P}[R_1 = s_1, \ldots, R_{m+n} = s_{m+n}] = \frac{1}{(m+n)!}.$$

Also gilt

$$\mathbf{P}[W_{m,n} = w] \;=\; \#\overline{\mathcal{P}}(m,n,w)\frac{1}{(m+n)!} \;=\; \frac{\#\mathcal{P}(m,n,w)}{\binom{m+n}{m}}.$$

(ii) Offenbar ist $\mathbf{E}[\mathbb{1}_{\{X_k > X_l\}}] = \mathbf{P}[X_k > X_l] = \frac{1}{2}$, also ist $\mathbf{E}[U_{m,n}] = \frac{1}{2}mn$.
Nach der Bienaymé-Formel (Satz 3.25) gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Var}[U_{m,n}] = &\sum_{k,k'=1}^{m} \sum_{l,l'=m+1}^{m+n} \mathbf{Cov}\big[\mathbb{1}_{\{X_k > X_l\}}, \mathbb{1}_{\{X_{k'} > X_{l'}\}}\big] \\
= &\, mn\,\mathbf{Var}\big[\mathbb{1}_{\{X_1 > X_{m+1}\}}\big] \\
&+ mn(n-1)\,\mathbf{Cov}\big[\mathbb{1}_{\{X_1 > X_{m+1}\}}, \mathbb{1}_{\{X_1 > X_{m+2}\}}\big] \\
&+ mn(m-1)\,\mathbf{Cov}\big[\mathbb{1}_{\{X_1 > X_{m+1}\}}, \mathbb{1}_{\{X_2 > X_{m+1}\}}\big].
\end{aligned}
$$

Offenbar ist

$$\mathbf{Var}\big[\mathbb{1}_{\{X_1 > X_{m+1}\}}\big] \;=\; \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; \frac{1}{4}.$$

Weiter ist nach Lemma 8.24

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Cov}\big[\mathbb{1}_{\{X_1 > X_{m+1}\}}, \mathbb{1}_{\{X_1 > X_{m+2}\}}\big] \\
&\quad = \mathbf{P}\big[X_1 > X_{m+1}, X_1 > X_{m+2}\big] - \mathbf{P}[X_1 > X_{m+1}]\,\mathbf{P}[X_1 > X_{m+2}] \\
&\quad = \mathbf{P}\big[X_1 = \max\{X_1, X_{m+1}, X_{m+2}\}\big] - \frac{1}{4} \\
&\quad = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

Analog ist auch

$$\mathbf{Cov}\big[\mathbb{1}_{\{X_1>X_{m+1}\}},\, \mathbb{1}_{\{X_2>X_{m+1}\}}\big] \;=\; \frac{1}{12}.$$

Also ist

$$\mathbf{Var}[U_{m,n}] \;=\; \frac{1}{4}\,mn \;+\; \frac{1}{12}\,mn(n-1) \;+\; \frac{1}{12}\,mn(m-1) \;=\; \frac{mn\,(m+n+1)}{12}. \qquad \square$$

Für kleine Werte von m und n ist die Verteilung $\mathrm{MWU}_{m,n}$ tabelliert (Anhang A.8). Für große Werte kann man sich mit der Normalapproximation behelfen. Wir bringen den folgenden Satz ohne Beweis.

Satz 8.25 (Hoeffding) *Sei* $U^*_{m,n} := \dfrac{U_{m,n} - \frac{1}{2}\,mn}{\sqrt{\frac{1}{12}\,mn(m+n+1)}}$. *Dann gilt unter der Nullhypothese*

$$\mathbf{P}_{U^*_{m,n}} \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}_{0,1} \qquad \textit{schwach.}$$

Sind nun $X_1,\dots,X_m \sim \mathbf{P}_A$ und $X_{m+1},\dots,X_{m+n} \sim \mathbf{P}_B$ unabhängig und wollen wir $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$ gegen $\mathbf{P}_A >_{\mathrm{st}} \mathbf{P}_B$ zum Niveau α testen, so wählen wir als Teststatistik $U_{m,n}$ und als Verwerfungsbereich $\{U_{m,n} > c\}$ mit

$$c \;=\; Q_{1-\alpha}(\mathrm{MWU}_{m,n}). \tag{8.39}$$

Für große Werte m,n, für die $\mathrm{MWU}_{m,n}$ nicht mehr tabelliert ist, können wir c approximativ durch das Quantil der Normalverteilung angeben

$$c \;=\; \frac{mn}{2} + \sqrt{\frac{mn(m+n+1)}{12}}\;\Phi^{-1}(1-\alpha). \tag{8.40}$$

Wir setzen dann

$$\varphi = \mathbb{1}_{\{U_{m,n}>c\}}. \tag{8.41}$$

Definition 8.26 *Der so gewonnene Test φ heißt* ***Mann-Whitney-Wilcoxon Test*** *zum Niveau α für die Nullhypothese $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$ gegen die Alternative $\mathbf{P}_A >_{\mathrm{st}} \mathbf{P}_B$.*

Wie sollte also unser Glühlampenhersteller vorgehen? Als Nullhypothese hatten wir bereits $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$ festgelegt. Als Alternative soll $\mathbf{P}_A >_{\mathrm{st}} \mathbf{P}_B$ dienen. Nun muss ein Niveau $\alpha \in (0,1)$ festgelegt werden, zu dem der Test durchgeführt wird. Schließlich werden Stichprobengrößen m (für Typ A) und n (für Typ B) festgelegt. Nun wird c bestimmt, nach (8.39) falls m und n klein genug sind, dass die Quantile von $\mathrm{MWU}_{m,n}$ tabelliert sind, sonst approximativ nach (8.40). Schließlich wird als Test der Mann-Whitney-Wilcoxon Test (8.41) gewählt. Erst jetzt werden die Lebensdauern $x_1,\dots,x_m$ von Typ A und $x_{m+1},\dots,x_{m+n}$ von Typ B bestimmt. Mit Formel (8.35) wird $U_{m,n}$ und damit $\varphi(x)$ berechnet.

Beispiel 8.27 Wir wollen das Vorgehen schließlich an einem Zahlenbeispiel explizit durchrechnen. Wir nehmen an, dass von $m = 10$ Lampen vom Typ A die Lebensdauern $x_1,\dots,x_m$ (in Tagen) gemessen werden und von $n = 8$ Lampen vom Typ B: $x_{m+1},\dots,x_{m+n}$. Nun soll der Test für die Alternative, dass $\mathbf{P}_A$ stochastisch größer wäre als $\mathbf{P}_B$ gegen die Nullhypothese $\mathbf{P}_A = \mathbf{P}_B$ zum Niveau $\alpha = 5\%$ durchgeführt werden.

Der Tabelle entnehmen wir den Wert des 95%-Quantils von $\mathrm{MWU}_{10,8}$: $c = Q_{0.95}(\mathrm{MWU}_{10,8}) = 59$. Als Test legen wir also fest: $\varphi = 1$ genau dann, wenn $U_{10,8} > 59$.

Jetzt werden die Daten erhoben. Für Typ A

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	96.2	99.1	116	112	114.9	108.9	107	82	99.4	105.3

und für Typ B

i	11	12	13	14	15	16	17	18
x_i	105.7	95.3	85.4	102.6	98.1	97.1	104	102.4

Um die Rangsumme $W_{10,8}$ zu bestimmen, sortieren wir die Daten der Größe nach und unterstreichen die Zahlen, deren Werte von einem der $x_1, \ldots, x_{10}$ stammen:

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	$\underline{82}$	85.4	95.3	$\underline{96.2}$	97.1	98.1	$\underline{99.1}$	$\underline{99.4}$	102.4

Rang	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Wert	102.6	104	$\underline{105.3}$	105.7	$\underline{107}$	$\underline{108.9}$	$\underline{112}$	$\underline{114.9}$	$\underline{116}$

Wir erhalten als Rangsumme

$$W_{10,8} = 1 + 4 + 7 + 8 + 12 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 = 112.$$

Hieraus erhalten wir für die U-Statistik

$$U_{10,8} = W_{10,8} - \frac{10 \cdot 11}{2} = 112 - 55 = 57.$$

Da der Test nur verwirft, wenn $U_{10,8} > c = 59$ gilt, kann die Nullhypothese nicht zum Niveau 5% verworfen werden.

Zur Ergänzung bestimmen wir noch den p-Wert

$$\mathbf{P}[U_{10,8} \geq 57] = 1 - \mathbf{P}[U_{10,8} \leq 56].$$

Mit Hilfe der Normalapproximation (mit Korrekturterm) aus dem Satz von Hoeffding erhalten wir

$$1 - \mathbf{P}[U_{10,8} \leq 56] \approx 1 - \Phi\left(\frac{56.5 - 40}{\sqrt{80 \cdot 19/12}}\right) = 1 - \Phi(1.466063) = 0.0713155.$$

Eine exakte Rechnung mit den kombinatorischen Größen $\#\mathcal{P}(10, 8, w)$ liefert für den p-Wert hingegen 0.07285525. Dieser Wert wird von der Approximation also schon ganz gut getroffen. Da der p-Wert relativ klein ist, haben wir einen Hinweis darauf, dass die Alternative wahr sein könnte. Man müsste nur eben eine größere Stichprobe nehmen, um diesen Verdacht zu verifizieren. ◇

A.1 Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.89065$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.10	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.20	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.30	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.40	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.50	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.60	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.70	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.80	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.90	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.00	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.10	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.20	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.30	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.40	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.50	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.60	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.70	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.80	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.90	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.00	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.10	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.20	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.30	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.40	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.50	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.60	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.70	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.80	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.90	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.00	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.10	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.20	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.30	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.40	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.50	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.60	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.70	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.80	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.90	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

A.2 Quantile der Normalverteilung

Tabelliert ist das β-Quantil z_β der Normalverteilung $\mathcal{N}_{0,1}$.

β	z_β
0.8	0.84162
0.9	1.28155
0.95	1.64485
0.975	1.95996
0.98	2.05375
0.99	2.32635
0.995	2.57583
0.9975	2.80703
0.998	2.87816
0.999	3.09023
0.9995	3.29053

A.3 Quantile der t-Verteilung

Tabelliert ist das α-Quantil $t_{n;\,\alpha}$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

n	$t_{n;\,0.9}$	$t_{n;\,0.95}$	$t_{n;\,0.975}$	$t_{n;\,0.99}$	$t_{n;\,0.995}$
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3026	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7470	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.3164	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	1.3070	1.6909	2.0322	2.4412	2.7284
35	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	1.3048	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	1.3031	1.6838	2.0211	2.4233	2.7045
41	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	1.3016	1.6811	2.0167	2.4162	2.6951
44	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

n	$t_{n;\,0.9}$	$t_{n;\,0.95}$	$t_{n;\,0.975}$	$t_{n;\,0.99}$	$t_{n;\,0.995}$
46	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	1.2998	1.6779	2.0117	2.4084	2.6846
48	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
54	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
59	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
64	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6548
69	1.2939	1.6672	1.9950	2.3816	2.6490
74	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
79	1.2924	1.6644	1.9904	2.3745	2.6395
84	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
89	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
94	1.2906	1.6612	1.9855	2.3667	2.6292
99	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264
104	1.2897	1.6596	1.9830	2.3627	2.6239
109	1.2894	1.6590	1.9820	2.3610	2.6217
114	1.2890	1.6583	1.9810	2.3595	2.6196
119	1.2887	1.6578	1.9801	2.3581	2.6178
124	1.2884	1.6572	1.9793	2.3568	2.6161
129	1.2882	1.6568	1.9785	2.3556	2.6145
134	1.2879	1.6563	1.9778	2.3545	2.6130
139	1.2877	1.6559	1.9772	2.3535	2.6117
144	1.2875	1.6555	1.9766	2.3525	2.6104
149	1.2873	1.6551	1.9760	2.3516	2.6092
154	1.2871	1.6548	1.9755	2.3508	2.6081
159	1.2869	1.6545	1.9750	2.3500	2.6071
164	1.2867	1.6542	1.9745	2.3493	2.6061
169	1.2866	1.6539	1.9741	2.3486	2.6052
174	1.2864	1.6537	1.9737	2.3480	2.6044
179	1.2863	1.6534	1.9733	2.3474	2.6036
184	1.2862	1.6532	1.9729	2.3468	2.6028
189	1.2860	1.6530	1.9726	2.3462	2.6021
194	1.2859	1.6528	1.9723	2.3457	2.6014
199	1.2858	1.6526	1.9720	2.3452	2.6008
219	1.2854	1.6518	1.9709	2.3435	2.5985
239	1.2851	1.6512	1.9699	2.3420	2.5966
259	1.2848	1.6508	1.9692	2.3408	2.5949
279	1.2846	1.6503	1.9685	2.3398	2.5936
299	1.2844	1.6500	1.9679	2.3389	2.5924
349	1.2840	1.6492	1.9668	2.3371	2.5900
399	1.2837	1.6487	1.9659	2.3357	2.5882
499	1.2832	1.6479	1.9647	2.3338	2.5857
999	1.2824	1.6464	1.9623	2.3301	2.5808
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3264	2.5758

A.4 Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	14	19
1.00	.75000	.78868	.80450	.81305	.81839	.82204	.82469	.82670	.82828	.83286	.83506
1.05	.75776	.79806	.81458	.82352	.82910	.83292	.83569	.83780	.83945	.84425	.84655
1.10	.76515	.80698	.82416	.83346	.83927	.84325	.84614	.84834	.85006	.85506	.85746
1.15	.77217	.81545	.83325	.84289	.84892	.85305	.85604	.85832	.86011	.86530	.86779
1.20	.77886	.82350	.84187	.85182	.85805	.86232	.86541	.86777	.86961	.87497	.87756
1.25	.78522	.83113	.85004	.86028	.86669	.87108	.87427	.87669	.87859	.88410	.88676
1.30	.79129	.83838	.85777	.86827	.87485	.87935	.88262	.88510	.88705	.89270	.89542
1.35	.79706	.84525	.86508	.87582	.88255	.88714	.89048	.89302	.89501	.90078	.90356
1.40	.80257	.85176	.87200	.88295	.88980	.89448	.89788	.90046	.90249	.90836	.91118
1.45	.80782	.85794	.87853	.88967	.89663	.90138	.90483	.90745	.90950	.91545	.91832
1.50	.81283	.86380	.88471	.89600	.90305	.90786	.91135	.91400	.91607	.92209	.92498
1.55	.81762	.86936	.89054	.90196	.90908	.91394	.91746	.92013	.92222	.92828	.93118
1.60	.82219	.87463	.89605	.90758	.91475	.91964	.92318	.92587	.92797	.93404	.93695
1.65	.82656	.87964	.90125	.91286	.92007	.92498	.92854	.93122	.93333	.93940	.94231
1.70	.83075	.88438	.90615	.91782	.92506	.92998	.93354	.93622	.93833	.94439	.94728
1.75	.83475	.88889	.91079	.92249	.92974	.93465	.93820	.94088	.94298	.94900	.95187
1.80	.83859	.89317	.91516	.92688	.93412	.93902	.94256	.94522	.94730	.95328	.95612
1.85	.84226	.89723	.91929	.93101	.93823	.94310	.94662	.94926	.95132	.95723	.96004
1.90	.84579	.90109	.92318	.93488	.94207	.94692	.95040	.95302	.95506	.96089	.96364
1.95	.84917	.90476	.92686	.93852	.94566	.95047	.95392	.95650	.95852	.96425	.96696
2.00	.85242	.90825	.93034	.94194	.94903	.95379	.95719	.95974	.96172	.96736	.97000
2.05	.85554	.91157	.93362	.94515	.95218	.95688	.96023	.96275	.96469	.97021	.97279
2.10	.85854	.91472	.93672	.94817	.95512	.95976	.96306	.96553	.96744	.97283	.97534
2.15	.86142	.91773	.93965	.95101	.95788	.96245	.96569	.96811	.96998	.97524	.97768
2.20	.86420	.92060	.94241	.95367	.96045	.96495	.96813	.97050	.97233	.97745	.97981
2.25	.86688	.92332	.94503	.95618	.96286	.96728	.97040	.97272	.97450	.97947	.98175
2.30	.86945	.92593	.94751	.95853	.96511	.96945	.97250	.97476	.97650	.98132	.98352
2.35	.87194	.92841	.94985	.96074	.96722	.97147	.97446	.97666	.97835	.98302	.98513
2.40	.87433	.93077	.95206	.96282	.96919	.97335	.97627	.97841	.98005	.98457	.98660
2.45	.87665	.93304	.95416	.96478	.97103	.97510	.97795	.98003	.98162	.98598	.98793
2.50	.87888	.93519	.95615	.96662	.97275	.97674	.97950	.98153	.98307	.98727	.98913
2.55	.88104	.93726	.95803	.96835	.97437	.97825	.98095	.98291	.98440	.98844	.99022
2.60	.88312	.93923	.95981	.96998	.97588	.97967	.98229	.98419	.98563	.98951	.99121
2.65	.88514	.94112	.96150	.97151	.97729	.98099	.98353	.98537	.98676	.99049	.99210
2.70	.88709	.94292	.96311	.97295	.97861	.98221	.98468	.98646	.98780	.99137	.99291
2.75	.88898	.94465	.96463	.97431	.97984	.98335	.98575	.98747	.98876	.99218	.99363
2.80	.89081	.94630	.96607	.97559	.98100	.98442	.98674	.98840	.98964	.99291	.99429
2.85	.89258	.94789	.96745	.97680	.98209	.98541	.98766	.98926	.99046	.99358	.99488
2.90	.89430	.94941	.96875	.97794	.98310	.98633	.98851	.99005	.99120	.99418	.99541
2.95	.89597	.95087	.96999	.97902	.98406	.98719	.98930	.99079	.99189	.99473	.99589

Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	14	19
3.00	.89758	.95227	.97117	.98003	.98495	.98800	.99003	.99146	.99252	.99522	.99632
3.05	.89915	.95361	.97229	.98099	.98579	.98874	.99071	.99209	.99310	.99568	.99671
3.10	.90067	.95490	.97335	.98189	.98657	.98944	.99134	.99267	.99364	.99608	.99705
3.15	.90215	.95614	.97437	.98274	.98731	.99009	.99192	.99320	.99413	.99645	.99736
3.20	.90359	.95733	.97533	.98355	.98800	.99070	.99247	.99369	.99458	.99679	.99764
3.25	.90498	.95847	.97626	.98431	.98865	.99127	.99297	.99415	.99500	.99709	.99789
3.30	.90634	.95958	.97713	.98503	.98926	.99180	.99344	.99457	.99538	.99737	.99812
3.35	.90766	.96064	.97797	.98572	.98984	.99229	.99387	.99496	.99574	.99762	.99832
3.40	.90895	.96166	.97877	.98636	.99037	.99275	.99428	.99532	.99606	.99784	.99850
3.45	.91020	.96264	.97953	.98697	.99088	.99318	.99465	.99565	.99636	.99805	.99866
3.50	.91141	.96359	.98026	.98755	.99136	.99359	.99500	.99596	.99664	.99823	.99880
3.55	.91260	.96450	.98095	.98810	.99181	.99396	.99533	.99625	.99689	.99840	.99893
3.60	.91375	.96538	.98162	.98862	.99223	.99432	.99563	.99651	.99713	.99855	.99905
3.65	.91488	.96623	.98225	.98911	.99263	.99465	.99591	.99675	.99734	.99869	.99915
3.70	.91598	.96705	.98286	.98958	.99300	.99496	.99617	.99698	.99754	.99881	.99924
3.75	.91705	.96784	.98344	.99003	.99335	.99525	.99642	.99719	.99772	.99892	.99932
3.80	.91809	.96860	.98400	.99045	.99369	.99552	.99664	.99738	.99789	.99902	.99940
3.85	.91911	.96934	.98453	.99085	.99400	.99577	.99685	.99756	.99805	.99912	.99946
3.90	.92010	.97005	.98504	.99123	.99430	.99601	.99705	.99773	.99819	.99920	.99952
3.95	.92107	.97074	.98553	.99159	.99457	.99623	.99723	.99788	.99832	.99927	.99957
4.00	.92202	.97140	.98600	.99193	.99484	.99644	.99740	.99803	.99844	.99934	.99962
4.05	.92295	.97205	.98644	.99226	.99509	.99664	.99756	.99816	.99856	.99940	.99966
4.10	.92385	.97267	.98687	.99257	.99532	.99682	.99771	.99828	.99866	.99946	.99970
4.15	.92473	.97327	.98729	.99287	.99554	.99699	.99785	.99840	.99876	.99951	.99973
4.20	.92560	.97386	.98768	.99315	.99576	.99716	.99798	.99850	.99885	.99955	.99976
4.25	.92644	.97442	.98806	.99342	.99595	.99731	.99810	.99860	.99893	.99960	.99978
4.30	.92727	.97497	.98843	.99368	.99614	.99745	.99822	.99869	.99900	.99963	.99981
4.35	.92807	.97550	.98878	.99392	.99632	.99759	.99832	.99878	.99907	.99967	.99983
4.40	.92887	.97602	.98912	.99415	.99649	.99772	.99842	.99886	.99914	.99970	.99985
4.45	.92964	.97652	.98944	.99438	.99665	.99784	.99851	.99893	.99920	.99973	.99986
4.50	.93040	.97700	.98975	.99459	.99680	.99795	.99860	.99900	.99926	.99975	.99988
4.55	.93114	.97747	.99005	.99479	.99694	.99805	.99868	.99906	.99931	.99977	.99989
4.60	.93186	.97792	.99034	.99498	.99708	.99815	.99876	.99912	.99935	.99979	.99990
4.65	.93257	.97837	.99062	.99517	.99721	.99825	.99883	.99918	.99940	.99981	.99991
4.70	.93327	.97879	.99089	.99535	.99733	.99834	.99890	.99923	.99944	.99983	.99992
4.75	.93395	.97921	.99115	.99551	.99745	.99842	.99896	.99928	.99948	.99984	.99993
4.80	.93462	.97962	.99140	.99568	.99756	.99850	.99902	.99932	.99951	.99986	.99994
4.85	.93528	.98001	.99164	.99583	.99766	.99857	.99907	.99936	.99955	.99987	.99994
4.90	.93592	.98039	.99187	.99598	.99776	.99864	.99912	.99940	.99958	.99988	.99995
4.95	.93655	.98076	.99209	.99612	.99786	.99871	.99917	.99944	.99960	.99989	.99996

Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	24	29	39	49	59	69	79	89	99	149	199
1.00	.83636	.83721	.83826	.83889	.83930	.83960	.83982	.83999	.84013	.84053	.84074
1.05	.84791	.84880	.84991	.85057	.85100	.85131	.85154	.85172	.85186	.85229	.85250
1.10	.85888	.85981	.86096	.86165	.86210	.86242	.86266	.86285	.86300	.86345	.86367
1.15	.86926	.87023	.87143	.87214	.87261	.87294	.87319	.87339	.87354	.87401	.87424
1.20	.87907	.88007	.88131	.88205	.88253	.88288	.88314	.88334	.88350	.88398	.88422
1.25	.88832	.88935	.89063	.89138	.89188	.89224	.89250	.89271	.89288	.89337	.89362
1.30	.89703	.89808	.89938	.90016	.90067	.90104	.90131	.90152	.90169	.90220	.90245
1.35	.90519	.90627	.90760	.90839	.90891	.90929	.90956	.90978	.90995	.91047	.91073
1.40	.91285	.91394	.91529	.91609	.91662	.91700	.91729	.91751	.91768	.91820	.91846
1.45	.92000	.92111	.92247	.92329	.92382	.92421	.92449	.92471	.92489	.92542	.92568
1.50	.92667	.92779	.92917	.92998	.93053	.93091	.93120	.93142	.93160	.93213	.93240
1.55	.93289	.93401	.93539	.93621	.93676	.93714	.93743	.93765	.93783	.93837	.93863
1.60	.93866	.93978	.94117	.94199	.94253	.94292	.94320	.94343	.94361	.94414	.94441
1.65	.94401	.94513	.94651	.94733	.94787	.94826	.94854	.94877	.94894	.94948	.94974
1.70	.94897	.95008	.95145	.95226	.95280	.95318	.95347	.95369	.95386	.95439	.95465
1.75	.95355	.95465	.95601	.95681	.95734	.95772	.95800	.95822	.95839	.95891	.95917
1.80	.95778	.95886	.96020	.96099	.96151	.96188	.96216	.96238	.96255	.96306	.96331
1.85	.96167	.96274	.96405	.96483	.96534	.96570	.96597	.96618	.96635	.96685	.96710
1.90	.96524	.96629	.96758	.96834	.96884	.96919	.96946	.96966	.96983	.97032	.97056
1.95	.96852	.96955	.97080	.97155	.97203	.97238	.97264	.97284	.97300	.97347	.97371
2.00	.97153	.97253	.97375	.97447	.97494	.97528	.97553	.97573	.97588	.97634	.97657
2.05	.97428	.97525	.97643	.97713	.97759	.97792	.97816	.97835	.97850	.97894	.97916
2.10	.97679	.97773	.97888	.97955	.97999	.98031	.98054	.98072	.98086	.98129	.98151
2.15	.97908	.97999	.98109	.98174	.98217	.98247	.98269	.98287	.98300	.98342	.98362
2.20	.98116	.98204	.98310	.98372	.98413	.98442	.98464	.98480	.98493	.98533	.98552
2.25	.98306	.98390	.98492	.98551	.98590	.98618	.98638	.98654	.98667	.98704	.98723
2.30	.98478	.98558	.98656	.98713	.98750	.98776	.98796	.98811	.98823	.98858	.98876
2.35	.98633	.98710	.98804	.98858	.98893	.98918	.98936	.98951	.98962	.98996	.99012
2.40	.98774	.98848	.98937	.98988	.99022	.99045	.99063	.99076	.99087	.99119	.99134
2.45	.98902	.98972	.99056	.99105	.99136	.99159	.99175	.99188	.99198	.99228	.99242
2.50	.99017	.99084	.99163	.99209	.99239	.99260	.99275	.99287	.99297	.99325	.99339
2.55	.99121	.99184	.99259	.99302	.99331	.99350	.99365	.99376	.99385	.99411	.99424
2.60	.99215	.99274	.99345	.99386	.99412	.99430	.99444	.99454	.99463	.99487	.99499
2.65	.99299	.99355	.99422	.99460	.99484	.99501	.99514	.99524	.99531	.99554	.99565
2.70	.99375	.99427	.99490	.99525	.99548	.99564	.99576	.99585	.99592	.99613	.99623
2.75	.99443	.99492	.99551	.99584	.99605	.99620	.99631	.99639	.99646	.99665	.99675
2.80	.99504	.99550	.99605	.99635	.99655	.99669	.99679	.99687	.99693	.99711	.99719
2.85	.99558	.99602	.99652	.99681	.99699	.99712	.99721	.99728	.99734	.99750	.99758
2.90	.99607	.99648	.99695	.99721	.99738	.99750	.99758	.99765	.99770	.99785	.99792
2.95	.99651	.99689	.99732	.99757	.99772	.99783	.99791	.99797	.99802	.99815	.99822

Tabelle der t-Verteilung

Tabelliert ist die Verteilungsfunktion $t_n(x)$ der t-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$x \setminus n$	24	29	39	49	59	69	79	89	99	149	199
3.00	.99690	.99725	.99766	.99788	.99802	.99812	.99819	.99825	.99829	.99842	.99848
3.05	.99725	.99757	.99795	.99816	.99829	.99838	.99844	.99849	.99853	.99865	.99870
3.10	.99756	.99786	.99821	.99840	.99852	.99860	.99866	.99870	.99874	.99884	.99889
3.15	.99783	.99812	.99843	.99861	.99872	.99879	.99885	.99889	.99892	.99901	.99906
3.20	.99808	.99834	.99863	.99879	.99889	.99896	.99901	.99905	.99908	.99916	.99920
3.25	.99830	.99854	.99881	.99896	.99905	.99911	.99915	.99919	.99921	.99929	.99932
3.30	.99849	.99872	.99896	.99910	.99918	.99923	.99927	.99930	.99933	.99940	.99943
3.35	.99867	.99887	.99910	.99922	.99929	.99934	.99938	.99941	.99943	.99949	.99952
3.40	.99882	.99901	.99922	.99933	.99939	.99944	.99947	.99949	.99951	.99957	.99959
3.45	.99896	.99913	.99932	.99942	.99948	.99952	.99955	.99957	.99959	.99964	.99966
3.50	.99908	.99924	.99941	.99950	.99955	.99959	.99962	.99964	.99965	.99969	.99971
3.55	.99919	.99933	.99949	.99957	.99962	.99965	.99967	.99969	.99970	.99974	.99976
3.60	.99928	.99941	.99956	.99963	.99967	.99970	.99972	.99974	.99975	.99978	.99980
3.65	.99937	.99949	.99962	.99968	.99972	.99975	.99977	.99978	.99979	.99982	.99983
3.70	.99944	.99955	.99967	.99973	.99976	.99979	.99980	.99981	.99982	.99985	.99986
3.75	.99951	.99961	.99971	.99977	.99980	.99982	.99983	.99984	.99985	.99987	.99988
3.80	.99956	.99966	.99975	.99980	.99983	.99985	.99986	.99987	.99987	.99989	.99990
3.85	.99962	.99970	.99979	.99983	.99985	.99987	.99988	.99989	.99990	.99991	.99992
3.90	.99966	.99974	.99982	.99985	.99988	.99989	.99990	.99991	.99991	.99993	.99993
3.95	.99970	.99977	.99984	.99987	.99989	.99991	.99992	.99992	.99993	.99994	.99995
4.00	.99974	.99980	.99986	.99989	.99991	.99992	.99993	.99993	.99994	.99995	.99996
4.05	.99977	.99983	.99988	.99991	.99992	.99993	.99994	.99995	.99995	.99996	.99996
4.10	.99980	.99985	.99990	.99992	.99994	.99994	.99995	.99995	.99996	.99997	.99997
4.15	.99982	.99987	.99991	.99993	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99997	.99998
4.20	.99984	.99988	.99992	.99994	.99995	.99996	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998
4.25	.99986	.99990	.99994	.99995	.99996	.99997	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998
4.30	.99988	.99991	.99994	.99996	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998	.99999
4.35	.99989	.99992	.99995	.99997	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998	.99999	.99999
4.40	.99990	.99993	.99996	.99997	.99998	.99998	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999
4.45	.99992	.99994	.99997	.99998	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999
4.50	.99993	.99995	.99997	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999
4.55	.99993	.99996	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	1
4.60	.99994	.99996	.99998	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1
4.65	.99995	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1
4.70	.99996	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1	1	1
4.75	.99996	.99997	.99999	.99999	.99999	.99999	1	1	1	1	1
4.80	.99997	.99998	.99999	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1
4.85	.99997	.99998	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1	1
4.90	.99997	.99998	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1	1
4.95	.99998	.99999	.99999	1	1	1	1	1	1	1	1

A.5 Quantile der χ^2-Verteilung

Tabelliert ist das α-Quantil $\chi^2_{n;\,\alpha}$ der χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden.

$n \setminus \alpha$	0.01	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	.0002	.0010	.0039	.0158	.1015	.4549	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	.0201	.0507	.1026	.2107	.5754	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60
3	.1148	.2158	.3518	.5844	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84
4	.2971	.4844	.7107	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86
5	.5543	.8312	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.8721	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2
150	112.7	118.0	122.7	128.3	138.0	149.3	161.3	172.6	179.6	185.8	193.2	198.4
200	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	199.3	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3
250	200.9	208.1	214.4	221.8	234.6	249.3	264.7	279.1	287.9	295.7	304.9	311.3
300	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	299.3	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8
400	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	399.3	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6
500	429.4	439.9	449.1	459.9	478.3	499.3	521.0	540.9	553.1	563.9	576.5	585.2
600	522.4	534.0	544.2	556.1	576.3	599.3	623.0	644.8	658.1	669.8	683.5	693.0
700	615.9	628.6	639.6	652.5	674.4	699.3	724.9	748.4	762.7	775.2	790.0	800.1
800	709.9	723.5	735.4	749.2	772.7	799.3	826.6	851.7	866.9	880.3	896.0	906.8
900	804.3	818.8	831.4	846.1	871.0	899.3	928.2	954.8	970.9	985.0	1002	1013
1000	898.9	914.3	927.6	943.1	969.5	999.3	1030	1058	1075	1090	1107	1119

A.6 Quantile der Fisher'schen $F_{m,n}$-Verteilung: 90%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.90}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	39.863	49.500	53.593	55.833	57.240	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195
2	8.526	9.000	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.240	5.230
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.010	3.979	3.955	3.936	3.920
5	4.060	3.780	3.619	3.520	3.453	3.404	3.368	3.339	3.316	3.297
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538
9	3.360	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.440	2.416
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323
11	3.225	2.860	2.660	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248
12	3.177	2.807	2.606	2.480	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188
13	3.136	2.763	2.560	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095
15	3.073	2.695	2.490	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.130	2.079	2.038	2.005	1.977
19	2.990	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956
20	2.975	2.589	2.380	2.249	2.158	2.091	2.040	1.999	1.965	1.937
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.920
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.060	2.008	1.967	1.933	1.904
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.995	1.953	1.919	1.890
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.983	1.941	1.906	1.877
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.073	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.943	1.900	1.865	1.836
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.980	1.927	1.884	1.849	1.819
35	2.855	2.461	2.247	2.113	2.019	1.950	1.896	1.852	1.817	1.787
40	2.835	2.440	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763
45	2.820	2.425	2.210	2.074	1.980	1.909	1.855	1.811	1.774	1.744
50	2.809	2.412	2.197	2.061	1.966	1.895	1.840	1.796	1.760	1.729
55	2.799	2.402	2.186	2.050	1.955	1.884	1.829	1.785	1.748	1.717
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707
65	2.784	2.386	2.170	2.033	1.938	1.867	1.811	1.767	1.730	1.699
70	2.779	2.380	2.164	2.027	1.931	1.860	1.804	1.760	1.723	1.691
75	2.774	2.375	2.158	2.021	1.926	1.854	1.798	1.754	1.716	1.685
80	2.769	2.370	2.154	2.016	1.921	1.849	1.793	1.748	1.711	1.680
85	2.765	2.366	2.149	2.012	1.916	1.845	1.789	1.744	1.706	1.675
90	2.762	2.363	2.146	2.008	1.912	1.841	1.785	1.739	1.702	1.670
95	2.759	2.359	2.142	2.005	1.909	1.837	1.781	1.736	1.698	1.667
100	2.756	2.356	2.139	2.002	1.906	1.834	1.778	1.732	1.695	1.663
150	2.739	2.338	2.121	1.983	1.886	1.814	1.757	1.712	1.674	1.642
200	2.731	2.329	2.111	1.973	1.876	1.804	1.747	1.701	1.663	1.631
300	2.722	2.320	2.102	1.964	1.867	1.794	1.737	1.691	1.652	1.620
400	2.718	2.316	2.098	1.959	1.862	1.789	1.732	1.686	1.647	1.615
500	2.716	2.313	2.095	1.956	1.859	1.786	1.729	1.683	1.644	1.612
∞	2.706	2.303	2.084	1.945	1.847	1.774	1.717	1.670	1.632	1.599

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 95%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.95}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.448	199.500	215.707	224.583	230.162	233.986	236.768	238.883	240.543	241.882
2	18.513	19.000	19.164	19.247	19.296	19.330	19.353	19.371	19.385	19.396
3	10.128	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.396	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
35	4.121	3.267	2.874	2.641	2.485	2.372	2.285	2.217	2.161	2.114
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
45	4.057	3.204	2.812	2.579	2.422	2.308	2.221	2.152	2.096	2.049
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
55	4.016	3.165	2.773	2.540	2.383	2.269	2.181	2.112	2.055	2.008
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
65	3.989	3.138	2.746	2.513	2.356	2.242	2.154	2.084	2.027	1.980
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
75	3.968	3.119	2.727	2.494	2.337	2.222	2.134	2.064	2.007	1.959
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
85	3.953	3.104	2.712	2.479	2.322	2.207	2.119	2.049	1.992	1.944
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
95	3.941	3.092	2.700	2.467	2.310	2.196	2.108	2.037	1.980	1.932
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
300	3.873	3.026	2.635	2.402	2.244	2.129	2.040	1.969	1.911	1.862
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854
500	3.860	3.014	2.623	2.390	2.232	2.117	2.028	1.957	1.899	1.850
∞	3.842	2.996	2.605	2.372	2.215	2.099	2.010	1.939	1.880	1.831

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 97.5%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.975}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	647.789	799.500	864.163	899.583	921.848	937.111	948.217	956.656	963.285	968.627
2	38.506	39.000	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.540	14.473	14.419
4	12.218	10.649	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.980	8.905	8.844
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619
6	8.813	7.260	6.599	6.227	5.988	5.820	5.695	5.600	5.523	5.461
7	8.073	6.542	5.890	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.320	4.197	4.102	4.026	3.964
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717
11	6.724	5.256	4.630	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.250
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.380	3.285	3.209	3.147
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922
18	5.978	4.560	3.954	3.608	3.382	3.221	3.100	3.005	2.929	2.866
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.880	2.817
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774
21	5.827	4.420	3.819	3.475	3.250	3.090	2.969	2.874	2.798	2.735
22	5.786	4.383	3.783	3.440	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.700
23	5.750	4.349	3.750	3.408	3.183	3.023	2.902	2.808	2.731	2.668
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.640
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613
26	5.659	4.265	3.670	3.329	3.105	2.945	2.824	2.729	2.653	2.590
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.802	2.707	2.631	2.568
28	5.610	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.782	2.687	2.611	2.547
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.763	2.669	2.592	2.529
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511
35	5.485	4.106	3.517	3.178	2.956	2.796	2.676	2.581	2.504	2.440
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388
45	5.377	4.008	3.422	3.086	2.864	2.705	2.584	2.489	2.412	2.348
50	5.340	3.975	3.390	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317
55	5.310	3.948	3.364	3.029	2.807	2.648	2.528	2.433	2.355	2.291
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270
65	5.265	3.906	3.324	2.990	2.769	2.610	2.489	2.394	2.317	2.252
70	5.247	3.890	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237
75	5.232	3.876	3.296	2.962	2.741	2.582	2.461	2.366	2.289	2.224
80	5.218	3.864	3.284	2.950	2.730	2.571	2.450	2.355	2.277	2.213
85	5.207	3.854	3.274	2.940	2.720	2.561	2.440	2.345	2.268	2.203
90	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194
95	5.187	3.836	3.257	2.924	2.703	2.544	2.424	2.328	2.251	2.186
100	5.179	3.828	3.250	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179
150	5.126	3.781	3.204	2.872	2.652	2.494	2.373	2.278	2.200	2.135
200	5.100	3.758	3.182	2.850	2.630	2.472	2.351	2.256	2.178	2.113
300	5.075	3.735	3.160	2.829	2.609	2.451	2.330	2.234	2.156	2.091
400	5.062	3.723	3.149	2.818	2.598	2.440	2.319	2.224	2.146	2.080
500	5.054	3.716	3.142	2.811	2.592	2.434	2.313	2.217	2.139	2.074
∞	5.024	3.689	3.116	2.786	2.566	2.408	2.288	2.192	2.114	2.048

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 99%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.99}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	98.503	99.000	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399
3	34.116	30.817	29.457	28.710	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229
4	21.198	18.000	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546
5	16.258	13.274	12.060	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051
6	13.745	10.925	9.780	9.148	8.746	8.466	8.260	8.102	7.976	7.874
7	12.246	9.547	8.451	7.847	7.460	7.191	6.993	6.840	6.719	6.620
8	11.259	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814
9	10.561	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257
10	10.044	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.200	5.057	4.942	4.849
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539
12	9.330	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.640	4.499	4.388	4.296
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.620	4.441	4.302	4.191	4.100
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.140	4.030	3.939
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.890	3.780	3.691
17	8.400	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508
19	8.185	5.926	5.010	4.500	4.171	3.939	3.765	3.631	3.522	3.434
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368
21	8.017	5.780	4.874	4.369	4.042	3.812	3.640	3.506	3.398	3.310
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.710	3.539	3.406	3.299	3.211
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168
25	7.770	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129
26	7.721	5.526	4.637	4.140	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.120	3.032
29	7.598	5.420	4.538	4.045	3.725	3.499	3.330	3.198	3.092	3.005
30	7.562	5.390	4.510	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979
35	7.419	5.268	4.396	3.908	3.592	3.368	3.200	3.069	2.963	2.876
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801
45	7.234	5.110	4.249	3.767	3.454	3.232	3.066	2.935	2.830	2.743
50	7.171	5.057	4.199	3.720	3.408	3.186	3.020	2.890	2.785	2.698
55	7.119	5.013	4.159	3.681	3.370	3.149	2.983	2.853	2.748	2.662
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632
65	7.042	4.947	4.098	3.622	3.313	3.093	2.928	2.798	2.693	2.607
70	7.011	4.922	4.074	3.600	3.291	3.071	2.906	2.777	2.672	2.585
75	6.985	4.900	4.054	3.580	3.272	3.052	2.887	2.758	2.653	2.567
80	6.963	4.881	4.036	3.563	3.255	3.036	2.871	2.742	2.637	2.551
85	6.943	4.864	4.021	3.548	3.240	3.022	2.857	2.728	2.623	2.537
90	6.925	4.849	4.007	3.535	3.228	3.009	2.845	2.715	2.611	2.524
95	6.909	4.836	3.995	3.523	3.216	2.998	2.833	2.704	2.600	2.513
100	6.895	4.824	3.984	3.513	3.206	2.988	2.823	2.694	2.590	2.503
150	6.807	4.749	3.915	3.447	3.142	2.924	2.761	2.632	2.528	2.441
200	6.763	4.713	3.881	3.414	3.110	2.893	2.730	2.601	2.497	2.411
300	6.720	4.677	3.848	3.382	3.079	2.862	2.699	2.571	2.467	2.380
	2.571	2.467	2.380							
400	6.699	4.659	3.831	3.366	3.063	2.847	2.684	2.556	2.452	2.365
500	6.686	4.648	3.821	3.357	3.054	2.838	2.675	2.547	2.443	2.356
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.640	2.511	2.408	2.321

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 99.5%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.995}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686
4	31.333	26.284	24.259	23.154	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967
5	22.785	18.314	16.530	15.556	14.940	14.513	14.200	13.961	13.772	13.618
6	18.635	14.544	12.917	12.028	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.250
7	16.236	12.404	10.882	10.050	9.522	9.155	8.885	8.678	8.514	8.380
8	14.688	11.042	9.596	8.805	8.302	7.952	7.694	7.496	7.339	7.211
9	13.614	10.107	8.717	7.956	7.471	7.134	6.885	6.693	6.541	6.417
10	12.826	9.427	8.081	7.343	6.872	6.545	6.302	6.116	5.968	5.847
11	12.226	8.912	7.600	6.881	6.422	6.102	5.865	5.682	5.537	5.418
12	11.754	8.510	7.226	6.521	6.071	5.757	5.525	5.345	5.202	5.085
13	11.374	8.186	6.926	6.233	5.791	5.482	5.253	5.076	4.935	4.820
14	11.060	7.922	6.680	5.998	5.562	5.257	5.031	4.857	4.717	4.603
15	10.798	7.701	6.476	5.803	5.372	5.071	4.847	4.674	4.536	4.424
16	10.575	7.514	6.303	5.638	5.212	4.913	4.692	4.521	4.384	4.272
17	10.384	7.354	6.156	5.497	5.075	4.779	4.559	4.389	4.254	4.142
18	10.218	7.215	6.028	5.375	4.956	4.663	4.445	4.276	4.141	4.030
19	10.073	7.093	5.916	5.268	4.853	4.561	4.345	4.177	4.043	3.933
20	9.944	6.986	5.818	5.174	4.762	4.472	4.257	4.090	3.956	3.847
21	9.830	6.891	5.730	5.091	4.681	4.393	4.179	4.013	3.880	3.771
22	9.727	6.806	5.652	5.017	4.609	4.322	4.109	3.944	3.812	3.703
23	9.635	6.730	5.582	4.950	4.544	4.259	4.047	3.882	3.750	3.642
24	9.551	6.661	5.519	4.890	4.486	4.202	3.991	3.826	3.695	3.587
25	9.475	6.598	5.462	4.835	4.433	4.150	3.939	3.776	3.645	3.537
26	9.406	6.541	5.409	4.785	4.384	4.103	3.893	3.730	3.599	3.492
27	9.342	6.489	5.361	4.740	4.340	4.059	3.850	3.687	3.557	3.450
28	9.284	6.440	5.317	4.698	4.300	4.020	3.811	3.649	3.519	3.412
29	9.230	6.396	5.276	4.659	4.262	3.983	3.775	3.613	3.483	3.377
30	9.180	6.355	5.239	4.623	4.228	3.949	3.742	3.580	3.450	3.344
35	8.976	6.188	5.086	4.479	4.088	3.812	3.607	3.447	3.318	3.212
40	8.828	6.066	4.976	4.374	3.986	3.713	3.509	3.350	3.222	3.117
45	8.715	5.974	4.892	4.294	3.909	3.638	3.435	3.276	3.149	3.044
50	8.626	5.902	4.826	4.232	3.849	3.578	3.376	3.219	3.092	2.988
55	8.554	5.843	4.773	4.181	3.800	3.531	3.330	3.173	3.046	2.942
60	8.495	5.795	4.729	4.140	3.760	3.492	3.291	3.134	3.008	2.904
65	8.445	5.755	4.692	4.105	3.726	3.459	3.259	3.103	2.977	2.873
70	8.403	5.720	4.661	4.076	3.698	3.431	3.232	3.076	2.950	2.846
75	8.366	5.691	4.635	4.050	3.674	3.407	3.208	3.052	2.927	2.823
80	8.335	5.665	4.611	4.028	3.652	3.387	3.188	3.032	2.907	2.803
85	8.307	5.643	4.591	4.009	3.634	3.368	3.170	3.014	2.889	2.786
90	8.282	5.623	4.573	3.992	3.617	3.352	3.154	2.999	2.873	2.770
95	8.260	5.605	4.557	3.977	3.603	3.338	3.140	2.985	2.860	2.756
100	8.241	5.589	4.542	3.963	3.589	3.325	3.127	2.972	2.847	2.744
150	8.118	5.490	4.453	3.878	3.508	3.245	3.048	2.894	2.770	2.667
200	8.057	5.441	4.408	3.837	3.467	3.206	3.010	2.856	2.732	2.629
300	7.997	5.393	4.365	3.796	3.428	3.167	2.972	2.818	2.694	2.592
400	7.968	5.369	4.343	3.775	3.408	3.148	2.953	2.800	2.676	2.573
500	7.950	5.355	4.330	3.763	3.396	3.137	2.941	2.788	2.665	2.562
∞	7.879	5.298	4.279	3.715	3.350	3.091	2.897	2.744	2.621	2.519

Fisher'sche $F_{m,n}$-Verteilung: 99.9%-Quantil

Tabelliert ist das α-Quantil $F_{m,n;\,0.999}$.

$n \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	35.507	27.000	23.703	21.924	20.803	20.030	19.463	19.030	18.688	18.411
7	29.245	21.689	18.772	17.198	16.206	15.521	15.019	14.634	14.330	14.083
8	25.415	18.494	15.829	14.392	13.485	12.858	12.398	12.046	11.767	11.540
9	22.857	16.387	13.902	12.560	11.714	11.128	10.698	10.368	10.107	9.894
10	21.040	14.905	12.553	11.283	10.481	9.926	9.517	9.204	8.956	8.754
11	19.687	13.812	11.561	10.346	9.578	9.047	8.655	8.355	8.116	7.922
12	18.643	12.974	10.804	9.633	8.892	8.379	8.001	7.710	7.480	7.292
13	17.815	12.313	10.209	9.073	8.354	7.856	7.489	7.206	6.982	6.799
14	17.143	11.779	9.729	8.622	7.922	7.436	7.077	6.802	6.583	6.404
15	16.587	11.339	9.335	8.253	7.567	7.092	6.741	6.471	6.256	6.081
16	16.120	10.971	9.006	7.944	7.272	6.805	6.460	6.195	5.984	5.812
17	15.722	10.658	8.727	7.683	7.022	6.562	6.223	5.962	5.754	5.584
18	15.379	10.390	8.487	7.459	6.808	6.355	6.021	5.763	5.558	5.390
19	15.081	10.157	8.280	7.265	6.622	6.175	5.845	5.590	5.388	5.222
20	14.819	9.953	8.098	7.096	6.461	6.019	5.692	5.440	5.239	5.075
21	14.587	9.772	7.938	6.947	6.318	5.881	5.557	5.308	5.109	4.946
22	14.380	9.612	7.796	6.814	6.191	5.758	5.438	5.190	4.993	4.832
23	14.195	9.468	7.669	6.696	6.078	5.649	5.331	5.085	4.890	4.730
24	14.028	9.339	7.554	6.589	5.977	5.550	5.235	4.991	4.797	4.638
25	13.877	9.223	7.451	6.493	5.885	5.462	5.148	4.906	4.713	4.555
26	13.739	9.116	7.357	6.406	5.802	5.381	5.070	4.829	4.637	4.480
27	13.613	9.019	7.272	6.326	5.726	5.308	4.998	4.759	4.568	4.412
28	13.498	8.931	7.193	6.253	5.656	5.241	4.933	4.695	4.505	4.349
29	13.391	8.849	7.121	6.186	5.593	5.179	4.873	4.636	4.447	4.292
30	13.293	8.773	7.054	6.125	5.534	5.122	4.817	4.581	4.393	4.239
35	12.896	8.470	6.787	5.876	5.298	4.894	4.595	4.363	4.178	4.027
40	12.609	8.251	6.595	5.698	5.128	4.731	4.436	4.207	4.024	3.874
45	12.392	8.086	6.450	5.564	5.001	4.608	4.316	4.090	3.909	3.760
50	12.222	7.956	6.336	5.459	4.901	4.512	4.222	3.998	3.818	3.671
55	12.085	7.853	6.246	5.375	4.822	4.435	4.148	3.925	3.746	3.600
60	11.973	7.768	6.171	5.307	4.757	4.372	4.086	3.865	3.687	3.541
65	11.879	7.697	6.109	5.249	4.702	4.320	4.035	3.815	3.638	3.493
70	11.799	7.637	6.057	5.201	4.656	4.275	3.992	3.773	3.596	3.452
75	11.731	7.585	6.011	5.159	4.617	4.237	3.955	3.736	3.561	3.416
80	11.671	7.540	5.972	5.123	4.582	4.204	3.923	3.705	3.530	3.386
85	11.619	7.501	5.938	5.092	4.552	4.175	3.895	3.677	3.503	3.359
90	11.573	7.466	5.908	5.064	4.526	4.150	3.870	3.653	3.479	3.336
95	11.532	7.435	5.881	5.039	4.503	4.127	3.848	3.632	3.458	3.315
100	11.495	7.408	5.857	5.017	4.482	4.107	3.829	3.612	3.439	3.296
120	11.380	7.321	5.781	4.947	4.416	4.044	3.767	3.552	3.379	3.237
150	11.267	7.236	5.707	4.879	4.351	3.981	3.706	3.493	3.321	3.179
200	11.154	7.152	5.634	4.812	4.287	3.920	3.647	3.434	3.264	3.123
300	11.044	7.069	5.562	4.746	4.225	3.860	3.588	3.377	3.207	3.067
400	10.989	7.028	5.527	4.713	4.194	3.830	3.560	3.349	3.179	3.040
500	10.957	7.004	5.506	4.693	4.176	3.813	3.542	3.332	3.163	3.023
∞	10.828	6.908	5.422	4.617	4.103	3.743	3.475	3.266	3.097	2.959

A.7 Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.900	.684	.536	.438	.369	.319	.280	.250	.226	.206	.189	.175	.162	.152	.142
2	.949	.804	.680	.584	.510	.453	.406	.368	.337	.310	.287	.268	.251	.236	.222
3	.965	.857	.753	.667	.596	.538	.490	.450	.415	.386	.360	.337	.317	.300	.284
4	.974	.888	.799	.721	.655	.599	.552	.511	.475	.444	.417	.393	.371	.352	.334
5	.979	.907	.830	.760	.699	.646	.599	.559	.523	.492	.464	.439	.416	.396	.378
6	.983	.921	.853	.790	.733	.682	.638	.598	.563	.532	.504	.478	.455	.434	.415
7	.985	.931	.871	.812	.759	.712	.669	.631	.596	.565	.537	.512	.489	.467	.448
8	.987	.939	.884	.831	.781	.736	.695	.658	.625	.594	.567	.541	.518	.497	.477
9	.988	.945	.895	.846	.799	.757	.718	.682	.650	.620	.592	.567	.544	.523	.503
10	.990	.951	.904	.858	.815	.774	.737	.703	.671	.642	.615	.590	.568	.546	.526
11	.990	.955	.912	.869	.828	.790	.754	.721	.690	.662	.636	.611	.589	.567	.548
12	.991	.958	.919	.878	.839	.803	.769	.737	.707	.679	.654	.630	.608	.587	.567
13	.992	.961	.924	.886	.849	.815	.782	.751	.722	.695	.670	.647	.625	.604	.585
14	.993	.964	.929	.893	.858	.825	.793	.764	.736	.710	.685	.662	.641	.620	.601
15	.993	.966	.933	.899	.866	.834	.804	.775	.748	.723	.699	.676	.655	.635	.616
16	.993	.968	.937	.905	.873	.842	.813	.786	.759	.735	.711	.689	.669	.649	.630
17	.994	.970	.941	.910	.879	.850	.822	.795	.770	.746	.723	.701	.681	.662	.643
18	.994	.972	.944	.914	.885	.857	.830	.804	.779	.756	.733	.712	.692	.673	.655
19	.994	.973	.946	.918	.890	.863	.837	.812	.788	.765	.743	.723	.703	.684	.667
20	.995	.974	.949	.922	.895	.869	.843	.819	.796	.774	.752	.732	.713	.695	.677
21	.995	.976	.951	.925	.899	.874	.849	.826	.803	.782	.761	.741	.722	.704	.687
22	.995	.977	.953	.928	.903	.879	.855	.832	.810	.789	.769	.749	.731	.713	.696
23	.995	.978	.955	.931	.907	.883	.860	.838	.817	.796	.776	.757	.739	.722	.705
24	.996	.979	.957	.934	.911	.888	.865	.843	.823	.802	.783	.765	.747	.730	.713
25	.996	.979	.958	.936	.914	.891	.870	.849	.828	.809	.790	.772	.754	.737	.721
26	.996	.980	.960	.938	.917	.895	.874	.853	.833	.814	.796	.778	.761	.744	.729
27	.996	.981	.961	.941	.919	.898	.878	.858	.838	.820	.802	.784	.767	.751	.736
28	.996	.982	.963	.943	.922	.902	.882	.862	.843	.825	.807	.790	.773	.758	.742
29	.996	.982	.964	.944	.924	.905	.885	.866	.848	.830	.812	.795	.779	.764	.749
30	.996	.983	.965	.946	.927	.907	.888	.870	.852	.834	.817	.801	.785	.769	.755
31	.997	.983	.966	.948	.929	.910	.892	.873	.856	.838	.822	.806	.790	.775	.760
32	.997	.984	.967	.949	.931	.913	.894	.877	.859	.843	.826	.810	.795	.780	.766
33	.997	.984	.968	.951	.933	.915	.897	.880	.863	.846	.830	.815	.800	.785	.771
34	.997	.985	.969	.952	.935	.917	.900	.883	.866	.850	.834	.819	.804	.790	.776
35	.997	.985	.970	.953	.936	.919	.902	.886	.870	.854	.838	.823	.809	.795	.781
36	.997	.986	.971	.955	.938	.921	.905	.889	.873	.857	.842	.827	.813	.799	.785
37	.997	.986	.971	.956	.939	.923	.907	.891	.876	.860	.845	.831	.817	.803	.790
38	.997	.986	.972	.957	.941	.925	.909	.894	.878	.863	.849	.835	.821	.807	.794
39	.997	.987	.973	.958	.942	.927	.911	.896	.881	.866	.852	.838	.824	.811	.798
40	.997	.987	.973	.959	.944	.928	.913	.898	.884	.869	.855	.841	.828	.815	.802
41	.997	.987	.974	.960	.945	.930	.915	.900	.886	.872	.858	.844	.831	.818	.806
42	.997	.988	.975	.961	.946	.932	.917	.903	.888	.874	.861	.847	.834	.822	.809
43	.998	.988	.975	.962	.947	.933	.919	.905	.891	.877	.863	.850	.838	.825	.813
44	.998	.988	.976	.962	.948	.934	.920	.906	.893	.879	.866	.853	.841	.828	.816
45	.998	.988	.976	.963	.950	.936	.922	.908	.895	.882	.869	.856	.843	.831	.819
46	.998	.989	.977	.964	.951	.937	.924	.910	.897	.884	.871	.858	.846	.834	.823
47	.998	.989	.977	.965	.952	.938	.925	.912	.899	.886	.873	.861	.849	.837	.826
48	.998	.989	.978	.965	.952	.939	.926	.913	.901	.888	.876	.863	.852	.840	.828
49	.998	.989	.978	.966	.953	.941	.928	.915	.902	.890	.878	.866	.854	.843	.831
50	.998	.990	.979	.967	.954	.942	.929	.917	.904	.892	.880	.868	.856	.845	.834

Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.134	.127	.120	.114	.109	.104	.099	.095	.091	.088	.085	.082	.079	.076	.074
2	.210	.199	.190	.181	.173	.166	.159	.153	.147	.142	.137	.132	.128	.124	.120
3	.269	.257	.245	.234	.224	.215	.207	.199	.192	.185	.179	.173	.168	.163	.158
4	.319	.304	.291	.279	.268	.258	.248	.239	.231	.223	.216	.209	.203	.197	.191
5	.361	.345	.331	.318	.306	.295	.284	.275	.265	.257	.249	.241	.234	.228	.221
6	.397	.381	.366	.352	.340	.328	.317	.306	.297	.287	.279	.271	.263	.256	.249
7	.430	.413	.398	.383	.370	.358	.346	.335	.325	.315	.306	.297	.289	.282	.274
8	.459	.442	.426	.411	.397	.385	.372	.361	.350	.340	.331	.322	.313	.305	.298
9	.484	.467	.451	.436	.422	.409	.397	.385	.374	.364	.354	.345	.336	.327	.319
10	.508	.491	.475	.459	.445	.432	.419	.407	.396	.385	.375	.366	.357	.348	.340
11	.529	.512	.496	.481	.466	.453	.440	.428	.416	.406	.395	.385	.376	.367	.359
12	.549	.532	.515	.500	.486	.472	.459	.447	.435	.424	.414	.404	.394	.385	.377
13	.567	.550	.533	.518	.504	.490	.477	.465	.453	.442	.431	.421	.412	.402	.394
14	.583	.566	.550	.535	.521	.507	.494	.481	.470	.458	.448	.438	.428	.418	.409
15	.599	.582	.566	.551	.536	.522	.509	.497	.485	.474	.463	.453	.443	.434	.425
16	.613	.596	.580	.565	.551	.537	.524	.512	.500	.489	.478	.467	.457	.448	.439
17	.626	.609	.594	.579	.564	.551	.538	.526	.514	.502	.492	.481	.471	.462	.452
18	.638	.622	.606	.591	.577	.564	.551	.539	.527	.515	.505	.494	.484	.475	.465
19	.650	.634	.618	.603	.589	.576	.563	.551	.539	.528	.517	.507	.497	.487	.478
20	.660	.645	.629	.615	.601	.588	.575	.563	.551	.540	.529	.518	.508	.499	.489
21	.671	.655	.640	.625	.612	.598	.586	.574	.562	.551	.540	.530	.519	.510	.501
22	.680	.665	.650	.636	.622	.609	.596	.584	.573	.561	.551	.540	.530	.521	.511
23	.689	.674	.659	.645	.632	.619	.606	.594	.583	.571	.561	.550	.540	.531	.521
24	.698	.683	.668	.654	.641	.628	.616	.604	.592	.581	.570	.560	.550	.541	.531
25	.706	.691	.677	.663	.650	.637	.625	.613	.601	.590	.580	.569	.560	.550	.541
26	.713	.699	.685	.671	.658	.645	.633	.621	.610	.599	.589	.578	.569	.559	.550
27	.721	.706	.692	.679	.666	.653	.641	.630	.618	.608	.597	.587	.577	.568	.558
28	.727	.713	.699	.686	.673	.661	.649	.638	.626	.616	.605	.595	.585	.576	.567
29	.734	.720	.706	.693	.681	.668	.657	.645	.634	.623	.613	.603	.593	.584	.575
30	.740	.726	.713	.700	.688	.675	.664	.652	.641	.631	.621	.611	.601	.592	.582
31	.746	.733	.719	.707	.694	.682	.671	.659	.649	.638	.628	.618	.608	.599	.590
32	.752	.738	.725	.713	.701	.689	.677	.666	.655	.645	.635	.625	.615	.606	.597
33	.757	.744	.731	.719	.707	.695	.684	.673	.662	.652	.641	.632	.622	.613	.604
34	.763	.749	.737	.724	.712	.701	.690	.679	.668	.658	.648	.638	.629	.620	.611
35	.768	.755	.742	.730	.718	.707	.696	.685	.674	.664	.654	.645	.635	.626	.617
36	.772	.760	.747	.735	.723	.712	.701	.690	.680	.670	.660	.651	.641	.632	.624
37	.777	.764	.752	.740	.729	.717	.707	.696	.686	.676	.666	.656	.647	.638	.630
38	.781	.769	.757	.745	.734	.723	.712	.701	.691	.681	.672	.662	.653	.644	.635
39	.785	.773	.761	.750	.738	.728	.717	.706	.696	.687	.677	.668	.659	.650	.641
40	.790	.777	.766	.754	.743	.732	.722	.711	.701	.692	.682	.673	.664	.655	.647
41	.793	.782	.770	.759	.748	.737	.726	.716	.706	.697	.687	.678	.669	.660	.652
42	.797	.785	.774	.763	.752	.741	.731	.721	.711	.702	.692	.683	.674	.666	.657
43	.801	.789	.778	.767	.756	.746	.735	.725	.716	.706	.697	.688	.679	.671	.662
44	.804	.793	.782	.771	.760	.750	.740	.730	.720	.711	.702	.693	.684	.675	.667
45	.808	.796	.785	.775	.764	.754	.744	.734	.724	.715	.706	.697	.688	.680	.672
46	.811	.800	.789	.778	.768	.758	.748	.738	.729	.719	.710	.702	.693	.685	.676
47	.814	.803	.792	.782	.772	.761	.752	.742	.733	.724	.715	.706	.697	.689	.681
48	.817	.806	.796	.785	.775	.765	.755	.746	.737	.728	.719	.710	.702	.693	.685
49	.820	.809	.799	.789	.779	.769	.759	.750	.740	.731	.723	.714	.706	.697	.689
50	.823	.812	.802	.792	.782	.772	.763	.753	.744	.735	.727	.718	.710	.701	.694

Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.072	.069	.067	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.053	.052	.051	.050
2	.116	.113	.110	.107	.104	.101	.099	.096	.094	.092	.089	.087	.086	.084	.082
3	.153	.149	.145	.141	.138	.134	.131	.128	.125	.122	.119	.116	.114	.112	.109
4	.186	.181	.176	.172	.167	.163	.159	.156	.152	.149	.146	.142	.139	.137	.134
5	.216	.210	.205	.199	.195	.190	.186	.181	.177	.174	.170	.166	.163	.160	.157
6	.242	.236	.230	.225	.220	.215	.210	.205	.201	.196	.192	.188	.185	.181	.178
7	.267	.261	.254	.248	.243	.237	.232	.227	.222	.218	.213	.209	.205	.201	.197
8	.290	.283	.277	.270	.264	.259	.253	.248	.243	.238	.233	.229	.224	.220	.216
9	.312	.304	.298	.291	.285	.279	.273	.267	.262	.257	.252	.247	.242	.238	.234
10	.332	.324	.317	.310	.304	.297	.291	.285	.280	.274	.269	.264	.259	.255	.250
11	.351	.343	.335	.328	.322	.315	.309	.303	.297	.291	.286	.281	.276	.271	.266
12	.368	.360	.353	.346	.339	.332	.325	.319	.313	.307	.302	.296	.291	.286	.281
13	.385	.377	.369	.362	.355	.348	.341	.335	.329	.323	.317	.311	.306	.301	.296
14	.401	.393	.385	.377	.370	.363	.356	.350	.343	.337	.331	.326	.320	.315	.310
15	.416	.408	.399	.392	.384	.377	.370	.364	.357	.351	.345	.339	.334	.328	.323
16	.430	.422	.414	.406	.398	.391	.384	.377	.371	.364	.358	.352	.347	.341	.336
17	.444	.435	.427	.419	.411	.404	.397	.390	.383	.377	.371	.365	.359	.353	.348
18	.456	.448	.440	.432	.424	.417	.409	.402	.396	.389	.383	.377	.371	.365	.360
19	.469	.460	.452	.444	.436	.429	.421	.414	.408	.401	.395	.388	.383	.377	.371
20	.480	.472	.463	.455	.448	.440	.433	.426	.419	.412	.406	.400	.394	.388	.382
21	.492	.483	.475	.466	.459	.451	.444	.437	.430	.423	.417	.410	.404	.398	.393
22	.502	.494	.485	.477	.469	.462	.454	.447	.440	.433	.427	.421	.414	.409	.403
23	.512	.504	.495	.487	.479	.472	.464	.457	.450	.443	.437	.431	.424	.418	.413
24	.522	.514	.505	.497	.489	.482	.474	.467	.460	.453	.447	.440	.434	.428	.422
25	.532	.523	.515	.506	.499	.491	.484	.476	.469	.462	.456	.449	.443	.437	.431
26	.541	.532	.524	.516	.508	.500	.493	.485	.478	.471	.465	.458	.452	.446	.440
27	.549	.541	.532	.524	.516	.509	.501	.494	.487	.480	.474	.467	.461	.455	.449
28	.558	.549	.541	.533	.525	.517	.510	.502	.495	.489	.482	.475	.469	.463	.457
29	.566	.557	.549	.541	.533	.525	.518	.511	.504	.497	.490	.484	.477	.471	.465
30	.574	.565	.557	.549	.541	.533	.526	.519	.511	.505	.498	.491	.485	.479	.473
31	.581	.573	.564	.556	.548	.541	.533	.526	.519	.512	.506	.499	.493	.487	.480
32	.588	.580	.572	.564	.556	.548	.541	.534	.527	.520	.513	.506	.500	.494	.488
33	.595	.587	.579	.571	.563	.555	.548	.541	.534	.527	.520	.514	.507	.501	.495
34	.602	.594	.585	.578	.570	.562	.555	.548	.541	.534	.527	.521	.514	.508	.502
35	.609	.600	.592	.584	.576	.569	.562	.554	.547	.541	.534	.527	.521	.515	.509
36	.615	.607	.598	.591	.583	.575	.568	.561	.554	.547	.540	.534	.528	.521	.515
37	.621	.613	.605	.597	.589	.582	.574	.567	.560	.553	.547	.540	.534	.528	.522
38	.627	.619	.611	.603	.595	.588	.580	.573	.566	.560	.553	.547	.540	.534	.528
39	.633	.624	.616	.609	.601	.594	.586	.579	.572	.566	.559	.553	.546	.540	.534
40	.638	.630	.622	.614	.607	.599	.592	.585	.578	.571	.565	.558	.552	.546	.540
41	.644	.636	.628	.620	.612	.605	.598	.591	.584	.577	.571	.564	.558	.552	.546
42	.649	.641	.633	.625	.618	.610	.603	.596	.589	.583	.576	.570	.564	.557	.551
43	.654	.646	.638	.630	.623	.616	.609	.602	.595	.588	.582	.575	.569	.563	.557
44	.659	.651	.643	.636	.628	.621	.614	.607	.600	.593	.587	.581	.574	.568	.562
45	.664	.656	.648	.640	.633	.626	.619	.612	.605	.599	.592	.586	.579	.573	.567
46	.668	.660	.653	.645	.638	.631	.624	.617	.610	.604	.597	.591	.585	.578	.573
47	.673	.665	.657	.650	.643	.635	.628	.622	.615	.608	.602	.596	.589	.583	.577
48	.677	.669	.662	.654	.647	.640	.633	.626	.620	.613	.607	.600	.594	.588	.582
49	.682	.674	.666	.659	.652	.645	.638	.631	.624	.618	.611	.605	.599	.593	.587
50	.686	.678	.671	.663	.656	.649	.642	.635	.629	.622	.616	.610	.604	.598	.592

Quantile der Beta-Verteilung: 90%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.9}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.049	.048	.047	.046	.045	.044	.043	.043	.042	.041	.040	.040	.039	.038	.038
2	.080	.079	.077	.076	.074	.073	.071	.070	.069	.068	.067	.065	.064	.063	.062
3	.107	.105	.103	.101	.099	.097	.096	.094	.092	.091	.089	.088	.086	.085	.084
4	.131	.129	.126	.124	.122	.120	.117	.115	.113	.112	.110	.108	.106	.105	.103
5	.154	.151	.148	.145	.143	.140	.138	.135	.133	.131	.129	.127	.125	.123	.121
6	.174	.171	.168	.165	.162	.159	.157	.154	.152	.149	.147	.144	.142	.140	.138
7	.194	.190	.187	.184	.180	.177	.175	.172	.169	.166	.164	.161	.159	.156	.154
8	.212	.208	.205	.201	.198	.195	.191	.188	.185	.183	.180	.177	.174	.172	.169
9	.229	.226	.222	.218	.214	.211	.208	.204	.201	.198	.195	.192	.189	.187	.184
10	.246	.242	.238	.234	.230	.226	.223	.219	.216	.213	.210	.207	.204	.201	.198
11	.262	.257	.253	.249	.245	.241	.238	.234	.230	.227	.224	.221	.217	.214	.212
12	.277	.272	.268	.264	.259	.255	.252	.248	.244	.241	.237	.234	.231	.228	.224
13	.291	.286	.282	.277	.273	.269	.265	.261	.257	.254	.250	.247	.243	.240	.237
14	.305	.300	.295	.291	.286	.282	.278	.274	.270	.266	.263	.259	.256	.252	.249
15	.318	.313	.308	.304	.299	.295	.291	.286	.282	.279	.275	.271	.267	.264	.261
16	.331	.326	.321	.316	.311	.307	.303	.298	.294	.290	.286	.283	.279	.275	.272
17	.343	.338	.333	.328	.323	.319	.314	.310	.306	.302	.298	.294	.290	.286	.283
18	.354	.349	.344	.339	.334	.330	.325	.321	.317	.312	.308	.304	.301	.297	.293
19	.366	.360	.355	.350	.345	.341	.336	.332	.327	.323	.319	.315	.311	.307	.303
20	.377	.371	.366	.361	.356	.351	.346	.342	.337	.333	.329	.325	.321	.317	.313
21	.387	.382	.376	.371	.366	.361	.357	.352	.347	.343	.339	.335	.331	.327	.323
22	.397	.392	.386	.381	.376	.371	.366	.362	.357	.353	.348	.344	.340	.336	.332
23	.407	.401	.396	.391	.386	.381	.376	.371	.366	.362	.358	.353	.349	.345	.341
24	.416	.411	.405	.400	.395	.390	.385	.380	.376	.371	.367	.362	.358	.354	.350
25	.425	.420	.414	.409	.404	.399	.394	.389	.384	.380	.375	.371	.367	.362	.358
26	.434	.429	.423	.418	.413	.407	.402	.398	.393	.388	.384	.379	.375	.371	.367
27	.443	.437	.432	.426	.421	.416	.411	.406	.401	.396	.392	.387	.383	.379	.375
28	.451	.445	.440	.434	.429	.424	.419	.414	.409	.405	.400	.395	.391	.387	.383
29	.459	.453	.448	.442	.437	.432	.427	.422	.417	.412	.408	.403	.399	.394	.390
30	.467	.461	.456	.450	.445	.440	.435	.430	.425	.420	.415	.411	.406	.402	.398
31	.475	.469	.463	.458	.452	.447	.442	.437	.432	.427	.423	.418	.414	.409	.405
32	.482	.476	.471	.465	.460	.454	.449	.444	.439	.435	.430	.425	.421	.416	.412
33	.489	.483	.478	.472	.467	.462	.456	.451	.446	.442	.437	.432	.428	.423	.419
34	.496	.490	.485	.479	.474	.468	.463	.458	.453	.448	.444	.439	.435	.430	.426
35	.503	.497	.491	.486	.480	.475	.470	.465	.460	.455	.450	.446	.441	.437	.432
36	.509	.504	.498	.492	.487	.482	.477	.471	.467	.462	.457	.452	.448	.443	.439
37	.516	.510	.504	.499	.493	.488	.483	.478	.473	.468	.463	.459	.454	.449	.445
38	.522	.516	.511	.505	.500	.494	.489	.484	.479	.474	.469	.465	.460	.456	.451
39	.528	.522	.517	.511	.506	.500	.495	.490	.485	.480	.475	.471	.466	.462	.457
40	.534	.528	.523	.517	.512	.506	.501	.496	.491	.486	.481	.477	.472	.468	.463
41	.540	.534	.528	.523	.518	.512	.507	.502	.497	.492	.487	.482	.478	.473	.469
42	.545	.540	.534	.529	.523	.518	.513	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.479	.474
43	.551	.545	.540	.534	.529	.523	.518	.513	.508	.503	.498	.494	.489	.484	.480
44	.556	.551	.545	.539	.534	.529	.524	.518	.513	.509	.504	.499	.494	.490	.485
45	.562	.556	.550	.545	.539	.534	.529	.524	.519	.514	.509	.504	.500	.495	.491
46	.567	.561	.555	.550	.544	.539	.534	.529	.524	.519	.514	.510	.505	.500	.496
47	.572	.566	.560	.555	.550	.544	.539	.534	.529	.524	.519	.515	.510	.505	.501
48	.577	.571	.565	.560	.554	.549	.544	.539	.534	.529	.524	.520	.515	.510	.506
49	.581	.576	.570	.565	.559	.554	.549	.544	.539	.534	.529	.524	.520	.515	.511
50	.586	.580	.575	.569	.564	.559	.554	.549	.544	.539	.534	.529	.525	.520	.515

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.950	.776	.632	.527	.451	.393	.348	.312	.283	.259	.238	.221	.206	.193	.181
2	.975	.865	.751	.657	.582	.521	.471	.429	.394	.364	.339	.316	.297	.279	.264
3	.983	.902	.811	.729	.659	.600	.550	.507	.470	.438	.410	.385	.363	.344	.326
4	.987	.924	.847	.775	.711	.655	.607	.564	.527	.495	.466	.440	.417	.396	.377
5	.990	.937	.871	.807	.749	.696	.650	.609	.573	.540	.511	.484	.461	.439	.419
6	.991	.947	.889	.831	.778	.729	.685	.645	.610	.577	.548	.522	.498	.476	.456
7	.993	.954	.902	.850	.800	.755	.713	.675	.640	.609	.580	.554	.530	.508	.487
8	.994	.959	.913	.865	.819	.776	.736	.700	.667	.636	.608	.582	.558	.536	.515
9	.994	.963	.921	.877	.834	.794	.756	.721	.689	.659	.632	.606	.583	.561	.540
10	.995	.967	.928	.887	.847	.809	.773	.740	.709	.680	.653	.628	.605	.583	.563
11	.995	.970	.934	.896	.858	.822	.788	.756	.726	.698	.672	.647	.625	.603	.583
12	.996	.972	.939	.903	.868	.834	.801	.770	.741	.714	.689	.665	.642	.621	.602
13	.996	.974	.943	.910	.876	.844	.812	.783	.755	.729	.704	.681	.659	.638	.618
14	.996	.976	.947	.915	.884	.853	.823	.794	.767	.742	.718	.695	.673	.653	.634
15	.997	.977	.950	.920	.890	.860	.832	.804	.778	.754	.730	.708	.687	.667	.648
16	.997	.979	.953	.925	.896	.868	.840	.814	.788	.764	.742	.720	.699	.680	.661
17	.997	.980	.956	.929	.901	.874	.848	.822	.798	.774	.752	.731	.711	.692	.673
18	.997	.981	.958	.932	.906	.880	.854	.830	.806	.783	.762	.741	.721	.703	.685
19	.997	.982	.960	.935	.910	.885	.861	.837	.814	.792	.771	.750	.731	.713	.695
20	.997	.983	.962	.938	.914	.890	.866	.843	.821	.800	.779	.759	.740	.722	.705
21	.998	.984	.963	.941	.918	.894	.871	.849	.828	.807	.787	.767	.749	.731	.714
22	.998	.984	.965	.943	.921	.899	.876	.855	.834	.813	.794	.775	.757	.740	.723
23	.998	.985	.966	.946	.924	.902	.881	.860	.839	.820	.801	.782	.764	.747	.731
24	.998	.986	.968	.948	.927	.906	.885	.865	.845	.825	.807	.789	.771	.755	.739
25	.998	.986	.969	.950	.930	.909	.889	.869	.850	.831	.813	.795	.778	.762	.746
26	.998	.987	.970	.951	.932	.912	.893	.873	.854	.836	.818	.801	.784	.768	.753
27	.998	.987	.971	.953	.934	.915	.896	.877	.859	.841	.823	.807	.790	.774	.759
28	.998	.988	.972	.955	.936	.918	.899	.881	.863	.845	.828	.812	.796	.780	.765
29	.998	.988	.973	.956	.938	.920	.902	.884	.867	.850	.833	.817	.801	.786	.771
30	.998	.988	.974	.958	.940	.923	.905	.888	.871	.854	.837	.822	.806	.791	.777
31	.998	.989	.975	.959	.942	.925	.908	.891	.874	.858	.842	.826	.811	.796	.782
32	.998	.989	.976	.960	.944	.927	.910	.894	.877	.861	.846	.830	.816	.801	.787
33	.998	.989	.976	.961	.945	.929	.913	.896	.880	.865	.849	.834	.820	.806	.792
34	.998	.990	.977	.962	.947	.931	.915	.899	.883	.868	.853	.838	.824	.810	.796
35	.999	.990	.978	.963	.948	.933	.917	.902	.886	.871	.856	.842	.828	.814	.801
36	.999	.990	.978	.964	.949	.934	.919	.904	.889	.874	.860	.846	.832	.818	.805
37	.999	.991	.979	.965	.951	.936	.921	.906	.891	.877	.863	.849	.835	.822	.809
38	.999	.991	.979	.966	.952	.937	.923	.908	.894	.880	.866	.852	.839	.826	.813
39	.999	.991	.980	.967	.953	.939	.925	.910	.896	.882	.869	.855	.842	.829	.817
40	.999	.991	.980	.968	.954	.940	.926	.912	.899	.885	.871	.858	.845	.833	.820
41	.999	.991	.981	.968	.955	.942	.928	.914	.901	.887	.874	.861	.848	.836	.824
42	.999	.992	.981	.969	.956	.943	.929	.916	.903	.890	.877	.864	.851	.839	.827
43	.999	.992	.982	.970	.957	.944	.931	.918	.905	.892	.879	.866	.854	.842	.830
44	.999	.992	.982	.970	.958	.945	.932	.919	.907	.894	.881	.869	.857	.845	.833
45	.999	.992	.982	.971	.959	.946	.934	.921	.908	.896	.884	.871	.859	.848	.836
46	.999	.992	.983	.972	.960	.948	.935	.923	.910	.898	.886	.874	.862	.850	.839
47	.999	.993	.983	.972	.961	.949	.936	.924	.912	.900	.888	.876	.864	.853	.842
48	.999	.993	.983	.973	.961	.950	.938	.926	.914	.902	.890	.878	.867	.856	.845
49	.999	.993	.984	.973	.962	.950	.939	.927	.915	.903	.892	.880	.869	.858	.847
50	.999	.993	.984	.974	.963	.951	.940	.928	.917	.905	.894	.882	.871	.860	.850

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.171	.162	.153	.146	.139	.133	.127	.122	.117	.113	.109	.105	.101	.098	.095
2	.250	.238	.226	.216	.207	.198	.190	.183	.176	.170	.164	.159	.153	.149	.144
3	.310	.296	.283	.271	.259	.249	.240	.231	.223	.215	.208	.202	.195	.189	.184
4	.359	.344	.329	.316	.304	.292	.282	.272	.263	.254	.246	.239	.232	.225	.219
5	.401	.384	.369	.355	.342	.330	.318	.308	.298	.288	.280	.271	.264	.256	.249
6	.437	.420	.404	.389	.375	.363	.351	.339	.329	.319	.310	.301	.293	.285	.277
7	.468	.451	.435	.420	.405	.392	.380	.368	.357	.347	.337	.328	.319	.311	.303
8	.496	.479	.462	.447	.432	.419	.406	.394	.383	.372	.362	.352	.343	.334	.326
9	.521	.504	.487	.471	.457	.443	.430	.418	.406	.395	.385	.375	.365	.356	.348
10	.544	.526	.509	.494	.479	.465	.452	.439	.428	.416	.406	.396	.386	.377	.368
11	.564	.547	.530	.514	.499	.485	.472	.460	.448	.436	.425	.415	.405	.396	.387
12	.583	.565	.549	.533	.518	.504	.491	.478	.466	.455	.444	.433	.423	.414	.405
13	.600	.583	.566	.550	.536	.522	.508	.496	.483	.472	.461	.450	.440	.431	.421
14	.616	.598	.582	.567	.552	.538	.524	.512	.500	.488	.477	.466	.456	.446	.437
15	.630	.613	.597	.581	.567	.553	.540	.527	.515	.503	.492	.481	.471	.461	.452
16	.643	.627	.611	.595	.581	.567	.554	.541	.529	.517	.506	.495	.485	.475	.466
17	.656	.639	.623	.608	.594	.580	.567	.554	.542	.531	.520	.509	.499	.489	.479
18	.667	.651	.635	.620	.606	.593	.579	.567	.555	.543	.532	.521	.511	.501	.492
19	.678	.662	.647	.632	.618	.604	.591	.579	.567	.555	.544	.533	.523	.513	.504
20	.688	.672	.657	.643	.629	.615	.602	.590	.578	.567	.555	.545	.535	.525	.515
21	.698	.682	.667	.653	.639	.626	.613	.601	.589	.577	.566	.556	.545	.536	.526
22	.707	.691	.677	.662	.649	.635	.623	.611	.599	.587	.577	.566	.556	.546	.537
23	.715	.700	.685	.671	.658	.645	.632	.620	.608	.597	.586	.576	.566	.556	.546
24	.723	.708	.694	.680	.667	.654	.641	.629	.618	.606	.596	.585	.575	.565	.556
25	.731	.716	.702	.688	.675	.662	.650	.638	.626	.615	.605	.594	.584	.574	.565
26	.738	.723	.709	.696	.683	.670	.658	.646	.635	.624	.613	.603	.593	.583	.574
27	.744	.730	.716	.703	.690	.678	.666	.654	.643	.632	.621	.611	.601	.591	.582
28	.751	.737	.723	.710	.697	.685	.673	.662	.650	.640	.629	.619	.609	.600	.590
29	.757	.743	.730	.717	.704	.692	.680	.669	.658	.647	.637	.626	.617	.607	.598
30	.763	.749	.736	.723	.711	.699	.687	.676	.665	.654	.644	.634	.624	.615	.605
31	.768	.755	.742	.729	.717	.705	.693	.682	.671	.661	.651	.641	.631	.622	.613
32	.773	.760	.747	.735	.723	.711	.700	.689	.678	.667	.657	.647	.638	.629	.620
33	.778	.765	.753	.740	.729	.717	.706	.695	.684	.674	.664	.654	.644	.635	.626
34	.783	.770	.758	.746	.734	.723	.711	.701	.690	.680	.670	.660	.651	.642	.633
35	.788	.775	.763	.751	.739	.728	.717	.706	.696	.686	.676	.666	.657	.648	.639
36	.792	.780	.768	.756	.744	.733	.722	.712	.701	.691	.682	.672	.663	.654	.645
37	.797	.784	.772	.761	.749	.738	.727	.717	.707	.697	.687	.678	.668	.659	.651
38	.801	.788	.777	.765	.754	.743	.732	.722	.712	.702	.692	.683	.674	.665	.656
39	.804	.793	.781	.770	.758	.748	.737	.727	.717	.707	.697	.688	.679	.670	.662
40	.808	.796	.785	.774	.763	.752	.742	.732	.722	.712	.702	.693	.684	.676	.667
41	.812	.800	.789	.778	.767	.756	.746	.736	.726	.717	.707	.698	.689	.681	.672
42	.815	.804	.793	.782	.771	.761	.750	.740	.731	.721	.712	.703	.694	.685	.677
43	.819	.807	.796	.785	.775	.765	.755	.745	.735	.726	.716	.707	.699	.690	.682
44	.822	.811	.800	.789	.779	.768	.759	.749	.739	.730	.721	.712	.703	.695	.686
45	.825	.814	.803	.793	.782	.772	.762	.753	.743	.734	.725	.716	.708	.699	.691
46	.828	.817	.806	.796	.786	.776	.766	.757	.747	.738	.729	.720	.712	.704	.695
47	.831	.820	.810	.799	.789	.779	.770	.760	.751	.742	.733	.725	.716	.708	.700
48	.834	.823	.813	.803	.793	.783	.773	.764	.755	.746	.737	.728	.720	.712	.704
49	.836	.826	.816	.806	.796	.786	.777	.767	.758	.749	.741	.732	.724	.716	.708
50	.839	.829	.819	.809	.799	.789	.780	.771	.762	.753	.744	.736	.728	.720	.712

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.092	.089	.087	.084	.082	.080	.078	.076	.074	.072	.070	.069	.067	.066	.064
2	.140	.136	.132	.129	.125	.122	.119	.116	.113	.111	.108	.106	.103	.101	.099
3	.179	.174	.169	.165	.161	.157	.153	.149	.146	.142	.139	.136	.133	.131	.128
4	.213	.207	.202	.196	.192	.187	.183	.178	.174	.171	.167	.163	.160	.157	.154
5	.243	.236	.231	.225	.220	.214	.210	.205	.200	.196	.192	.188	.184	.181	.177
6	.270	.263	.257	.251	.245	.239	.234	.229	.224	.220	.215	.211	.207	.203	.199
7	.295	.288	.281	.275	.269	.263	.257	.252	.246	.241	.236	.232	.227	.223	.219
8	.318	.311	.304	.297	.290	.284	.278	.272	.267	.262	.257	.252	.247	.242	.238
9	.340	.332	.325	.318	.311	.304	.298	.292	.286	.281	.275	.270	.265	.261	.256
10	.360	.352	.344	.337	.330	.323	.317	.310	.304	.299	.293	.288	.283	.278	.273
11	.379	.370	.362	.355	.348	.341	.334	.328	.322	.316	.310	.304	.299	.294	.289
12	.396	.388	.380	.372	.365	.358	.351	.344	.338	.332	.326	.320	.315	.309	.304
13	.413	.404	.396	.388	.381	.373	.366	.360	.353	.347	.341	.335	.329	.324	.319
14	.428	.420	.411	.403	.396	.388	.381	.374	.368	.361	.355	.349	.344	.338	.333
15	.443	.434	.426	.418	.410	.403	.395	.388	.382	.375	.369	.363	.357	.351	.346
16	.457	.448	.440	.432	.424	.416	.409	.402	.395	.388	.382	.376	.370	.364	.359
17	.470	.461	.453	.445	.437	.429	.422	.415	.408	.401	.395	.388	.382	.376	.371
18	.483	.474	.465	.457	.449	.441	.434	.427	.420	.413	.407	.400	.394	.388	.382
19	.495	.486	.477	.469	.461	.453	.446	.439	.432	.425	.418	.412	.406	.400	.394
20	.506	.497	.489	.480	.472	.465	.457	.450	.443	.436	.429	.423	.416	.410	.405
21	.517	.508	.499	.491	.483	.475	.468	.460	.453	.446	.440	.433	.427	.421	.415
22	.527	.518	.510	.502	.493	.486	.478	.471	.464	.457	.450	.443	.437	.431	.425
23	.537	.528	.520	.511	.503	.496	.488	.481	.474	.467	.460	.453	.447	.441	.435
24	.547	.538	.529	.521	.513	.505	.498	.490	.483	.476	.469	.463	.456	.450	.444
25	.556	.547	.539	.530	.522	.514	.507	.499	.492	.485	.478	.472	.465	.459	.453
26	.565	.556	.547	.539	.531	.523	.516	.508	.501	.494	.487	.481	.474	.468	.462
27	.573	.564	.556	.548	.540	.532	.524	.517	.510	.503	.496	.489	.483	.476	.470
28	.581	.572	.564	.556	.548	.540	.532	.525	.518	.511	.504	.497	.491	.485	.478
29	.589	.580	.572	.564	.556	.548	.540	.533	.526	.519	.512	.505	.499	.492	.486
30	.597	.588	.579	.571	.563	.555	.548	.541	.533	.526	.520	.513	.506	.500	.494
31	.604	.595	.587	.579	.571	.563	.555	.548	.541	.534	.527	.520	.514	.508	.501
32	.611	.602	.594	.586	.578	.570	.563	.555	.548	.541	.534	.528	.521	.515	.509
33	.617	.609	.601	.592	.585	.577	.569	.562	.555	.548	.541	.535	.528	.522	.516
34	.624	.615	.607	.599	.591	.584	.576	.569	.562	.555	.548	.541	.535	.529	.523
35	.630	.622	.614	.606	.598	.590	.583	.575	.568	.561	.555	.548	.542	.535	.529
36	.636	.628	.620	.612	.604	.596	.589	.582	.575	.568	.561	.554	.548	.542	.536
37	.642	.634	.626	.618	.610	.602	.595	.588	.581	.574	.567	.561	.554	.548	.542
38	.648	.639	.631	.624	.616	.608	.601	.594	.587	.580	.573	.567	.560	.554	.548
39	.653	.645	.637	.629	.622	.614	.607	.600	.593	.586	.579	.573	.566	.560	.554
40	.659	.650	.642	.635	.627	.620	.612	.605	.598	.591	.585	.578	.572	.566	.560
41	.664	.656	.648	.640	.632	.625	.618	.611	.604	.597	.590	.584	.578	.571	.565
42	.669	.661	.653	.645	.638	.630	.623	.616	.609	.602	.596	.589	.583	.577	.571
43	.674	.666	.658	.650	.643	.635	.628	.621	.614	.608	.601	.595	.588	.582	.576
44	.678	.670	.663	.655	.648	.640	.633	.626	.619	.613	.606	.600	.593	.587	.581
45	.683	.675	.667	.660	.652	.645	.638	.631	.624	.618	.611	.605	.598	.592	.586
46	.687	.680	.672	.664	.657	.650	.643	.636	.629	.622	.616	.610	.603	.597	.591
47	.692	.684	.676	.669	.662	.654	.647	.640	.634	.627	.621	.614	.608	.602	.596
48	.696	.688	.681	.673	.666	.659	.652	.645	.638	.632	.625	.619	.613	.607	.601
49	.700	.692	.685	.677	.670	.663	.656	.649	.643	.636	.630	.624	.617	.611	.605
50	.704	.696	.689	.682	.674	.667	.660	.654	.647	.641	.634	.628	.622	.616	.610

Quantile der Beta-Verteilung: 95%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.95}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.063	.062	.061	.059	.058	.057	.056	.055	.054	.053	.052	.051	.050	.050	.049
2	.097	.095	.093	.091	.090	.088	.086	.085	.083	.082	.081	.079	.078	.077	.075
3	.125	.123	.121	.118	.116	.114	.112	.110	.108	.106	.105	.103	.101	.100	.098
4	.151	.148	.145	.142	.140	.137	.135	.133	.130	.128	.126	.124	.122	.120	.118
5	.174	.171	.167	.164	.162	.159	.156	.153	.151	.148	.146	.144	.142	.139	.137
6	.195	.192	.188	.185	.182	.179	.176	.173	.170	.167	.165	.162	.160	.157	.155
7	.215	.211	.208	.204	.201	.197	.194	.191	.188	.185	.182	.179	.177	.174	.172
8	.234	.230	.226	.222	.218	.215	.211	.208	.205	.202	.199	.196	.193	.190	.187
9	.251	.247	.243	.239	.235	.231	.228	.224	.221	.217	.214	.211	.208	.205	.202
10	.268	.264	.259	.255	.251	.247	.243	.240	.236	.233	.229	.226	.223	.220	.217
11	.284	.279	.275	.271	.266	.262	.258	.254	.251	.247	.243	.240	.237	.233	.230
12	.299	.294	.290	.285	.281	.277	.272	.268	.265	.261	.257	.254	.250	.247	.243
13	.314	.309	.304	.299	.295	.290	.286	.282	.278	.274	.270	.266	.263	.259	.256
14	.327	.322	.317	.313	.308	.303	.299	.295	.291	.287	.283	.279	.275	.272	.268
15	.340	.335	.330	.325	.321	.316	.312	.307	.303	.299	.295	.291	.287	.283	.280
16	.353	.348	.343	.338	.333	.328	.324	.319	.315	.311	.307	.303	.299	.295	.291
17	.365	.360	.355	.350	.345	.340	.335	.331	.326	.322	.318	.314	.310	.306	.302
18	.377	.371	.366	.361	.356	.351	.346	.342	.337	.333	.329	.324	.320	.316	.313
19	.388	.382	.377	.372	.367	.362	.357	.352	.348	.343	.339	.335	.331	.327	.323
20	.399	.393	.388	.382	.377	.372	.367	.363	.358	.354	.349	.345	.341	.337	.333
21	.409	.404	.398	.393	.388	.382	.378	.373	.368	.363	.359	.355	.350	.346	.342
22	.419	.413	.408	.403	.397	.392	.387	.382	.378	.373	.368	.364	.360	.356	.351
23	.429	.423	.417	.412	.407	.402	.397	.392	.387	.382	.378	.373	.369	.365	.360
24	.438	.432	.427	.421	.416	.411	.406	.401	.396	.391	.387	.382	.378	.373	.369
25	.447	.441	.436	.430	.425	.420	.414	.410	.405	.400	.395	.391	.386	.382	.378
26	.456	.450	.444	.439	.433	.428	.423	.418	.413	.408	.404	.399	.395	.390	.386
27	.464	.458	.453	.447	.442	.436	.431	.426	.421	.417	.412	.407	.403	.398	.394
28	.472	.467	.461	.455	.450	.445	.439	.434	.429	.424	.420	.415	.411	.406	.402
29	.480	.474	.469	.463	.458	.452	.447	.442	.437	.432	.427	.423	.418	.414	.409
30	.488	.482	.476	.471	.465	.460	.455	.450	.445	.440	.435	.430	.426	.421	.417
31	.495	.490	.484	.478	.473	.467	.462	.457	.452	.447	.442	.437	.433	.428	.424
32	.503	.497	.491	.485	.480	.475	.469	.464	.459	.454	.449	.445	.440	.435	.431
33	.510	.504	.498	.492	.487	.481	.476	.471	.466	.461	.456	.451	.447	.442	.438
34	.516	.511	.505	.499	.494	.488	.483	.478	.473	.468	.463	.458	.454	.449	.444
35	.523	.517	.511	.506	.500	.495	.490	.484	.479	.474	.470	.465	.460	.456	.451
36	.530	.524	.518	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.476	.471	.466	.462	.457
37	.536	.530	.524	.519	.513	.508	.502	.497	.492	.487	.482	.477	.473	.468	.464
38	.542	.536	.530	.525	.519	.514	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.479	.474	.470
39	.548	.542	.536	.531	.525	.520	.514	.509	.504	.499	.494	.489	.485	.480	.476
40	.554	.548	.542	.536	.531	.525	.520	.515	.510	.505	.500	.495	.491	.486	.481
41	.559	.553	.548	.542	.537	.531	.526	.521	.516	.511	.506	.501	.496	.492	.487
42	.565	.559	.553	.548	.542	.537	.531	.526	.521	.516	.511	.506	.502	.497	.493
43	.570	.564	.559	.553	.547	.542	.537	.532	.527	.522	.517	.512	.507	.503	.498
44	.575	.569	.564	.558	.553	.547	.542	.537	.532	.527	.522	.517	.512	.508	.503
45	.580	.575	.569	.563	.558	.553	.547	.542	.537	.532	.527	.522	.518	.513	.508
46	.585	.580	.574	.568	.563	.558	.552	.547	.542	.537	.532	.527	.523	.518	.514
47	.590	.584	.579	.573	.568	.562	.557	.552	.547	.542	.537	.532	.528	.523	.518
48	.595	.589	.584	.578	.573	.567	.562	.557	.552	.547	.542	.537	.533	.528	.523
49	.600	.594	.588	.583	.577	.572	.567	.562	.557	.552	.547	.542	.537	.533	.528
50	.604	.598	.593	.587	.582	.577	.571	.566	.561	.556	.551	.547	.542	.537	.533

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.975	.842	.708	.602	.522	.459	.410	.369	.336	.308	.285	.265	.247	.232	.218
2	.987	.906	.806	.716	.641	.579	.527	.482	.445	.413	.385	.360	.339	.319	.302
3	.992	.932	.853	.777	.710	.651	.600	.556	.518	.484	.454	.428	.405	.383	.364
4	.994	.947	.882	.816	.755	.701	.652	.610	.572	.538	.508	.481	.456	.434	.414
5	.995	.957	.901	.843	.788	.738	.692	.651	.614	.581	.551	.524	.499	.476	.456
6	.996	.963	.915	.863	.813	.766	.723	.684	.649	.616	.587	.560	.535	.512	.491
7	.996	.968	.925	.878	.833	.789	.749	.711	.677	.646	.617	.590	.566	.543	.522
8	.997	.972	.933	.891	.848	.808	.770	.734	.701	.671	.643	.616	.592	.570	.549
9	.997	.975	.940	.901	.861	.823	.787	.753	.722	.692	.665	.639	.616	.593	.573
10	.997	.977	.945	.909	.872	.837	.802	.770	.740	.711	.685	.660	.636	.615	.594
11	.998	.979	.950	.916	.882	.848	.816	.785	.756	.728	.702	.678	.655	.634	.613
12	.998	.981	.953	.922	.890	.858	.827	.797	.769	.743	.718	.694	.672	.651	.631
13	.998	.982	.957	.927	.897	.867	.837	.809	.782	.756	.732	.709	.687	.666	.647
14	.998	.983	.960	.932	.903	.874	.846	.819	.793	.768	.744	.722	.701	.681	.661
15	.998	.984	.962	.936	.909	.881	.854	.828	.803	.779	.756	.734	.713	.694	.675
16	.998	.985	.964	.939	.913	.887	.861	.836	.812	.789	.766	.745	.725	.706	.687
17	.999	.986	.966	.943	.918	.893	.868	.844	.820	.798	.776	.755	.736	.717	.698
18	.999	.987	.968	.946	.922	.898	.874	.851	.828	.806	.785	.765	.745	.727	.709
19	.999	.988	.970	.948	.925	.902	.879	.857	.835	.814	.793	.773	.755	.736	.719
20	.999	.988	.971	.950	.929	.906	.884	.862	.841	.821	.801	.782	.763	.745	.728
21	.999	.989	.972	.953	.932	.910	.889	.868	.847	.827	.808	.789	.771	.754	.737
22	.999	.989	.973	.955	.934	.914	.893	.873	.853	.833	.814	.796	.778	.761	.745
23	.999	.990	.975	.956	.937	.917	.897	.877	.858	.839	.820	.803	.785	.769	.752
24	.999	.990	.976	.958	.939	.920	.901	.881	.863	.844	.826	.809	.792	.775	.760
25	.999	.991	.976	.960	.942	.923	.904	.885	.867	.849	.831	.814	.798	.782	.766
26	.999	.991	.977	.961	.944	.925	.907	.889	.871	.854	.837	.820	.804	.788	.773
27	.999	.991	.978	.962	.945	.928	.910	.893	.875	.858	.841	.825	.809	.794	.779
28	.999	.992	.979	.964	.947	.930	.913	.896	.879	.862	.846	.830	.814	.799	.784
29	.999	.992	.980	.965	.949	.932	.916	.899	.882	.866	.850	.834	.819	.804	.790
30	.999	.992	.980	.966	.950	.934	.918	.902	.886	.870	.854	.839	.824	.809	.795
31	.999	.992	.981	.967	.952	.936	.920	.904	.889	.873	.858	.843	.828	.814	.800
32	.999	.993	.981	.968	.953	.938	.923	.907	.892	.876	.861	.847	.832	.818	.805
33	.999	.993	.982	.969	.955	.940	.925	.909	.894	.879	.865	.850	.836	.823	.809
34	.999	.993	.982	.970	.956	.941	.927	.912	.897	.882	.868	.854	.840	.827	.813
35	.999	.993	.983	.971	.957	.943	.928	.914	.900	.885	.871	.857	.844	.830	.817
36	.999	.993	.983	.971	.958	.944	.930	.916	.902	.888	.874	.861	.847	.834	.821
37	.999	.994	.984	.972	.959	.946	.932	.918	.904	.891	.877	.864	.851	.838	.825
38	.999	.994	.984	.973	.960	.947	.934	.920	.906	.893	.880	.867	.854	.841	.829
39	.999	.994	.985	.973	.961	.948	.935	.922	.909	.895	.882	.869	.857	.844	.832
40	.999	.994	.985	.974	.962	.949	.937	.924	.911	.898	.885	.872	.860	.847	.835
41	.999	.994	.985	.975	.963	.951	.938	.925	.912	.900	.887	.875	.862	.850	.839
42	.999	.994	.986	.975	.964	.952	.939	.927	.914	.902	.889	.877	.865	.853	.842
43	.999	.994	.986	.976	.965	.953	.941	.928	.916	.904	.892	.880	.868	.856	.845
44	.999	.995	.986	.976	.965	.954	.942	.930	.918	.906	.894	.882	.870	.859	.847
45	.999	.995	.987	.977	.966	.955	.943	.931	.919	.907	.896	.884	.873	.861	.850
46	.999	.995	.987	.977	.967	.956	.944	.933	.921	.909	.898	.886	.875	.864	.853
47	.999	.995	.987	.978	.967	.956	.945	.934	.922	.911	.900	.888	.877	.866	.855
48	.999	.995	.987	.978	.968	.957	.946	.935	.924	.913	.901	.890	.879	.868	.858
49	.999	.995	.988	.979	.969	.958	.947	.936	.925	.914	.903	.892	.881	.871	.860
50	.999	.995	.988	.979	.969	.959	.948	.937	.927	.916	.905	.894	.883	.873	.862

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.206	.195	.185	.176	.168	.161	.154	.148	.142	.137	.132	.128	.123	.119	.116
2	.287	.273	.260	.249	.238	.228	.219	.211	.204	.196	.190	.183	.178	.172	.167
3	.347	.331	.317	.304	.292	.280	.270	.260	.251	.243	.235	.228	.221	.214	.208
4	.396	.379	.363	.349	.336	.324	.312	.302	.292	.282	.274	.265	.258	.250	.243
5	.437	.419	.403	.388	.374	.361	.349	.337	.327	.317	.307	.298	.290	.282	.275
6	.472	.454	.437	.422	.407	.394	.381	.369	.358	.347	.337	.328	.319	.311	.303
7	.502	.484	.467	.451	.436	.423	.410	.397	.386	.375	.364	.355	.345	.336	.328
8	.529	.511	.494	.478	.463	.449	.435	.423	.411	.400	.389	.379	.369	.360	.352
9	.553	.535	.518	.502	.487	.472	.459	.446	.434	.423	.412	.401	.392	.382	.373
10	.575	.557	.540	.524	.508	.494	.480	.467	.455	.444	.433	.422	.412	.402	.393
11	.594	.576	.559	.543	.528	.514	.500	.487	.475	.463	.452	.441	.431	.421	.412
12	.612	.594	.577	.561	.546	.532	.518	.505	.493	.481	.470	.459	.449	.439	.429
13	.628	.611	.594	.578	.563	.549	.535	.522	.510	.498	.487	.476	.465	.455	.446
14	.643	.626	.609	.594	.579	.564	.551	.538	.525	.514	.502	.491	.481	.471	.461
15	.657	.640	.623	.608	.593	.579	.565	.552	.540	.528	.517	.506	.495	.485	.476
16	.669	.653	.636	.621	.606	.592	.579	.566	.554	.542	.531	.520	.509	.499	.490
17	.681	.665	.649	.634	.619	.605	.592	.579	.567	.555	.544	.533	.522	.512	.502
18	.692	.676	.660	.645	.631	.617	.604	.591	.579	.567	.556	.545	.535	.525	.515
19	.702	.686	.671	.656	.642	.628	.615	.603	.590	.579	.568	.557	.546	.536	.526
20	.712	.696	.681	.666	.652	.639	.626	.613	.601	.590	.578	.568	.557	.547	.538
21	.721	.705	.690	.676	.662	.649	.636	.623	.612	.600	.589	.578	.568	.558	.548
22	.729	.714	.699	.685	.671	.658	.645	.633	.621	.610	.599	.588	.578	.568	.558
23	.737	.722	.707	.693	.680	.667	.654	.642	.631	.619	.608	.598	.587	.578	.568
24	.744	.730	.715	.702	.688	.675	.663	.651	.639	.628	.617	.607	.597	.587	.577
25	.751	.737	.723	.709	.696	.683	.671	.659	.648	.637	.626	.615	.605	.596	.586
26	.758	.744	.730	.717	.704	.691	.679	.667	.656	.645	.634	.624	.614	.604	.594
27	.764	.750	.737	.723	.711	.698	.686	.675	.663	.652	.642	.632	.622	.612	.603
28	.770	.756	.743	.730	.717	.705	.693	.682	.671	.660	.649	.639	.629	.620	.610
29	.776	.762	.749	.736	.724	.712	.700	.689	.678	.667	.657	.646	.637	.627	.618
30	.781	.768	.755	.742	.730	.718	.707	.695	.684	.674	.663	.653	.644	.634	.625
31	.786	.773	.760	.748	.736	.724	.713	.702	.691	.680	.670	.660	.650	.641	.632
32	.791	.778	.766	.753	.742	.730	.719	.708	.697	.687	.676	.667	.657	.648	.639
33	.796	.783	.771	.759	.747	.735	.724	.713	.703	.693	.683	.673	.663	.654	.645
34	.801	.788	.776	.764	.752	.741	.730	.719	.709	.698	.688	.679	.669	.660	.651
35	.805	.792	.780	.769	.757	.746	.735	.724	.714	.704	.694	.685	.675	.666	.657
36	.809	.797	.785	.773	.762	.751	.740	.730	.719	.709	.700	.690	.681	.672	.663
37	.813	.801	.789	.778	.766	.756	.745	.735	.724	.714	.705	.695	.686	.677	.669
38	.817	.805	.793	.782	.771	.760	.750	.739	.729	.719	.710	.701	.692	.683	.674
39	.820	.809	.797	.786	.775	.764	.754	.744	.734	.724	.715	.706	.697	.688	.679
40	.824	.812	.801	.790	.779	.769	.758	.748	.739	.729	.720	.710	.702	.693	.684
41	.827	.816	.805	.794	.783	.773	.763	.753	.743	.733	.724	.715	.706	.698	.689
42	.830	.819	.808	.797	.787	.777	.767	.757	.747	.738	.729	.720	.711	.702	.694
43	.833	.822	.812	.801	.791	.780	.771	.761	.751	.742	.733	.724	.715	.707	.698
44	.836	.825	.815	.804	.794	.784	.774	.765	.755	.746	.737	.728	.720	.711	.703
45	.839	.829	.818	.808	.798	.788	.778	.768	.759	.750	.741	.732	.724	.715	.707
46	.842	.831	.821	.811	.801	.791	.782	.772	.763	.754	.745	.736	.728	.720	.711
47	.845	.834	.824	.814	.804	.794	.785	.776	.767	.758	.749	.740	.732	.724	.716
48	.847	.837	.827	.817	.807	.798	.788	.779	.770	.761	.753	.744	.736	.728	.720
49	.850	.840	.830	.820	.810	.801	.791	.782	.773	.765	.756	.748	.739	.731	.723
50	.852	.842	.832	.823	.813	.804	.795	.786	.777	.768	.760	.751	.743	.735	.727

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.112	.109	.106	.103	.100	.097	.095	.093	.090	.088	.086	.084	.082	.080	.079
2	.162	.158	.153	.149	.145	.142	.138	.135	.132	.129	.126	.123	.120	.118	.115
3	.202	.197	.192	.187	.182	.177	.173	.169	.165	.162	.158	.155	.151	.148	.145
4	.237	.231	.225	.219	.214	.209	.204	.199	.195	.191	.187	.183	.179	.175	.172
5	.267	.261	.254	.248	.242	.237	.231	.226	.221	.217	.212	.208	.204	.200	.196
6	.295	.288	.281	.274	.268	.262	.256	.251	.246	.241	.236	.231	.227	.222	.218
7	.320	.313	.305	.298	.292	.285	.279	.274	.268	.263	.257	.252	.248	.243	.239
8	.343	.335	.328	.321	.314	.307	.301	.295	.289	.283	.278	.272	.267	.263	.258
9	.365	.356	.349	.341	.334	.327	.321	.314	.308	.302	.297	.291	.286	.281	.276
10	.385	.376	.368	.360	.353	.346	.339	.333	.326	.320	.314	.309	.303	.298	.293
11	.403	.395	.386	.378	.371	.364	.357	.350	.343	.337	.331	.325	.320	.314	.309
12	.420	.412	.403	.395	.388	.380	.373	.366	.360	.353	.347	.341	.335	.330	.324
13	.437	.428	.419	.411	.403	.396	.389	.382	.375	.368	.362	.356	.350	.344	.339
14	.452	.443	.435	.426	.418	.411	.403	.396	.389	.383	.376	.370	.364	.358	.353
15	.466	.458	.449	.441	.433	.425	.417	.410	.403	.397	.390	.384	.378	.372	.366
16	.480	.471	.463	.454	.446	.438	.431	.423	.416	.410	.403	.397	.390	.384	.379
17	.493	.484	.475	.467	.459	.451	.443	.436	.429	.422	.415	.409	.403	.397	.391
18	.505	.496	.488	.479	.471	.463	.456	.448	.441	.434	.427	.421	.414	.408	.402
19	.517	.508	.499	.491	.483	.475	.467	.460	.452	.445	.439	.432	.426	.419	.413
20	.528	.519	.510	.502	.494	.486	.478	.471	.463	.456	.450	.443	.437	.430	.424
21	.539	.530	.521	.513	.504	.496	.489	.481	.474	.467	.460	.453	.447	.441	.434
22	.549	.540	.531	.523	.515	.507	.499	.491	.484	.477	.470	.463	.457	.451	.444
23	.559	.550	.541	.532	.524	.516	.509	.501	.494	.487	.480	.473	.466	.460	.454
24	.568	.559	.550	.542	.534	.526	.518	.510	.503	.496	.489	.482	.476	.469	.463
25	.577	.568	.559	.551	.543	.535	.527	.519	.512	.505	.498	.491	.485	.478	.472
26	.585	.576	.568	.559	.551	.543	.536	.528	.521	.514	.507	.500	.493	.487	.481
27	.593	.585	.576	.568	.559	.552	.544	.536	.529	.522	.515	.508	.502	.495	.489
28	.601	.592	.584	.576	.567	.560	.552	.544	.537	.530	.523	.516	.510	.503	.497
29	.609	.600	.592	.583	.575	.567	.560	.552	.545	.538	.531	.524	.517	.511	.505
30	.616	.607	.599	.591	.583	.575	.567	.560	.552	.545	.538	.532	.525	.519	.512
31	.623	.614	.606	.598	.590	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.539	.532	.526	.520
32	.630	.621	.613	.605	.597	.589	.581	.574	.567	.560	.553	.546	.539	.533	.527
33	.636	.628	.619	.611	.603	.596	.588	.581	.573	.566	.559	.553	.546	.540	.534
34	.642	.634	.626	.618	.610	.602	.594	.587	.580	.573	.566	.559	.553	.546	.540
35	.649	.640	.632	.624	.616	.608	.601	.593	.586	.579	.573	.566	.559	.553	.547
36	.654	.646	.638	.630	.622	.614	.607	.600	.593	.586	.579	.572	.566	.559	.553
37	.660	.652	.644	.636	.628	.620	.613	.606	.598	.592	.585	.578	.572	.565	.559
38	.665	.657	.649	.641	.633	.626	.619	.611	.604	.597	.591	.584	.578	.571	.565
39	.671	.663	.655	.647	.639	.631	.624	.617	.610	.603	.596	.590	.583	.577	.571
40	.676	.668	.660	.652	.644	.637	.630	.622	.615	.609	.602	.595	.589	.583	.576
41	.681	.673	.665	.657	.649	.642	.635	.628	.621	.614	.607	.601	.594	.588	.582
42	.686	.678	.670	.662	.655	.647	.640	.633	.626	.619	.613	.606	.600	.593	.587
43	.690	.682	.675	.667	.659	.652	.645	.638	.631	.624	.618	.611	.605	.599	.592
44	.695	.687	.679	.672	.664	.657	.650	.643	.636	.629	.623	.616	.610	.604	.598
45	.699	.691	.684	.676	.669	.662	.654	.647	.641	.634	.627	.621	.615	.609	.602
46	.704	.696	.688	.681	.673	.666	.659	.652	.645	.639	.632	.626	.619	.613	.607
47	.708	.700	.692	.685	.678	.670	.663	.657	.650	.643	.637	.630	.624	.618	.612
48	.712	.704	.696	.689	.682	.675	.668	.661	.654	.648	.641	.635	.629	.623	.617
49	.716	.708	.701	.693	.686	.679	.672	.665	.659	.652	.646	.639	.633	.627	.621
50	.719	.712	.704	.697	.690	.683	.676	.669	.663	.656	.650	.644	.637	.631	.625

Quantile der Beta-Verteilung: 97.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.975}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.077	.075	.074	.073	.071	.070	.068	.067	.066	.065	.064	.063	.062	.061	.060
2	.113	.111	.109	.106	.104	.103	.101	.099	.097	.096	.094	.092	.091	.089	.088
3	.143	.140	.137	.135	.132	.130	.127	.125	.123	.121	.119	.117	.115	.113	.112
4	.169	.165	.162	.159	.157	.154	.151	.149	.146	.144	.141	.139	.137	.135	.133
5	.192	.189	.185	.182	.179	.176	.173	.170	.167	.165	.162	.159	.157	.155	.152
6	.214	.210	.207	.203	.200	.196	.193	.190	.187	.184	.181	.178	.176	.173	.170
7	.234	.230	.226	.222	.219	.215	.212	.208	.205	.202	.199	.196	.193	.190	.187
8	.253	.249	.245	.241	.237	.233	.229	.226	.222	.219	.216	.212	.209	.206	.203
9	.271	.267	.262	.258	.254	.250	.246	.242	.239	.235	.232	.228	.225	.222	.219
10	.288	.283	.279	.274	.270	.266	.262	.258	.254	.250	.247	.243	.240	.236	.233
11	.304	.299	.294	.290	.285	.281	.277	.273	.269	.265	.261	.257	.254	.250	.247
12	.319	.314	.309	.304	.300	.295	.291	.287	.283	.279	.275	.271	.267	.264	.260
13	.334	.328	.323	.318	.314	.309	.305	.300	.296	.292	.288	.284	.280	.277	.273
14	.347	.342	.337	.332	.327	.322	.318	.313	.309	.305	.301	.297	.293	.289	.285
15	.360	.355	.350	.345	.340	.335	.330	.326	.321	.317	.313	.309	.305	.301	.297
16	.373	.367	.362	.357	.352	.347	.342	.338	.333	.329	.324	.320	.316	.312	.308
17	.385	.379	.374	.369	.364	.359	.354	.349	.344	.340	.336	.331	.327	.323	.319
18	.397	.391	.385	.380	.375	.370	.365	.360	.355	.351	.346	.342	.338	.334	.330
19	.408	.402	.396	.391	.386	.381	.376	.371	.366	.361	.357	.353	.348	.344	.340
20	.418	.413	.407	.401	.396	.391	.386	.381	.376	.372	.367	.363	.358	.354	.350
21	.429	.423	.417	.412	.406	.401	.396	.391	.386	.381	.377	.372	.368	.364	.359
22	.438	.433	.427	.421	.416	.411	.406	.401	.396	.391	.386	.382	.377	.373	.369
23	.448	.442	.436	.431	.425	.420	.415	.410	.405	.400	.395	.391	.386	.382	.378
24	.457	.451	.445	.440	.434	.429	.424	.419	.414	.409	.404	.400	.395	.391	.386
25	.466	.460	.454	.449	.443	.438	.433	.427	.422	.418	.413	.408	.404	.399	.395
26	.475	.469	.463	.457	.452	.446	.441	.436	.431	.426	.421	.416	.412	.407	.403
27	.483	.477	.471	.465	.460	.454	.449	.444	.439	.434	.429	.424	.420	.415	.411
28	.491	.485	.479	.473	.468	.462	.457	.452	.447	.442	.437	.432	.428	.423	.419
29	.499	.493	.487	.481	.476	.470	.465	.460	.454	.449	.445	.440	.435	.431	.426
30	.506	.500	.494	.489	.483	.478	.472	.467	.462	.457	.452	.447	.443	.438	.433
31	.514	.508	.502	.496	.490	.485	.480	.474	.469	.464	.459	.454	.450	.445	.441
32	.521	.515	.509	.503	.497	.492	.487	.481	.476	.471	.466	.461	.457	.452	.447
33	.527	.521	.516	.510	.504	.499	.493	.488	.483	.478	.473	.468	.463	.459	.454
34	.534	.528	.522	.517	.511	.505	.500	.495	.490	.485	.480	.475	.470	.465	.461
35	.541	.535	.529	.523	.517	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.477	.472	.467
36	.547	.541	.535	.529	.524	.518	.513	.508	.503	.497	.492	.488	.483	.478	.474
37	.553	.547	.541	.536	.530	.524	.519	.514	.509	.504	.499	.494	.489	.484	.480
38	.559	.553	.547	.542	.536	.530	.525	.520	.515	.510	.505	.500	.495	.490	.486
39	.565	.559	.553	.547	.542	.536	.531	.526	.521	.515	.510	.506	.501	.496	.492
40	.570	.565	.559	.553	.547	.542	.537	.531	.526	.521	.516	.511	.507	.502	.497
41	.576	.570	.564	.559	.553	.548	.542	.537	.532	.527	.522	.517	.512	.507	.503
42	.581	.575	.570	.564	.558	.553	.548	.542	.537	.532	.527	.522	.518	.513	.508
43	.586	.581	.575	.569	.564	.558	.553	.548	.543	.537	.533	.528	.523	.518	.514
44	.592	.586	.580	.574	.569	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.528	.523	.519
45	.597	.591	.585	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.528	.524
46	.601	.596	.590	.584	.579	.573	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.529
47	.606	.600	.595	.589	.584	.578	.573	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.534
48	.611	.605	.599	.594	.588	.583	.578	.572	.567	.562	.557	.553	.548	.543	.539
49	.615	.609	.604	.598	.593	.587	.582	.577	.572	.567	.562	.557	.552	.548	.543
50	.620	.614	.608	.603	.597	.592	.587	.582	.576	.572	.567	.562	.557	.552	.548

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.990	.900	.785	.684	.602	.536	.482	.438	.401	.369	.342	.319	.298	.280	.264
2	.995	.941	.859	.778	.706	.643	.590	.544	.504	.470	.440	.413	.389	.368	.349
3	.997	.958	.894	.827	.764	.707	.656	.612	.572	.537	.506	.478	.453	.430	.410
4	.997	.967	.915	.858	.802	.750	.703	.660	.622	.588	.557	.529	.503	.480	.458
5	.998	.973	.929	.879	.829	.782	.738	.698	.661	.627	.597	.569	.543	.520	.498
6	.998	.977	.939	.895	.850	.806	.765	.727	.692	.660	.630	.603	.577	.554	.532
7	.999	.980	.947	.907	.866	.825	.787	.751	.718	.687	.658	.631	.606	.583	.561
8	.999	.983	.952	.916	.879	.841	.805	.771	.739	.709	.681	.655	.631	.608	.587
9	.999	.984	.957	.924	.889	.854	.821	.788	.758	.729	.702	.677	.653	.630	.609
10	.999	.986	.961	.931	.898	.865	.834	.803	.774	.746	.720	.695	.672	.650	.630
11	.999	.987	.964	.936	.906	.875	.845	.816	.788	.761	.736	.712	.689	.668	.648
12	.999	.988	.967	.941	.912	.883	.855	.827	.800	.774	.750	.727	.705	.684	.664
13	.999	.989	.969	.945	.918	.890	.863	.837	.811	.786	.763	.740	.719	.698	.679
14	.999	.990	.971	.948	.923	.897	.871	.845	.821	.797	.774	.752	.731	.711	.692
15	.999	.990	.973	.951	.927	.902	.878	.853	.829	.806	.784	.763	.743	.723	.705
16	.999	.991	.975	.954	.931	.908	.884	.860	.837	.815	.794	.773	.753	.734	.716
17	.999	.992	.976	.956	.935	.912	.889	.867	.845	.823	.802	.782	.763	.744	.727
18	.999	.992	.977	.959	.938	.916	.894	.873	.851	.831	.810	.791	.772	.754	.736
19	.999	.992	.978	.961	.941	.920	.899	.878	.857	.837	.818	.799	.780	.763	.746
20	.999	.993	.979	.962	.943	.923	.903	.883	.863	.843	.824	.806	.788	.771	.754
21	1.00	.993	.980	.964	.946	.927	.907	.888	.868	.849	.831	.813	.795	.778	.762
22	1.00	.993	.981	.966	.948	.930	.911	.892	.873	.855	.837	.819	.802	.785	.769
23	1.00	.994	.982	.967	.950	.932	.914	.896	.877	.860	.842	.825	.808	.792	.776
24	1.00	.994	.983	.968	.952	.935	.917	.899	.882	.864	.847	.830	.814	.798	.783
25	1.00	.994	.983	.969	.954	.937	.920	.903	.886	.869	.852	.836	.820	.804	.789
26	1.00	.994	.984	.970	.955	.939	.923	.906	.889	.873	.856	.840	.825	.810	.795
27	1.00	.995	.985	.972	.957	.941	.925	.909	.893	.876	.861	.845	.830	.815	.800
28	1.00	.995	.985	.972	.958	.943	.927	.912	.896	.880	.865	.849	.834	.820	.806
29	1.00	.995	.986	.973	.960	.945	.930	.914	.899	.883	.868	.853	.839	.825	.811
30	1.00	.995	.986	.974	.961	.946	.932	.917	.902	.887	.872	.857	.843	.829	.815
31	1.00	.995	.986	.975	.962	.948	.934	.919	.904	.890	.875	.861	.847	.833	.820
32	1.00	.995	.987	.976	.963	.949	.935	.921	.907	.893	.878	.864	.851	.837	.824
33	1.00	.996	.987	.976	.964	.951	.937	.923	.909	.895	.881	.868	.854	.841	.828
34	1.00	.996	.988	.977	.965	.952	.939	.925	.912	.898	.884	.871	.858	.845	.832
35	1.00	.996	.988	.978	.966	.953	.940	.927	.914	.900	.887	.874	.861	.848	.836
36	1.00	.996	.988	.978	.967	.955	.942	.929	.916	.903	.890	.877	.864	.852	.839
37	1.00	.996	.989	.979	.968	.956	.943	.931	.918	.905	.892	.880	.867	.855	.843
38	1.00	.996	.989	.979	.969	.957	.945	.932	.920	.907	.895	.882	.870	.858	.846
39	1.00	.996	.989	.980	.969	.958	.946	.934	.921	.909	.897	.885	.873	.861	.849
40	1.00	.996	.989	.980	.970	.959	.947	.935	.923	.911	.899	.887	.875	.864	.852
41	1.00	.996	.990	.981	.971	.960	.948	.937	.925	.913	.901	.889	.878	.866	.855
42	1.00	.997	.990	.981	.971	.961	.949	.938	.926	.915	.903	.892	.880	.869	.858
43	1.00	.997	.990	.982	.972	.961	.951	.939	.928	.917	.905	.894	.883	.871	.860
44	1.00	.997	.990	.982	.973	.962	.952	.941	.929	.918	.907	.896	.885	.874	.863
45	1.00	.997	.991	.982	.973	.963	.953	.942	.931	.920	.909	.898	.887	.876	.865
46	1.00	.997	.991	.983	.974	.964	.954	.943	.932	.921	.910	.900	.889	.878	.868
47	1.00	.997	.991	.983	.974	.965	.954	.944	.933	.923	.912	.901	.891	.880	.870
48	1.00	.997	.991	.984	.975	.965	.955	.945	.935	.924	.914	.903	.893	.883	.872
49	1.00	.997	.991	.984	.975	.966	.956	.946	.936	.926	.915	.905	.895	.885	.875
50	1.00	.997	.991	.984	.976	.967	.957	.947	.937	.927	.917	.907	.896	.886	.877

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.250	.237	.226	.215	.206	.197	.189	.181	.175	.168	.162	.157	.152	.147	.142
2	.332	.316	.302	.289	.277	.266	.256	.246	.237	.229	.222	.215	.208	.202	.196
3	.391	.374	.358	.344	.330	.318	.307	.296	.286	.277	.268	.260	.252	.245	.238
4	.439	.421	.404	.389	.374	.361	.349	.337	.326	.316	.307	.298	.289	.281	.273
5	.478	.460	.443	.427	.412	.398	.385	.373	.361	.350	.340	.331	.322	.313	.305
6	.512	.493	.476	.460	.444	.430	.417	.404	.392	.381	.370	.360	.351	.342	.333
7	.541	.522	.505	.488	.473	.458	.445	.432	.420	.408	.397	.387	.377	.367	.358
8	.567	.548	.531	.514	.498	.484	.470	.457	.444	.432	.421	.411	.401	.391	.382
9	.590	.571	.554	.537	.521	.507	.493	.479	.467	.455	.443	.433	.422	.412	.403
10	.610	.592	.574	.558	.542	.527	.513	.500	.487	.475	.464	.453	.442	.432	.423
11	.628	.610	.593	.577	.561	.546	.532	.519	.506	.494	.483	.472	.461	.451	.441
12	.645	.627	.610	.594	.579	.564	.550	.537	.524	.512	.500	.489	.478	.468	.458
13	.660	.643	.626	.610	.595	.580	.566	.553	.540	.528	.516	.505	.494	.484	.474
14	.674	.657	.640	.624	.609	.595	.581	.568	.555	.543	.531	.520	.510	.499	.489
15	.687	.670	.654	.638	.623	.609	.595	.582	.569	.557	.546	.534	.524	.513	.504
16	.699	.682	.666	.650	.636	.622	.608	.595	.583	.570	.559	.548	.537	.527	.517
17	.710	.693	.677	.662	.648	.634	.620	.607	.595	.583	.571	.560	.550	.539	.529
18	.720	.704	.688	.673	.659	.645	.632	.619	.607	.595	.583	.572	.562	.551	.541
19	.729	.713	.698	.683	.669	.655	.642	.630	.617	.606	.594	.583	.573	.563	.553
20	.738	.722	.707	.693	.679	.665	.652	.640	.628	.616	.605	.594	.583	.573	.563
21	.746	.731	.716	.702	.688	.675	.662	.650	.638	.626	.615	.604	.594	.583	.574
22	.754	.739	.724	.710	.697	.684	.671	.659	.647	.635	.624	.614	.603	.593	.583
23	.761	.746	.732	.718	.705	.692	.680	.667	.656	.644	.633	.623	.612	.602	.593
24	.768	.754	.739	.726	.713	.700	.688	.676	.664	.653	.642	.631	.621	.611	.602
25	.774	.760	.746	.733	.720	.708	.695	.683	.672	.661	.650	.640	.629	.620	.610
26	.781	.767	.753	.740	.727	.715	.703	.691	.680	.669	.658	.648	.637	.628	.618
27	.786	.773	.759	.746	.734	.721	.710	.698	.687	.676	.665	.655	.645	.635	.626
28	.792	.778	.765	.752	.740	.728	.716	.705	.694	.683	.672	.662	.652	.643	.633
29	.797	.784	.771	.758	.746	.734	.723	.711	.700	.690	.679	.669	.659	.650	.641
30	.802	.789	.776	.764	.752	.740	.729	.718	.707	.696	.686	.676	.666	.657	.647
31	.807	.794	.781	.769	.757	.746	.734	.723	.713	.702	.692	.682	.673	.663	.654
32	.811	.799	.786	.774	.763	.751	.740	.729	.719	.708	.698	.688	.679	.669	.660
33	.815	.803	.791	.779	.768	.756	.745	.735	.724	.714	.704	.694	.685	.676	.667
34	.820	.807	.795	.784	.772	.761	.750	.740	.729	.719	.710	.700	.691	.681	.672
35	.823	.811	.800	.788	.777	.766	.755	.745	.735	.725	.715	.705	.696	.687	.678
36	.827	.815	.804	.793	.781	.771	.760	.750	.740	.730	.720	.711	.701	.692	.684
37	.831	.819	.808	.797	.786	.775	.765	.754	.744	.735	.725	.716	.707	.698	.689
38	.834	.823	.812	.801	.790	.779	.769	.759	.749	.739	.730	.721	.712	.703	.694
39	.838	.826	.815	.804	.794	.783	.773	.763	.753	.744	.734	.725	.716	.708	.699
40	.841	.830	.819	.808	.798	.787	.777	.767	.758	.748	.739	.730	.721	.712	.704
41	.844	.833	.822	.812	.801	.791	.781	.771	.762	.752	.743	.734	.726	.717	.709
42	.847	.836	.825	.815	.805	.795	.785	.775	.766	.757	.747	.739	.730	.721	.713
43	.850	.839	.828	.818	.808	.798	.788	.779	.770	.760	.752	.743	.734	.726	.717
44	.852	.842	.831	.821	.811	.802	.792	.783	.773	.764	.755	.747	.738	.730	.722
45	.855	.845	.834	.824	.815	.805	.795	.786	.777	.768	.759	.751	.742	.734	.726
46	.857	.847	.837	.827	.818	.808	.799	.790	.780	.772	.763	.754	.746	.738	.730
47	.860	.850	.840	.830	.821	.811	.802	.793	.784	.775	.766	.758	.750	.742	.734
48	.862	.852	.843	.833	.823	.814	.805	.796	.787	.778	.770	.762	.753	.745	.737
49	.865	.855	.845	.836	.826	.817	.808	.799	.790	.782	.773	.765	.757	.749	.741
50	.867	.857	.848	.838	.829	.820	.811	.802	.793	.785	.777	.768	.760	.752	.745

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.138	.134	.130	.127	.123	.120	.117	.114	.111	.109	.106	.104	.102	.099	.097
2	.190	.185	.180	.175	.171	.166	.162	.158	.155	.151	.148	.145	.142	.139	.136
3	.231	.225	.219	.214	.208	.203	.199	.194	.190	.185	.181	.178	.174	.170	.167
4	.266	.259	.253	.247	.241	.235	.230	.225	.220	.215	.211	.206	.202	.198	.194
5	.297	.290	.283	.276	.270	.264	.258	.252	.247	.242	.237	.232	.228	.223	.219
6	.325	.317	.310	.303	.296	.289	.283	.277	.271	.266	.261	.256	.251	.246	.242
7	.350	.342	.334	.327	.320	.313	.306	.300	.294	.288	.283	.277	.272	.267	.262
8	.373	.364	.356	.349	.341	.334	.328	.321	.315	.309	.303	.297	.292	.287	.282
9	.394	.385	.377	.369	.362	.354	.347	.341	.334	.328	.322	.316	.311	.305	.300
10	.414	.405	.396	.388	.381	.373	.366	.359	.352	.346	.340	.334	.328	.322	.317
11	.432	.423	.414	.406	.398	.391	.383	.376	.369	.363	.356	.350	.344	.339	.333
12	.449	.440	.431	.423	.415	.407	.400	.392	.385	.379	.372	.366	.360	.354	.348
13	.465	.456	.447	.439	.430	.423	.415	.408	.401	.394	.387	.381	.375	.369	.363
14	.480	.471	.462	.453	.445	.437	.430	.422	.415	.408	.401	.395	.389	.382	.377
15	.494	.485	.476	.467	.459	.451	.443	.436	.429	.422	.415	.408	.402	.396	.390
16	.507	.498	.489	.481	.472	.464	.456	.449	.442	.434	.428	.421	.415	.408	.402
17	.520	.511	.502	.493	.485	.477	.469	.461	.454	.447	.440	.433	.427	.420	.414
18	.532	.523	.514	.505	.497	.488	.481	.473	.466	.458	.452	.445	.438	.432	.426
19	.543	.534	.525	.516	.508	.500	.492	.484	.477	.470	.463	.456	.449	.443	.437
20	.554	.545	.536	.527	.519	.511	.503	.495	.488	.480	.473	.467	.460	.453	.447
21	.564	.555	.546	.537	.529	.521	.513	.505	.498	.491	.484	.477	.470	.464	.457
22	.574	.565	.556	.547	.539	.531	.523	.515	.508	.500	.493	.487	.480	.473	.467
23	.583	.574	.565	.557	.548	.540	.532	.525	.517	.510	.503	.496	.489	.483	.476
24	.592	.583	.574	.566	.557	.549	.541	.534	.526	.519	.512	.505	.498	.492	.485
25	.601	.592	.583	.574	.566	.558	.550	.542	.535	.528	.521	.514	.507	.501	.494
26	.609	.600	.591	.583	.574	.566	.559	.551	.543	.536	.529	.522	.516	.509	.503
27	.617	.608	.599	.591	.582	.574	.567	.559	.552	.544	.537	.530	.524	.517	.511
28	.624	.615	.607	.598	.590	.582	.574	.567	.559	.552	.545	.538	.532	.525	.519
29	.631	.623	.614	.606	.598	.590	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.539	.533	.526
30	.638	.630	.621	.613	.605	.597	.589	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.540	.534
31	.645	.636	.628	.620	.612	.604	.596	.589	.581	.574	.567	.560	.554	.547	.541
32	.652	.643	.634	.626	.618	.610	.603	.595	.588	.581	.574	.567	.560	.554	.548
33	.658	.649	.641	.633	.625	.617	.609	.602	.595	.587	.581	.574	.567	.561	.554
34	.664	.655	.647	.639	.631	.623	.616	.608	.601	.594	.587	.580	.574	.567	.561
35	.670	.661	.653	.645	.637	.629	.622	.614	.607	.600	.593	.586	.580	.573	.567
36	.675	.667	.658	.650	.643	.635	.628	.620	.613	.606	.599	.592	.586	.579	.573
37	.680	.672	.664	.656	.648	.641	.633	.626	.619	.612	.605	.598	.592	.585	.579
38	.686	.677	.669	.661	.654	.646	.639	.631	.624	.617	.611	.604	.597	.591	.585
39	.691	.683	.674	.667	.659	.651	.644	.637	.630	.623	.616	.610	.603	.597	.590
40	.696	.687	.679	.672	.664	.657	.649	.642	.635	.628	.622	.615	.608	.602	.596
41	.700	.692	.684	.677	.669	.662	.654	.647	.640	.633	.627	.620	.614	.607	.601
42	.705	.697	.689	.681	.674	.666	.659	.652	.645	.638	.632	.625	.619	.613	.606
43	.709	.701	.694	.686	.679	.671	.664	.657	.650	.643	.637	.630	.624	.618	.611
44	.714	.706	.698	.690	.683	.676	.669	.662	.655	.648	.641	.635	.629	.622	.616
45	.718	.710	.702	.695	.687	.680	.673	.666	.659	.653	.646	.640	.633	.627	.621
46	.722	.714	.707	.699	.692	.685	.678	.671	.664	.657	.651	.644	.638	.632	.626
47	.726	.718	.711	.703	.696	.689	.682	.675	.668	.662	.655	.649	.642	.636	.630
48	.730	.722	.715	.707	.700	.693	.686	.679	.672	.666	.659	.653	.647	.641	.635
49	.733	.726	.718	.711	.704	.697	.690	.683	.677	.670	.664	.657	.651	.645	.639
50	.737	.729	.722	.715	.708	.701	.694	.687	.681	.674	.668	.661	.655	.649	.643

Quantile der Beta-Verteilung: 99%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.99}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.095	.093	.091	.090	.088	.086	.085	.083	.082	.080	.079	.078	.076	.075	.074
2	.133	.130	.128	.126	.123	.121	.119	.117	.115	.113	.111	.109	.107	.106	.104
3	.164	.161	.158	.155	.152	.149	.147	.144	.142	.139	.137	.135	.133	.131	.129
4	.191	.187	.184	.180	.177	.174	.171	.168	.166	.163	.160	.158	.155	.153	.151
5	.215	.211	.207	.204	.200	.197	.194	.190	.187	.184	.181	.179	.176	.173	.171
6	.237	.233	.229	.225	.221	.218	.214	.211	.207	.204	.201	.198	.195	.192	.189
7	.258	.253	.249	.245	.241	.237	.233	.229	.226	.222	.219	.216	.213	.210	.207
8	.277	.272	.268	.263	.259	.255	.251	.247	.243	.240	.236	.233	.229	.226	.223
9	.295	.290	.285	.281	.276	.272	.268	.264	.260	.256	.252	.249	.245	.242	.239
10	.312	.307	.302	.297	.292	.288	.284	.279	.275	.271	.268	.264	.260	.257	.253
11	.328	.322	.317	.313	.308	.303	.299	.294	.290	.286	.282	.278	.274	.271	.267
12	.343	.337	.332	.327	.322	.318	.313	.309	.304	.300	.296	.292	.288	.284	.281
13	.357	.352	.346	.341	.336	.331	.327	.322	.318	.313	.309	.305	.301	.297	.293
14	.371	.365	.360	.355	.350	.345	.340	.335	.331	.326	.322	.318	.314	.310	.306
15	.384	.378	.373	.367	.362	.357	.352	.348	.343	.338	.334	.330	.325	.321	.317
16	.396	.391	.385	.380	.374	.369	.364	.359	.355	.350	.346	.341	.337	.333	.329
17	.408	.402	.397	.391	.386	.381	.376	.371	.366	.361	.357	.352	.348	.344	.340
18	.420	.414	.408	.403	.397	.392	.387	.382	.377	.372	.368	.363	.359	.354	.350
19	.431	.425	.419	.413	.408	.403	.397	.392	.387	.383	.378	.373	.369	.365	.360
20	.441	.435	.429	.424	.418	.413	.408	.403	.398	.393	.388	.383	.379	.374	.370
21	.451	.445	.439	.434	.428	.423	.418	.412	.407	.402	.398	.393	.388	.384	.380
22	.461	.455	.449	.443	.438	.432	.427	.422	.417	.412	.407	.402	.398	.393	.389
23	.470	.464	.458	.453	.447	.442	.436	.431	.426	.421	.416	.411	.407	.402	.398
24	.479	.473	.467	.462	.456	.450	.445	.440	.435	.430	.425	.420	.415	.411	.406
25	.488	.482	.476	.470	.465	.459	.454	.448	.443	.438	.433	.428	.424	.419	.415
26	.496	.490	.484	.479	.473	.467	.462	.457	.452	.446	.441	.437	.432	.427	.423
27	.505	.498	.492	.487	.481	.475	.470	.465	.460	.454	.449	.445	.440	.435	.431
28	.512	.506	.500	.495	.489	.483	.478	.472	.467	.462	.457	.452	.448	.443	.438
29	.520	.514	.508	.502	.496	.491	.485	.480	.475	.470	.465	.460	.455	.450	.446
30	.527	.521	.515	.509	.504	.498	.493	.487	.482	.477	.472	.467	.462	.458	.453
31	.534	.528	.522	.517	.511	.505	.500	.494	.489	.484	.479	.474	.469	.465	.460
32	.541	.535	.529	.523	.518	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.476	.471	.467
33	.548	.542	.536	.530	.525	.519	.513	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.478	.473
34	.555	.548	.543	.537	.531	.525	.520	.515	.509	.504	.499	.494	.489	.485	.480
35	.561	.555	.549	.543	.537	.532	.526	.521	.516	.511	.506	.501	.496	.491	.486
36	.567	.561	.555	.549	.544	.538	.533	.527	.522	.517	.512	.507	.502	.497	.492
37	.573	.567	.561	.555	.550	.544	.539	.533	.528	.523	.518	.513	.508	.503	.498
38	.579	.573	.567	.561	.555	.550	.544	.539	.534	.529	.524	.519	.514	.509	.504
39	.584	.578	.572	.567	.561	.556	.550	.545	.540	.534	.529	.524	.520	.515	.510
40	.590	.584	.578	.572	.567	.561	.556	.550	.545	.540	.535	.530	.525	.520	.516
41	.595	.589	.583	.578	.572	.566	.561	.556	.551	.545	.540	.535	.531	.526	.521
42	.600	.594	.589	.583	.577	.572	.566	.561	.556	.551	.546	.541	.536	.531	.526
43	.605	.599	.594	.588	.582	.577	.572	.566	.561	.556	.551	.546	.541	.536	.532
44	.610	.604	.599	.593	.587	.582	.577	.571	.566	.561	.556	.551	.546	.541	.537
45	.615	.609	.604	.598	.592	.587	.581	.576	.571	.566	.561	.556	.551	.546	.542
46	.620	.614	.608	.603	.597	.592	.586	.581	.576	.571	.566	.561	.556	.551	.547
47	.624	.619	.613	.607	.602	.596	.591	.586	.581	.575	.571	.566	.561	.556	.551
48	.629	.623	.617	.612	.606	.601	.596	.590	.585	.580	.575	.570	.565	.561	.556
49	.633	.627	.622	.616	.611	.605	.600	.595	.590	.585	.580	.575	.570	.565	.561
50	.637	.632	.626	.621	.615	.610	.604	.599	.594	.589	.584	.579	.574	.570	.565

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	.995	.929	.829	.734	.653	.586	.531	.484	.445	.411	.382	.357	.335	.315	.298
2	.997	.959	.889	.815	.746	.685	.632	.585	.544	.509	.477	.449	.424	.402	.381
3	.998	.971	.917	.856	.797	.742	.693	.648	.608	.573	.541	.512	.486	.463	.441
4	.999	.977	.934	.882	.830	.781	.735	.693	.655	.621	.589	.561	.534	.510	.488
5	.999	.981	.945	.900	.854	.809	.767	.728	.691	.658	.627	.599	.573	.549	.527
6	.999	.984	.953	.913	.872	.831	.791	.755	.720	.688	.658	.631	.605	.582	.560
7	.999	.986	.958	.923	.886	.848	.811	.777	.744	.713	.685	.658	.633	.610	.588
8	.999	.988	.963	.931	.897	.862	.828	.795	.764	.734	.707	.681	.657	.634	.612
9	.999	.989	.967	.938	.906	.873	.841	.810	.781	.753	.726	.701	.677	.655	.634
10	.999	.990	.970	.943	.913	.883	.853	.824	.795	.768	.743	.718	.695	.674	.653
11	1.00	.991	.972	.947	.920	.891	.863	.835	.808	.782	.758	.734	.712	.690	.670
12	1.00	.992	.974	.951	.925	.899	.872	.845	.819	.795	.771	.748	.726	.705	.686
13	1.00	.992	.976	.955	.930	.905	.879	.854	.829	.805	.782	.760	.739	.719	.700
14	1.00	.993	.978	.957	.935	.910	.886	.862	.838	.815	.793	.772	.751	.731	.713
15	1.00	.993	.979	.960	.938	.915	.892	.869	.846	.824	.803	.782	.762	.743	.724
16	1.00	.994	.980	.962	.942	.920	.898	.875	.854	.832	.811	.791	.772	.753	.735
17	1.00	.994	.981	.964	.945	.924	.903	.881	.860	.839	.819	.800	.781	.763	.745
18	1.00	.994	.982	.966	.947	.927	.907	.887	.866	.846	.827	.808	.789	.772	.754
19	1.00	.995	.983	.968	.950	.931	.911	.891	.872	.852	.833	.815	.797	.780	.763
20	1.00	.995	.984	.969	.952	.934	.915	.896	.877	.858	.840	.822	.804	.787	.771
21	1.00	.995	.985	.971	.954	.936	.918	.900	.881	.863	.845	.828	.811	.794	.778
22	1.00	.995	.985	.972	.956	.939	.921	.904	.886	.868	.851	.834	.817	.801	.785
23	1.00	.996	.986	.973	.958	.941	.924	.907	.890	.873	.856	.839	.823	.807	.792
24	1.00	.996	.987	.974	.959	.944	.927	.910	.894	.877	.861	.844	.829	.813	.798
25	1.00	.996	.987	.975	.961	.946	.930	.913	.897	.881	.865	.849	.834	.819	.804
26	1.00	.996	.988	.976	.962	.947	.932	.916	.900	.885	.869	.854	.839	.824	.809
27	1.00	.996	.988	.977	.963	.949	.934	.919	.903	.888	.873	.858	.843	.829	.815
28	1.00	.996	.988	.977	.965	.951	.936	.921	.906	.891	.877	.862	.847	.833	.819
29	1.00	.996	.989	.978	.966	.952	.938	.924	.909	.894	.880	.866	.852	.838	.824
30	1.00	.997	.989	.979	.967	.954	.940	.926	.912	.897	.883	.869	.855	.842	.828
31	1.00	.997	.989	.980	.968	.955	.942	.928	.914	.900	.886	.873	.859	.846	.833
32	1.00	.997	.990	.980	.969	.956	.943	.930	.916	.903	.889	.876	.863	.849	.837
33	1.00	.997	.990	.981	.970	.958	.945	.932	.919	.905	.892	.879	.866	.853	.840
34	1.00	.997	.990	.981	.970	.959	.946	.934	.921	.908	.895	.882	.869	.856	.844
35	1.00	.997	.991	.982	.971	.960	.948	.935	.923	.910	.897	.885	.872	.860	.848
36	1.00	.997	.991	.982	.972	.961	.949	.937	.924	.912	.900	.887	.875	.863	.851
37	1.00	.997	.991	.983	.973	.962	.950	.938	.926	.914	.902	.890	.878	.866	.854
38	1.00	.997	.991	.983	.973	.963	.951	.940	.928	.916	.904	.892	.880	.869	.857
39	1.00	.997	.992	.984	.974	.964	.953	.941	.930	.918	.906	.894	.883	.871	.860
40	1.00	.997	.992	.984	.975	.964	.954	.943	.931	.920	.908	.897	.885	.874	.863
41	1.00	.998	.992	.984	.975	.965	.955	.944	.933	.921	.910	.899	.888	.876	.865
42	1.00	.998	.992	.985	.976	.966	.956	.945	.934	.923	.912	.901	.890	.879	.868
43	1.00	.998	.992	.985	.976	.967	.957	.946	.935	.925	.914	.903	.892	.881	.871
44	1.00	.998	.993	.985	.977	.967	.958	.947	.937	.926	.915	.905	.894	.883	.873
45	1.00	.998	.993	.986	.977	.968	.958	.948	.938	.928	.917	.906	.896	.886	.875
46	1.00	.998	.993	.986	.978	.969	.959	.949	.939	.929	.919	.908	.898	.888	.877
47	1.00	.998	.993	.986	.978	.969	.960	.950	.940	.930	.920	.910	.900	.890	.880
48	1.00	.998	.993	.987	.979	.970	.961	.951	.941	.932	.922	.912	.902	.892	.882
49	1.00	.998	.993	.987	.979	.971	.962	.952	.943	.933	.923	.913	.903	.893	.884
50	1.00	.998	.993	.987	.979	.971	.962	.953	.944	.934	.924	.915	.905	.895	.886

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	.282	.268	.255	.243	.233	.223	.214	.206	.198	.191	.184	.178	.172	.167	.162
2	.363	.346	.331	.317	.304	.292	.281	.271	.262	.253	.245	.237	.230	.223	.216
3	.422	.404	.387	.372	.358	.345	.332	.321	.310	.300	.291	.282	.274	.266	.259
4	.468	.449	.432	.416	.401	.387	.374	.362	.351	.340	.330	.320	.311	.303	.295
5	.507	.488	.470	.453	.438	.424	.410	.397	.385	.374	.363	.353	.344	.335	.326
6	.539	.520	.502	.485	.470	.455	.441	.428	.416	.404	.393	.383	.373	.363	.354
7	.567	.548	.530	.514	.498	.483	.469	.455	.443	.431	.419	.409	.398	.389	.379
8	.592	.573	.555	.538	.523	.508	.493	.480	.467	.455	.443	.432	.422	.412	.402
9	.614	.595	.578	.561	.545	.530	.516	.502	.489	.477	.465	.454	.443	.433	.424
10	.633	.615	.597	.581	.565	.550	.536	.522	.509	.497	.485	.474	.463	.453	.443
11	.651	.633	.616	.599	.583	.569	.554	.541	.528	.515	.504	.492	.482	.471	.461
12	.667	.649	.632	.616	.600	.585	.571	.558	.545	.533	.521	.509	.498	.488	.478
13	.681	.664	.647	.631	.616	.601	.587	.574	.561	.548	.537	.525	.514	.504	.494
14	.695	.677	.661	.645	.630	.615	.601	.588	.575	.563	.551	.540	.529	.519	.509
15	.707	.690	.674	.658	.643	.629	.615	.602	.589	.577	.565	.554	.543	.532	.522
16	.718	.701	.685	.670	.655	.641	.627	.614	.602	.590	.578	.567	.556	.545	.535
17	.728	.712	.696	.681	.667	.653	.639	.626	.614	.602	.590	.579	.568	.558	.548
18	.738	.722	.706	.692	.677	.663	.650	.637	.625	.613	.602	.590	.580	.569	.559
19	.747	.731	.716	.701	.687	.674	.661	.648	.636	.624	.612	.601	.591	.580	.570
20	.755	.740	.725	.710	.697	.683	.670	.658	.646	.634	.623	.612	.601	.591	.581
21	.763	.748	.733	.719	.705	.692	.679	.667	.655	.643	.632	.621	.611	.601	.591
22	.770	.755	.741	.727	.714	.701	.688	.676	.664	.653	.641	.631	.620	.610	.600
23	.777	.762	.748	.735	.722	.709	.696	.684	.672	.661	.650	.639	.629	.619	.609
24	.783	.769	.755	.742	.729	.716	.704	.692	.681	.669	.658	.648	.638	.628	.618
25	.790	.776	.762	.749	.736	.723	.711	.700	.688	.677	.666	.656	.646	.636	.626
26	.795	.782	.768	.755	.743	.730	.718	.707	.695	.684	.674	.663	.653	.644	.634
27	.801	.787	.774	.761	.749	.737	.725	.714	.702	.692	.681	.671	.661	.651	.642
28	.806	.793	.780	.767	.755	.743	.731	.720	.709	.698	.688	.678	.668	.658	.649
29	.811	.798	.785	.773	.761	.749	.737	.726	.715	.705	.694	.684	.675	.665	.656
30	.815	.803	.790	.778	.766	.755	.743	.732	.721	.711	.701	.691	.681	.672	.662
31	.820	.807	.795	.783	.771	.760	.749	.738	.727	.717	.707	.697	.687	.678	.669
32	.824	.812	.800	.788	.776	.765	.754	.743	.733	.723	.713	.703	.693	.684	.675
33	.828	.816	.804	.792	.781	.770	.759	.749	.738	.728	.718	.709	.699	.690	.681
34	.832	.820	.808	.797	.786	.775	.764	.754	.743	.733	.724	.714	.705	.696	.687
35	.836	.824	.812	.801	.790	.779	.769	.758	.748	.738	.729	.719	.710	.701	.692
36	.839	.828	.816	.805	.794	.784	.773	.763	.753	.743	.734	.724	.715	.706	.697
37	.842	.831	.820	.809	.798	.788	.777	.767	.758	.748	.738	.729	.720	.711	.703
38	.846	.835	.824	.813	.802	.792	.782	.772	.762	.752	.743	.734	.725	.716	.708
39	.849	.838	.827	.816	.806	.796	.786	.776	.766	.757	.747	.738	.730	.721	.712
40	.852	.841	.830	.820	.810	.799	.790	.780	.770	.761	.752	.743	.734	.725	.717
41	.855	.844	.833	.823	.813	.803	.793	.784	.774	.765	.756	.747	.738	.730	.721
42	.857	.847	.837	.826	.816	.806	.797	.787	.778	.769	.760	.751	.743	.734	.726
43	.860	.850	.839	.829	.820	.810	.800	.791	.782	.773	.764	.755	.747	.738	.730
44	.863	.852	.842	.832	.823	.813	.804	.794	.785	.776	.768	.759	.751	.742	.734
45	.865	.855	.845	.835	.826	.816	.807	.798	.789	.780	.771	.763	.754	.746	.738
46	.867	.858	.848	.838	.829	.819	.810	.801	.792	.783	.775	.766	.758	.750	.742
47	.870	.860	.850	.841	.831	.822	.813	.804	.795	.787	.778	.770	.762	.754	.746
48	.872	.862	.853	.843	.834	.825	.816	.807	.798	.790	.781	.773	.765	.757	.749
49	.874	.865	.855	.846	.837	.828	.819	.810	.801	.793	.785	.776	.768	.761	.753
50	.876	.867	.857	.848	.839	.830	.822	.813	.804	.796	.788	.780	.772	.764	.756

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	.157	.153	.148	.144	.140	.137	.133	.130	.127	.124	.121	.119	.116	.113	.111
2	.210	.204	.199	.194	.189	.184	.180	.176	.172	.168	.164	.160	.157	.154	.151
3	.252	.245	.239	.233	.227	.222	.217	.212	.207	.203	.198	.194	.190	.186	.183
4	.287	.280	.273	.266	.260	.254	.248	.243	.238	.233	.228	.223	.219	.215	.210
5	.318	.310	.303	.296	.289	.283	.276	.271	.265	.259	.254	.249	.244	.240	.235
6	.346	.337	.330	.322	.315	.308	.302	.296	.290	.284	.278	.273	.268	.263	.258
7	.371	.362	.354	.346	.339	.332	.325	.318	.312	.306	.300	.295	.289	.284	.279
8	.393	.385	.376	.368	.361	.353	.346	.339	.333	.327	.321	.315	.309	.304	.298
9	.414	.405	.397	.389	.381	.373	.366	.359	.352	.346	.340	.333	.328	.322	.317
10	.434	.425	.416	.408	.400	.392	.384	.377	.370	.364	.357	.351	.345	.339	.334
11	.452	.443	.434	.425	.417	.409	.402	.394	.387	.380	.374	.368	.361	.355	.350
12	.468	.459	.450	.442	.433	.425	.418	.410	.403	.396	.390	.383	.377	.371	.365
13	.484	.475	.466	.457	.449	.441	.433	.425	.418	.411	.404	.398	.391	.385	.379
14	.499	.489	.480	.472	.463	.455	.447	.440	.432	.425	.418	.412	.405	.399	.393
15	.513	.503	.494	.485	.477	.469	.461	.453	.446	.439	.432	.425	.419	.412	.406
16	.526	.516	.507	.498	.490	.482	.474	.466	.459	.451	.444	.438	.431	.425	.418
17	.538	.529	.520	.511	.502	.494	.486	.478	.471	.464	.457	.450	.443	.437	.430
18	.550	.540	.531	.522	.514	.506	.498	.490	.482	.475	.468	.461	.454	.448	.442
19	.561	.551	.542	.534	.525	.517	.509	.501	.493	.486	.479	.472	.465	.459	.453
20	.571	.562	.553	.544	.536	.527	.519	.512	.504	.497	.490	.483	.476	.469	.463
21	.581	.572	.563	.554	.546	.538	.530	.522	.514	.507	.500	.493	.486	.479	.473
22	.591	.582	.573	.564	.555	.547	.539	.531	.524	.517	.509	.502	.496	.489	.483
23	.600	.591	.582	.573	.565	.556	.548	.541	.533	.526	.519	.512	.505	.498	.492
24	.609	.599	.591	.582	.573	.565	.557	.550	.542	.535	.528	.521	.514	.507	.501
25	.617	.608	.599	.590	.582	.574	.566	.558	.551	.543	.536	.529	.522	.516	.509
26	.625	.616	.607	.598	.590	.582	.574	.566	.559	.552	.544	.537	.531	.524	.518
27	.632	.623	.615	.606	.598	.590	.582	.574	.567	.559	.552	.545	.539	.532	.526
28	.640	.631	.622	.614	.605	.597	.590	.582	.574	.567	.560	.553	.546	.540	.533
29	.647	.638	.629	.621	.613	.605	.597	.589	.582	.575	.567	.561	.554	.547	.541
30	.653	.645	.636	.628	.620	.612	.604	.596	.589	.582	.575	.568	.561	.554	.548
31	.660	.651	.643	.634	.626	.618	.611	.603	.596	.589	.582	.575	.568	.561	.555
32	.666	.657	.649	.641	.633	.625	.617	.610	.602	.595	.588	.581	.575	.568	.562
33	.672	.664	.655	.647	.639	.631	.624	.616	.609	.602	.595	.588	.581	.575	.568
34	.678	.669	.661	.653	.645	.637	.630	.622	.615	.608	.601	.594	.587	.581	.575
35	.683	.675	.667	.659	.651	.643	.636	.628	.621	.614	.607	.600	.594	.587	.581
36	.689	.681	.672	.664	.657	.649	.641	.634	.627	.620	.613	.606	.600	.593	.587
37	.694	.686	.678	.670	.662	.654	.647	.640	.632	.625	.619	.612	.605	.599	.593
38	.699	.691	.683	.675	.667	.660	.652	.645	.638	.631	.624	.617	.611	.605	.598
39	.704	.696	.688	.680	.672	.665	.657	.650	.643	.636	.630	.623	.616	.610	.604
40	.709	.701	.693	.685	.677	.670	.663	.655	.648	.641	.635	.628	.622	.615	.609
41	.713	.705	.697	.690	.682	.675	.667	.660	.653	.647	.640	.633	.627	.620	.614
42	.718	.710	.702	.694	.687	.679	.672	.665	.658	.651	.645	.638	.632	.625	.619
43	.722	.714	.706	.699	.691	.684	.677	.670	.663	.656	.650	.643	.637	.630	.624
44	.726	.718	.711	.703	.696	.688	.681	.674	.668	.661	.654	.648	.641	.635	.629
45	.730	.722	.715	.707	.700	.693	.686	.679	.672	.665	.659	.652	.646	.640	.634
46	.734	.726	.719	.711	.704	.697	.690	.683	.676	.670	.663	.657	.650	.644	.638
47	.738	.730	.723	.715	.708	.701	.694	.687	.681	.674	.667	.661	.655	.649	.643
48	.742	.734	.727	.719	.712	.705	.698	.691	.685	.678	.672	.665	.659	.653	.647
49	.745	.738	.730	.723	.716	.709	.702	.695	.689	.682	.676	.669	.663	.657	.651
50	.749	.741	.734	.727	.720	.713	.706	.699	.693	.686	.680	.673	.667	.661	.655

Quantile der Beta-Verteilung: 99.5%-Quantil: $\beta_{m,n;\,0.995}$

$m \setminus n$	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	.109	.107	.105	.102	.101	.099	.097	.095	.093	.092	.090	.089	.087	.086	.085
2	.148	.145	.142	.139	.137	.134	.132	.130	.127	.125	.123	.121	.119	.117	.116
3	.179	.176	.173	.169	.166	.163	.161	.158	.155	.153	.150	.148	.145	.143	.141
4	.207	.203	.199	.196	.192	.189	.186	.183	.180	.177	.174	.171	.169	.166	.164
5	.231	.227	.223	.219	.215	.212	.208	.205	.202	.198	.195	.192	.189	.187	.184
6	.253	.249	.245	.241	.237	.233	.229	.225	.222	.218	.215	.212	.209	.206	.203
7	.274	.269	.265	.261	.256	.252	.248	.244	.241	.237	.233	.230	.227	.224	.220
8	.293	.288	.284	.279	.275	.270	.266	.262	.258	.254	.251	.247	.244	.240	.237
9	.311	.306	.301	.297	.292	.287	.283	.279	.275	.271	.267	.263	.259	.256	.252
10	.328	.323	.318	.313	.308	.304	.299	.295	.290	.286	.282	.278	.275	.271	.267
11	.344	.339	.334	.328	.324	.319	.314	.310	.305	.301	.297	.293	.289	.285	.281
12	.359	.354	.348	.343	.338	.333	.328	.324	.319	.315	.311	.307	.302	.299	.295
13	.374	.368	.362	.357	.352	.347	.342	.337	.333	.328	.324	.320	.315	.311	.307
14	.387	.381	.376	.370	.365	.360	.355	.350	.346	.341	.337	.332	.328	.324	.320
15	.400	.394	.389	.383	.378	.373	.368	.363	.358	.353	.349	.344	.340	.336	.332
16	.412	.407	.401	.395	.390	.385	.379	.374	.370	.365	.360	.356	.351	.347	.343
17	.424	.418	.412	.407	.401	.396	.391	.386	.381	.376	.371	.367	.362	.358	.354
18	.435	.430	.424	.418	.412	.407	.402	.397	.392	.387	.382	.377	.373	.369	.364
19	.446	.440	.434	.429	.423	.418	.412	.407	.402	.397	.392	.388	.383	.379	.374
20	.457	.451	.445	.439	.433	.428	.423	.417	.412	.407	.402	.398	.393	.389	.384
21	.467	.461	.455	.449	.443	.438	.432	.427	.422	.417	.412	.407	.403	.398	.394
22	.476	.470	.464	.458	.453	.447	.442	.436	.431	.426	.421	.416	.412	.407	.403
23	.486	.479	.473	.468	.462	.456	.451	.446	.440	.435	.430	.425	.421	.416	.411
24	.494	.488	.482	.476	.471	.465	.460	.454	.449	.444	.439	.434	.429	.425	.420
25	.503	.497	.491	.485	.479	.474	.468	.463	.457	.452	.447	.442	.438	.433	.428
26	.511	.505	.499	.493	.487	.482	.476	.471	.466	.460	.455	.451	.446	.441	.436
27	.519	.513	.507	.501	.495	.490	.484	.479	.474	.468	.463	.458	.454	.449	.444
28	.527	.521	.515	.509	.503	.497	.492	.487	.481	.476	.471	.466	.461	.456	.452
29	.534	.528	.522	.516	.511	.505	.499	.494	.489	.483	.478	.473	.469	.464	.459
30	.542	.535	.529	.524	.518	.512	.507	.501	.496	.491	.486	.481	.476	.471	.466
31	.549	.542	.536	.531	.525	.519	.514	.508	.503	.498	.493	.488	.483	.478	.473
32	.555	.549	.543	.537	.532	.526	.520	.515	.510	.504	.499	.494	.489	.485	.480
33	.562	.556	.550	.544	.538	.533	.527	.522	.516	.511	.506	.501	.496	.491	.487
34	.568	.562	.556	.550	.545	.539	.533	.528	.523	.518	.512	.507	.502	.498	.493
35	.575	.568	.562	.557	.551	.545	.540	.534	.529	.524	.519	.514	.509	.504	.499
36	.581	.574	.568	.563	.557	.551	.546	.540	.535	.530	.525	.520	.515	.510	.505
37	.586	.580	.574	.569	.563	.557	.552	.546	.541	.536	.531	.526	.521	.516	.511
38	.592	.586	.580	.574	.569	.563	.557	.552	.547	.542	.536	.531	.527	.522	.517
39	.598	.592	.586	.580	.574	.569	.563	.558	.552	.547	.542	.537	.532	.527	.523
40	.603	.597	.591	.585	.580	.574	.569	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.533	.528
41	.608	.602	.596	.591	.585	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.548	.543	.538	.534
42	.613	.607	.601	.596	.590	.584	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.548	.544	.539
43	.618	.612	.606	.601	.595	.590	.584	.579	.574	.568	.563	.558	.553	.549	.544
44	.623	.617	.611	.606	.600	.594	.589	.584	.578	.573	.568	.563	.558	.554	.549
45	.628	.622	.616	.610	.605	.599	.594	.589	.583	.578	.573	.568	.563	.559	.554
46	.632	.626	.621	.615	.609	.604	.599	.593	.588	.583	.578	.573	.568	.563	.559
47	.637	.631	.625	.619	.614	.609	.603	.598	.593	.588	.583	.578	.573	.568	.563
48	.641	.635	.630	.624	.618	.613	.608	.602	.597	.592	.587	.582	.577	.573	.568
49	.645	.640	.634	.628	.623	.617	.612	.607	.602	.597	.592	.587	.582	.577	.572
50	.649	.644	.638	.632	.627	.622	.616	.611	.606	.601	.596	.591	.586	.581	.577

A.8 Quantile der Wilcoxon $U_{m,n}$-Verteilung: 0.1%-Quantil

Tabelliert ist das 0.1%-Quantil $U_{m,n;\,0.001}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	11	11
6	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13	14	15	16	17
7	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	19	20	21	22	23
8	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22	24	25	27	28	30
9	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27	29	31	33	35	37
10	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33	35	37	39	41	44
11	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38	41	43	46	48	51
12	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43	46	49	52	55	58
13	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49	52	55	59	62	65
14	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62	65	69	73
15	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
16	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66	70	74	79	83	87
17	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71	76	81	86	90	95
18	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77	82	87	92	97	103
19	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83	88	94	99	105	110
20	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89	95	100	106	112	118
21	9	13	19	24	29	35	41	46	52	58	64	70	76	82	88	95	101	107	113	119	126
22	9	14	20	25	31	37	43	49	55	62	68	74	81	87	94	100	107	113	120	127	133
23	10	15	21	27	33	39	46	52	59	65	72	79	86	92	99	106	113	120	127	134	141
24	11	16	22	28	35	41	48	55	62	69	76	83	90	97	105	112	119	127	134	141	149
25	11	17	23	30	37	44	51	58	65	73	80	87	95	103	110	118	126	133	141	149	156
26	12	18	25	32	39	46	53	61	69	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164
27	13	19	26	33	41	48	56	64	72	80	88	96	105	113	121	130	138	147	155	164	172
28	13	20	27	35	42	50	58	67	75	84	92	101	109	118	127	136	144	153	162	171	180
29	14	21	28	36	44	53	61	70	78	87	96	105	114	123	132	141	151	160	169	178	188
30	15	22	30	38	46	55	64	73	82	91	100	109	119	128	138	147	157	167	176	186	196
31	15	23	31	39	48	57	66	76	85	95	104	114	124	133	143	153	163	173	183	193	203
32	16	24	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	139	149	159	170	180	190	201	211
33	16	25	33	42	52	62	71	81	92	102	112	123	133	144	154	165	176	187	197	208	219
34	17	26	35	44	54	64	74	84	95	106	116	127	138	149	160	171	182	193	205	216	227
35	18	26	36	46	56	66	77	87	98	109	120	132	143	154	166	177	189	200	212	223	235
36	18	27	37	47	58	68	79	90	102	113	124	136	148	159	171	183	195	207	219	231	243
37	19	28	38	49	59	71	82	93	105	117	128	140	152	165	177	189	201	214	226	238	251
38	20	29	40	50	61	73	84	96	108	120	132	145	157	170	182	195	208	220	233	246	259
39	20	30	41	52	63	75	87	99	111	124	137	149	162	175	188	201	214	227	240	253	267
40	21	31	42	53	65	77	90	102	115	128	141	154	167	180	193	207	220	234	247	261	275
41	22	32	43	55	67	80	92	105	118	131	145	158	172	185	199	213	227	241	255	269	283
42	22	33	45	57	69	82	95	108	121	135	149	163	177	191	205	219	233	247	262	276	291
43	23	34	46	58	71	84	97	111	125	139	153	167	181	196	210	225	239	254	269	284	299
44	24	35	47	60	73	86	100	114	128	142	157	171	186	201	216	231	246	261	276	291	306
45	24	36	48	61	75	89	103	117	131	146	161	176	191	206	221	237	252	268	283	299	314
46	25	37	50	63	77	91	105	120	135	150	165	180	196	211	227	243	259	274	290	306	322
47	25	38	51	64	79	93	108	123	138	154	169	185	201	217	233	249	265	281	298	314	330
48	26	39	52	66	80	95	110	126	141	157	173	189	206	222	238	255	271	288	305	322	338
49	27	40	53	68	82	98	113	129	145	161	177	194	210	227	244	261	278	295	312	329	346
50	27	41	55	69	84	100	116	132	148	165	181	198	215	232	249	267	284	302	319	337	354

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.1%-Quantil

Tabelliert ist das 0.1%-Quantil $U_{m,n;\,0.001}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18	19	20	20	21	22	22	23	24	24
6	18	19	20	21	22	23	24	25	26	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
7	25	26	27	28	30	31	32	33	35	36	37	38	40	41	42	43	45	46	47	48
8	32	33	35	36	38	39	41	42	44	46	47	49	50	52	53	55	57	58	60	61
9	39	41	42	44	46	48	50	52	54	56	58	59	61	63	65	67	69	71	73	75
10	46	48	50	53	55	57	59	62	64	66	68	71	73	75	77	80	82	84	86	89
11	53	56	58	61	64	66	69	71	74	77	79	82	84	87	90	92	95	97	100	103
12	61	64	67	70	73	76	78	81	84	87	90	93	96	99	102	105	108	111	114	117
13	69	72	75	78	82	85	88	92	95	98	102	105	108	111	115	118	121	125	128	131
14	76	80	84	87	91	95	98	102	106	109	113	117	120	124	128	131	135	139	142	146
5	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	137	141	145	149	153	157	161
16	92	96	101	105	109	114	118	123	127	132	136	140	145	149	154	158	163	167	171	176
17	100	105	109	114	119	124	128	133	138	143	148	152	157	162	167	172	177	181	186	191
18	108	113	118	123	128	133	139	144	149	154	159	165	170	175	180	185	191	196	201	206
19	116	121	127	132	138	143	149	154	160	166	171	177	182	188	193	199	205	210	216	221
20	124	130	136	141	147	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207	213	219	225	231	237
21	132	138	144	151	157	163	170	176	182	189	195	201	208	214	220	227	233	239	246	252
22	140	147	153	160	167	173	180	187	193	200	207	214	220	227	234	241	247	254	261	268
23	148	155	162	169	176	183	190	197	205	212	219	226	233	240	247	255	262	269	276	283
24	156	164	171	178	186	193	201	208	216	223	231	238	246	253	261	269	276	284	291	299
25	164	172	180	188	196	203	211	219	227	235	243	251	259	267	275	283	291	299	306	314
26	172	181	189	197	205	214	222	230	238	247	255	263	272	280	288	297	305	313	322	330
27	181	189	198	206	215	224	232	241	250	258	267	276	285	293	302	311	320	328	337	346
28	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	279	288	298	307	316	325	334	343	352	362
29	197	206	216	225	235	244	254	263	273	282	292	301	311	320	330	339	349	358	368	377
30	205	215	225	235	245	254	264	274	284	294	304	314	324	334	343	353	363	373	383	393
31	214	224	234	244	254	265	275	285	295	306	316	326	337	347	357	368	378	388	399	409
32	222	232	243	254	264	275	285	296	307	318	328	339	350	360	371	382	393	404	414	425
33	230	241	252	263	274	285	296	307	318	329	341	352	363	374	385	396	407	419	430	441
34	238	250	261	273	284	295	307	318	330	341	353	364	376	387	399	411	422	434	445	457
35	247	258	270	282	294	306	318	329	341	353	365	377	389	401	413	425	437	449	461	473
36	255	267	279	292	304	316	328	341	353	365	377	390	402	415	427	439	452	464	477	489
37	263	276	288	301	314	326	339	352	364	377	390	403	415	428	441	454	466	479	492	505
38	272	285	298	311	324	337	350	363	376	389	402	415	428	442	455	468	481	495	508	521
39	280	293	307	320	334	347	360	374	387	401	415	428	442	455	469	482	496	510	523	537
40	288	302	316	330	343	357	371	385	399	413	427	441	455	469	483	497	511	525	539	553
41	297	311	325	339	353	368	382	396	411	425	439	454	468	482	497	511	526	540	555	569
42	305	320	334	349	363	378	393	407	422	437	452	466	481	496	511	526	541	556	570	585
43	313	328	343	358	373	388	404	419	434	449	464	479	495	510	525	540	556	571	586	602
44	322	337	352	368	383	399	414	430	445	461	477	492	508	523	539	555	570	586	602	618
45	330	346	362	377	393	409	425	441	457	473	489	505	521	537	553	569	585	602	618	634
46	339	355	371	387	403	420	436	452	469	485	501	518	534	551	567	584	600	617	633	650
47	347	363	380	397	413	430	447	463	480	497	514	531	548	564	581	598	615	632	649	666
48	355	372	389	406	423	440	458	475	492	509	526	544	561	578	595	613	630	648	665	682
49	364	381	398	416	433	451	468	486	504	521	539	556	574	592	610	627	645	663	681	699
50	372	390	408	425	443	461	479	497	515	533	551	569	587	606	624	642	660	678	697	715

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.25%-Quantil

Tabelliert ist das 0.25%-Quantil $U_{m,n;\,0.0025}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	0	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	12	13	13	14	15
6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7	1	3	4	5	6	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26	27	28
8	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	23	25	27	29	30	32	34	36
9	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39	41	43
10	4	6	8	10	12	14	17	19	21	24	26	28	31	33	36	38	41	43	45	48	50
11	4	7	9	12	14	17	19	22	25	27	30	33	36	38	41	44	47	50	52	55	58
12	5	8	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	44	47	50	53	56	59	62	66
13	6	9	12	15	18	21	25	28	31	35	38	42	45	49	52	56	59	63	66	70	73
14	7	10	13	17	20	24	27	31	35	39	42	46	50	54	58	62	66	69	73	77	81
15	7	11	14	18	22	26	30	34	38	42	47	51	55	59	63	68	72	76	81	85	89
16	8	12	16	20	24	28	33	37	42	46	51	55	60	65	69	74	78	83	88	92	97
17	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
18	10	14	19	23	28	33	38	44	49	54	59	65	70	75	81	86	91	97	102	108	113
19	10	15	20	25	30	36	41	47	52	58	63	69	75	81	86	92	98	104	109	115	121
20	11	16	21	27	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98	104	111	117	123	129
21	12	17	23	29	35	41	47	53	59	66	72	78	85	91	98	104	111	118	124	131	137
22	13	18	24	30	37	43	50	56	63	69	76	83	90	97	104	111	118	124	131	138	145
23	13	19	26	32	39	45	52	59	66	73	81	88	95	102	109	117	124	131	139	146	154
24	14	20	27	34	41	48	55	62	70	77	85	92	100	108	115	123	131	138	146	154	162
25	15	21	28	36	43	50	58	66	73	81	89	97	105	113	121	129	137	145	154	162	170
26	16	23	30	37	45	53	61	69	77	85	93	102	110	119	127	135	144	153	161	170	178
27	16	24	31	39	47	55	64	72	81	89	98	106	115	124	133	142	151	160	169	177	186
28	17	25	33	41	49	58	66	75	84	93	102	111	120	129	139	148	157	167	176	185	195
29	18	26	34	43	51	60	69	78	88	97	106	116	125	135	145	154	164	174	183	193	203
30	19	27	35	44	53	63	72	82	91	101	111	121	131	140	150	161	171	181	191	201	211
31	20	28	37	46	56	65	75	85	95	105	115	125	136	146	156	167	177	188	198	209	220
32	20	29	38	48	58	68	78	88	98	109	119	130	141	151	162	173	184	195	206	217	228
33	21	30	40	50	60	70	81	91	102	113	124	135	146	157	168	179	191	202	213	225	236
34	22	31	41	51	62	73	83	94	106	117	128	139	151	162	174	186	197	209	221	233	244
35	23	32	43	53	64	75	86	98	109	121	132	144	156	168	180	192	204	216	228	241	253
36	23	33	44	55	66	77	89	101	113	125	137	149	161	174	186	198	211	223	236	248	261
37	24	35	45	57	68	80	92	104	116	129	141	154	166	179	192	205	218	230	243	256	269
38	25	36	47	58	70	82	95	107	120	133	146	158	171	185	198	211	224	238	251	264	278
39	26	37	48	60	72	85	98	110	123	137	150	163	177	190	204	217	231	245	258	272	286
40	27	38	50	62	75	87	100	114	127	141	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294
41	27	39	51	64	77	90	103	117	131	145	159	173	187	201	216	230	244	259	274	288	303
42	28	40	53	65	79	92	106	120	134	149	163	177	192	207	221	236	251	266	281	296	311
43	29	41	54	67	81	95	109	123	138	153	167	182	197	212	227	243	258	273	289	304	319
44	30	42	55	69	83	97	112	127	141	157	172	187	202	218	233	249	265	280	296	312	328
45	30	43	57	71	85	100	115	130	145	161	176	192	208	223	239	255	271	288	304	320	336
46	31	44	58	73	87	102	118	133	149	165	180	197	213	229	245	262	278	295	311	328	345
47	32	46	60	74	89	105	120	136	152	169	185	201	218	234	251	268	285	302	319	336	353
48	33	47	61	76	92	107	123	140	156	172	189	206	223	240	257	274	292	309	326	344	361
49	34	48	63	78	94	110	126	143	160	176	194	211	228	246	263	281	298	316	334	352	370
50	34	49	64	80	96	112	129	146	163	180	198	216	233	251	269	287	305	323	342	360	378

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.25%-Quantil

Tabelliert ist das 0.25%-Quantil $U_{m,n;\,0.0025}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	16	16	17	18	19	20	20	21	22	23	23	24	25	26	27	27	28	29	30	30
6	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	35	36	37	38	39	40	41	42	43
7	30	31	33	34	35	37	38	40	41	43	44	45	47	48	50	51	53	54	55	57
8	37	39	41	43	44	46	48	50	51	53	55	57	58	60	62	64	65	67	69	71
9	45	47	49	51	53	56	58	60	62	64	66	68	70	72	75	77	79	81	83	85
10	53	55	58	60	63	65	68	70	73	75	77	80	82	85	87	90	92	95	97	100
11	61	64	66	69	72	75	78	81	83	86	89	92	95	98	100	103	106	109	112	115
12	69	72	75	78	82	85	88	91	94	98	101	104	107	110	114	117	120	123	127	130
13	77	81	84	88	91	95	98	102	106	109	113	116	120	123	127	131	134	138	141	145
14	85	89	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	133	137	141	145	149	153	157	161
15	93	98	102	106	111	115	119	124	128	132	137	141	146	150	154	159	163	167	172	176
16	102	106	111	116	121	125	130	135	139	144	149	154	158	163	168	173	177	182	187	192
17	110	115	120	125	131	136	141	146	151	156	161	166	171	177	182	187	192	197	202	208
18	119	124	129	135	140	146	151	157	162	168	174	179	185	190	196	201	207	212	218	223
19	127	133	139	145	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	216	221	227	233	239
20	135	142	148	154	161	167	173	179	186	192	198	205	211	217	224	230	236	243	249	255
21	144	151	157	164	171	177	184	191	197	204	211	218	224	231	238	244	251	258	265	271
22	153	160	167	174	181	188	195	202	209	216	223	230	238	245	252	259	266	273	280	288
23	161	169	176	183	191	198	206	213	221	228	236	243	251	258	266	274	281	289	296	304
24	170	177	185	193	201	209	217	225	233	241	248	256	264	272	280	288	296	304	312	320
25	178	186	195	203	211	220	228	236	244	253	261	269	278	286	294	303	311	319	328	336
26	187	195	204	213	221	230	239	248	256	265	274	282	291	300	309	317	326	335	344	353
27	195	205	214	223	232	241	250	259	268	277	286	296	305	314	323	332	341	351	360	369
28	204	214	223	232	242	251	261	270	280	290	299	309	318	328	337	347	357	366	376	385
29	213	223	232	242	252	262	272	282	292	302	312	322	332	342	352	362	372	382	392	402
30	221	232	242	252	263	273	283	293	304	314	325	335	345	356	366	376	387	397	408	418
31	230	241	251	262	273	284	294	305	316	327	337	348	359	370	380	391	402	413	424	435
32	239	250	261	272	283	294	305	317	328	339	350	361	372	384	395	406	417	429	440	451
33	248	259	270	282	293	305	317	328	340	351	363	374	386	398	409	421	433	444	456	468
34	256	268	280	292	304	316	328	340	352	364	376	388	400	412	424	436	448	460	472	484
35	265	277	290	302	314	327	339	351	364	376	389	401	413	426	438	451	463	476	488	501
36	274	286	299	312	325	337	350	363	376	389	401	414	427	440	453	466	479	492	504	517
37	282	296	309	322	335	348	361	374	388	401	414	427	441	454	467	481	494	507	521	534
38	291	305	318	332	345	359	372	386	400	413	427	441	454	468	482	496	509	523	537	551
39	300	314	328	342	356	370	384	398	412	426	440	454	468	482	496	511	525	539	553	567
40	309	323	337	352	366	380	395	409	424	438	453	467	482	496	511	526	540	555	569	584
41	317	332	347	362	376	391	406	421	436	451	466	481	496	511	526	541	556	571	586	601
42	326	341	357	372	387	402	417	433	448	463	479	494	509	525	540	556	571	586	602	617
43	335	351	366	382	397	413	429	444	460	476	492	507	523	539	555	571	586	602	618	634
44	344	360	376	392	408	424	440	456	472	488	504	521	537	553	569	586	602	618	634	651
45	353	369	385	402	418	435	451	468	484	501	517	534	551	567	584	601	617	634	651	668
46	361	378	395	412	429	446	462	479	496	513	530	547	564	582	599	616	633	650	667	684
47	370	387	405	422	439	456	474	491	508	526	543	561	578	596	613	631	648	666	683	701
48	379	397	414	432	450	467	485	503	521	538	556	574	592	610	628	646	664	682	700	718
49	388	406	424	442	460	478	496	514	533	551	569	588	606	624	643	661	679	698	716	735
50	397	415	433	452	470	489	508	526	545	564	582	601	620	638	657	676	695	714	733	751

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.5%-Quantil

Tabelliert ist das 0.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.005}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	15	16	17	18
6	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20	22	23	24	25
7	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25	26	28	30	31	33
8	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31	33	35	36	38	40
9	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37	39	41	44	46	48
10	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43	45	48	51	53	56
11	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64
12	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55	59	62	65	69	72
13	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61	65	69	73	76	80
14	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68	72	76	80	84	88
15	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74	79	83	88	92	97
16	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80	85	90	95	100	105
17	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87	92	97	103	108	113
18	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93	99	105	110	116	122
19	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100	106	112	118	124	130
20	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106	113	119	126	132	139
21	15	20	26	33	39	45	52	59	65	72	79	85	92	99	106	113	119	126	133	140	147
22	15	22	28	35	41	48	55	62	69	76	83	90	97	105	112	119	126	134	141	148	156
23	16	23	30	36	44	51	58	65	73	80	88	95	103	110	118	126	133	141	149	156	164
24	17	24	31	38	46	53	61	69	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	165	173
25	18	25	33	40	48	56	64	72	80	88	97	105	113	122	130	139	147	156	164	173	181
26	19	26	34	42	50	59	67	75	84	93	101	110	119	128	136	145	154	163	172	181	190
27	20	28	36	44	53	61	70	79	88	97	106	115	124	133	143	152	161	170	180	189	198
28	21	29	37	46	55	64	73	82	92	101	110	120	129	139	149	158	168	178	187	197	207
29	22	30	39	48	57	67	76	86	95	105	115	125	135	145	155	165	175	185	195	205	216
30	23	31	41	50	59	69	79	89	99	109	120	130	140	151	161	171	182	192	203	214	224
31	23	33	42	52	62	72	82	93	103	114	124	135	146	156	167	178	189	200	211	222	233
32	24	34	44	54	64	75	85	96	107	118	129	140	151	162	173	185	196	207	219	230	241
33	25	35	45	56	66	77	88	99	111	122	133	145	156	168	180	191	203	215	226	238	250
34	26	36	47	58	69	80	91	103	114	126	138	150	162	174	186	198	210	222	234	246	259
35	27	38	48	60	71	83	94	106	118	130	143	155	167	180	192	204	217	230	242	255	267
36	28	39	50	61	73	85	97	110	122	135	147	160	173	185	198	211	224	237	250	263	276
37	29	40	52	63	76	88	100	113	126	139	152	165	178	191	204	218	231	244	258	271	285
38	30	41	53	65	78	91	103	117	130	143	156	170	183	197	211	224	238	252	266	279	293
39	31	42	55	67	80	93	107	120	134	147	161	175	189	203	217	231	245	259	273	288	302
40	32	44	56	69	82	96	110	123	137	151	166	180	194	209	223	238	252	267	281	296	311
41	32	45	58	71	85	99	113	127	141	156	170	185	200	214	229	244	259	274	289	304	319
42	33	46	59	73	87	101	116	130	145	160	175	190	205	220	235	251	266	282	297	313	328
43	34	47	61	75	89	104	119	134	149	164	179	195	210	226	242	257	273	289	305	321	337
44	35	49	63	77	92	107	122	137	153	168	184	200	216	232	248	264	280	297	313	329	346
45	36	50	64	79	94	109	125	141	156	173	189	205	221	238	254	271	287	304	321	337	354
46	37	51	66	81	96	112	128	144	160	177	193	210	227	243	260	277	294	311	329	346	363
47	38	52	67	83	99	115	131	147	164	181	198	215	232	249	267	284	301	319	336	354	372
48	39	54	69	85	101	117	134	151	168	185	203	220	238	255	273	291	308	326	344	362	380
49	40	55	70	87	103	120	137	154	172	189	207	225	243	261	279	297	316	334	352	371	389
50	41	56	72	89	105	123	140	158	176	194	212	230	248	267	285	304	323	341	360	379	398

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 0.5%-Quantil

Tabelliert ist das 0.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.005}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	19	20	21	22	23	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	32	33	34	35	36
6	26	28	29	30	31	33	34	35	36	38	39	40	41	42	44	45	46	47	49	50
7	34	36	37	39	41	42	44	45	47	48	50	52	53	55	56	58	59	61	63	64
8	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79
9	50	53	55	57	59	62	64	66	69	71	73	76	78	80	82	85	87	89	92	94
10	59	61	64	67	69	72	75	77	80	83	85	88	91	93	96	99	101	104	107	109
11	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100	103	107	110	113	116	119	122	125
12	75	79	82	86	89	93	96	99	103	106	110	113	117	120	123	127	130	134	137	141
13	84	88	92	95	99	103	107	111	114	118	122	126	130	134	137	141	145	149	153	156
14	93	97	101	105	109	114	118	122	126	130	135	139	143	147	151	156	160	164	168	173
15	101	106	110	115	120	124	129	133	138	143	147	152	156	161	166	170	175	179	184	189
16	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205
17	119	124	129	135	140	146	151	156	162	167	173	178	183	189	194	200	205	210	216	221
18	128	133	139	145	151	156	162	168	174	180	185	191	197	203	209	214	220	226	232	238
19	136	143	149	155	161	167	173	180	186	192	198	204	211	217	223	229	235	242	248	254
20	145	152	158	165	171	178	185	191	198	204	211	218	224	231	238	244	251	257	264	271
21	154	161	168	175	182	189	196	203	210	217	224	231	238	245	252	259	266	273	280	287
22	163	170	178	185	192	200	207	215	222	230	237	244	252	259	267	274	282	289	297	304
23	172	180	187	195	203	211	219	226	234	242	250	258	266	273	281	289	297	305	313	321
24	181	189	197	205	214	222	230	238	246	255	263	271	279	288	296	304	313	321	329	337
25	190	198	207	216	224	233	241	250	259	267	276	285	293	302	311	319	328	337	346	354
26	199	208	217	226	235	244	253	262	271	280	289	298	307	316	325	335	344	353	362	371
27	208	217	227	236	245	255	264	274	283	293	302	312	321	331	340	350	359	369	378	388
28	217	227	236	246	256	266	276	286	296	305	315	325	335	345	355	365	375	385	395	405
29	226	236	246	256	267	277	287	298	308	318	329	339	349	360	370	380	391	401	411	422
30	235	245	256	267	277	288	299	309	320	331	342	352	363	374	385	396	406	417	428	439
31	244	255	266	277	288	299	310	321	333	344	355	366	377	388	400	411	422	433	444	456
32	253	264	276	287	299	310	322	333	345	357	368	380	391	403	414	426	438	449	461	473
33	262	274	286	298	309	321	333	345	357	369	381	393	405	417	429	441	453	466	478	490
34	271	283	296	308	320	333	345	357	370	382	395	407	419	432	444	457	469	482	494	507
35	280	293	305	318	331	344	357	369	382	395	408	421	434	446	459	472	485	498	511	524
36	289	302	315	329	342	355	368	381	395	408	421	434	448	461	474	488	501	514	528	541
37	298	312	325	339	352	366	380	393	407	421	434	448	462	475	489	503	517	530	544	558
38	307	321	335	349	363	377	391	405	419	434	448	462	476	490	504	518	533	547	561	575
39	316	331	345	360	374	388	403	417	432	446	461	475	490	505	519	534	548	563	578	592
40	325	340	355	370	385	400	414	429	444	459	474	489	504	519	534	549	564	579	594	609
41	335	350	365	380	396	411	426	441	457	472	488	503	518	534	549	565	580	596	611	627
42	344	359	375	391	406	422	438	453	469	485	501	517	533	548	564	580	596	612	628	644
43	353	369	385	401	417	433	449	466	482	498	514	530	547	563	579	596	612	628	645	661
44	362	378	395	411	428	444	461	478	494	511	528	544	561	578	594	611	628	645	661	678
45	371	388	405	422	439	456	473	490	507	524	541	558	575	592	609	627	644	661	678	695
46	380	397	415	432	450	467	484	502	519	537	554	572	589	607	624	642	660	677	695	712
47	389	407	425	443	460	478	496	514	532	550	568	586	604	622	640	658	676	694	712	730
48	398	417	435	453	471	489	508	526	544	563	581	599	618	636	655	673	691	710	728	747
49	408	426	445	463	482	501	519	538	557	576	594	613	632	651	670	689	707	726	745	764
50	417	436	455	474	493	512	531	550	569	589	608	627	646	665	685	704	723	743	762	781

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 1%-Quantil

Tabelliert ist das 1%-Quantil $U_{m,n;\,0.01}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
6	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	25	27	28	30
7	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29	31	32	34	36	37
8	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	46
9	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41	44	46	49	51	54
10	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48	51	54	56	59	62
11	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54	58	61	64	67	71
12	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61	65	68	72	76	79
13	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
14	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74	79	83	88	92	96
15	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81	86	91	95	100	105
16	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88	93	98	103	109	114
17	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94	100	106	111	117	123
18	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131
19	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108	114	121	127	134	140
20	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115	122	128	135	142	149
21	18	24	31	37	44	51	58	65	72	79	86	93	100	107	114	122	129	136	143	151	158
22	19	25	32	39	46	54	61	68	76	83	91	98	106	113	121	128	136	144	151	159	167
23	20	27	34	41	49	56	64	72	80	88	95	103	111	119	127	135	143	151	159	168	176
24	21	28	36	43	51	59	67	76	84	92	100	109	117	125	134	142	151	159	168	176	185
25	22	30	37	46	54	62	71	79	88	96	105	114	123	131	140	149	158	167	176	185	193
26	23	31	39	48	56	65	74	83	92	101	110	119	128	137	147	156	165	174	184	193	202
27	24	32	41	50	59	68	77	86	96	105	115	124	134	143	153	163	172	182	192	202	211
28	25	34	43	52	61	71	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
29	26	35	44	54	64	74	84	94	104	114	124	135	145	156	166	177	187	198	208	219	229
30	27	36	46	56	66	77	87	97	108	119	129	140	151	162	173	183	194	205	216	227	238
31	28	38	48	58	69	79	90	101	112	123	134	145	157	168	179	190	202	213	224	236	247
32	29	39	50	60	71	82	93	105	116	128	139	151	162	174	186	197	209	221	233	244	256
33	30	41	51	62	74	85	97	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	229	241	253	265
34	31	42	53	65	76	88	100	112	124	136	149	161	174	186	199	211	224	236	249	262	274
35	32	43	55	67	79	91	103	116	128	141	154	166	179	192	205	218	231	244	257	270	283
36	33	45	57	69	81	94	107	119	132	145	159	172	185	198	212	225	238	252	265	279	292
37	34	46	58	71	84	97	110	123	136	150	163	177	191	204	218	232	246	260	274	287	301
38	35	47	60	73	86	100	113	127	140	154	168	182	196	210	225	239	253	267	282	296	310
39	36	49	62	75	89	102	116	130	145	159	173	188	202	217	231	246	260	275	290	305	319
40	37	50	64	77	91	105	120	134	149	163	178	193	208	223	238	253	268	283	298	313	329
41	38	52	65	79	94	108	123	138	153	168	183	198	213	229	244	260	275	291	306	322	338
42	39	53	67	82	96	111	126	141	157	172	188	203	219	235	251	267	283	299	315	331	347
43	40	54	69	84	99	114	129	145	161	177	193	209	225	241	257	274	290	306	323	339	356
44	41	56	71	86	101	117	133	149	165	181	198	214	231	247	264	281	297	314	331	348	365
45	42	57	72	88	104	120	136	152	169	186	202	219	236	253	270	287	305	322	339	356	374
46	43	59	74	90	106	123	139	156	173	190	207	225	242	259	277	294	312	330	347	365	383
47	45	60	76	92	109	126	143	160	177	195	212	230	248	266	283	301	319	337	356	374	392
48	46	61	78	94	111	128	146	163	181	199	217	235	253	272	290	308	327	345	364	382	401
49	47	63	79	96	114	131	149	167	185	204	222	241	259	278	297	315	334	353	372	391	410
50	48	64	81	99	116	134	152	171	189	208	227	246	265	284	303	322	342	361	380	400	419

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 1%-Quantil

Tabelliert ist das 1%-Quantil $U_{m,n;\,0.01}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
6	31	32	34	35	36	38	39	41	42	43	45	46	47	49	50	52	53	54	56	57
7	39	41	43	44	46	48	50	51	53	55	57	58	60	62	64	65	67	69	71	72
8	48	50	52	54	56	58	60	62	65	67	69	71	73	75	77	79	82	84	86	88
9	56	59	61	64	66	69	71	74	76	79	81	84	86	89	91	94	96	99	101	104
10	65	68	71	74	77	79	82	85	88	91	94	97	100	102	105	108	111	114	117	120
11	74	77	80	84	87	90	93	97	100	103	107	110	113	116	120	123	126	129	133	136
12	83	86	90	94	97	101	105	108	112	116	119	123	127	130	134	138	141	145	149	152
13	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	145	149	153	157	161	165	169
14	101	105	110	114	119	123	128	132	136	141	145	150	154	159	163	168	172	177	181	186
15	110	115	120	124	129	134	139	144	149	154	159	163	168	173	178	183	188	193	198	202
16	119	124	130	135	140	145	151	156	161	166	172	177	182	188	193	198	203	209	214	219
17	128	134	140	145	151	157	162	168	174	179	185	191	196	202	208	213	219	225	231	236
18	137	143	150	156	162	168	174	180	186	192	198	204	210	217	223	229	235	241	247	253
19	147	153	160	166	173	179	186	192	199	205	212	218	225	231	238	244	251	257	264	270
20	156	163	170	177	183	190	197	204	211	218	225	232	239	246	253	260	267	274	281	287
21	165	172	180	187	194	202	209	216	224	231	238	246	253	260	268	275	283	290	297	305
22	174	182	190	198	205	213	221	229	236	244	252	260	267	275	283	291	299	306	314	322
23	184	192	200	208	216	224	233	241	249	257	265	274	282	290	298	306	315	323	331	339
24	193	202	210	219	227	236	244	253	262	270	279	287	296	305	313	322	331	339	348	356
25	202	211	220	229	238	247	256	265	274	283	292	301	310	319	329	338	347	356	365	374
26	212	221	231	240	249	259	268	278	287	296	306	315	325	334	344	353	363	372	382	391
27	221	231	241	251	260	270	280	290	300	310	320	329	339	349	359	369	379	389	399	409
28	231	241	251	261	271	282	292	302	313	323	333	343	354	364	374	385	395	405	416	426
29	240	251	261	272	283	293	304	315	325	336	347	357	368	379	390	400	411	422	433	444
30	249	260	271	283	294	305	316	327	338	349	360	372	383	394	405	416	427	439	450	461
31	259	270	282	293	305	316	328	339	351	362	374	386	397	409	420	432	444	455	467	479
32	268	280	292	304	316	328	340	352	364	376	388	400	412	424	436	448	460	472	484	496
33	278	290	302	315	327	339	352	364	377	389	401	414	426	439	451	464	476	489	501	514
34	287	300	313	325	338	351	364	377	389	402	415	428	441	454	467	480	492	505	518	531
35	296	310	323	336	349	362	376	389	402	415	429	442	455	469	482	495	509	522	535	549
36	306	320	333	347	360	374	388	401	415	429	442	456	470	484	497	511	525	539	553	566
37	315	329	343	357	372	386	400	414	428	442	456	470	485	499	513	527	541	556	570	584
38	325	339	354	368	383	397	412	426	441	455	470	485	499	514	528	543	558	572	587	602
39	334	349	364	379	394	409	424	439	454	469	484	499	514	529	544	559	574	589	604	619
40	344	359	374	390	405	420	436	451	467	482	497	513	528	544	559	575	590	606	621	637
41	353	369	385	400	416	432	448	464	480	495	511	527	543	559	575	591	607	623	639	655
42	363	379	395	411	427	444	460	476	492	509	525	541	558	574	590	607	623	639	656	672
43	372	389	405	422	439	455	472	489	505	522	539	556	572	589	606	623	639	656	673	690
44	382	399	416	433	450	467	484	501	518	535	553	570	587	604	621	639	656	673	690	708
45	391	409	426	444	461	479	496	514	531	549	566	584	602	619	637	655	672	690	708	725
46	401	419	436	454	472	490	508	526	544	562	580	598	616	634	652	671	689	707	725	743
47	410	428	447	465	483	502	520	539	557	576	594	612	631	649	668	687	705	724	742	761
48	420	438	457	476	495	513	532	551	570	589	608	627	646	665	684	703	722	741	760	779
49	429	448	467	487	506	525	544	564	583	602	622	641	660	680	699	719	738	757	777	796
50	439	458	478	497	517	537	556	576	596	616	635	655	675	695	715	735	754	774	794	814

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 2.5%-Quantil

Tabelliert ist das 2.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.025}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21	23	24	25	26	28
6	4	6	7	9	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25	26	28	30	31	33	34	36
7	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
8	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42	44	46	49	51	54
9	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49	51	54	57	60	63
10	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	56	59	62	65	68	72
11	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63	66	70	74	77	81
12	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86	90
13	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77	81	86	90	95	99
14	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	84	89	94	99	103	108
15	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91	97	102	107	112	118
16	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99	104	110	116	121	127
17	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106	112	118	124	130	136
18	19	25	31	37	43	49	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120	126	133	139	146
19	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120	127	134	141	148	155
20	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128	135	142	150	157	164
21	23	30	37	44	51	59	66	74	81	89	97	104	112	120	127	135	143	151	158	166	174
22	24	31	39	46	54	62	70	78	86	94	102	110	118	126	134	142	151	159	167	175	183
23	25	33	41	49	57	65	74	82	90	99	107	116	124	133	141	150	158	167	176	184	193
24	26	34	43	51	60	68	77	86	95	103	112	121	130	139	148	157	166	175	184	193	202
25	28	36	45	54	63	72	81	90	99	108	118	127	136	146	155	164	174	183	193	202	212
26	29	38	47	56	65	75	84	94	103	113	123	133	142	152	162	172	182	192	201	211	221
27	30	39	49	58	68	78	88	98	108	118	128	138	148	159	169	179	189	200	210	220	231
28	31	41	51	61	71	81	91	102	112	123	133	144	155	165	176	187	197	208	219	229	240
29	33	43	53	63	74	84	95	106	117	128	139	150	161	172	183	194	205	216	227	239	250
30	34	44	55	66	77	88	99	110	121	132	144	155	167	178	190	201	213	224	236	248	259
31	35	46	57	68	79	91	102	114	126	137	149	161	173	185	197	209	221	233	245	257	269
32	36	47	59	70	82	94	106	118	130	142	154	167	179	191	204	216	228	241	253	266	278
33	38	49	61	73	85	97	109	122	134	147	160	172	185	198	211	223	236	249	262	275	288
34	39	51	63	75	88	100	113	126	139	152	165	178	191	204	218	231	244	257	271	284	298
35	40	52	65	78	90	104	117	130	143	157	170	184	197	211	225	238	252	266	279	293	307
36	41	54	67	80	93	107	120	134	148	162	175	189	203	217	232	246	260	274	288	302	317
37	42	56	69	82	96	110	124	138	152	166	181	195	210	224	239	253	268	282	297	312	326
38	44	57	71	85	99	113	128	142	157	171	186	201	216	231	246	260	276	291	306	321	336
39	45	59	73	87	102	116	131	146	161	176	191	207	222	237	253	268	283	299	314	330	345
40	46	60	75	90	104	120	135	150	166	181	197	212	228	244	259	275	291	307	323	339	355
41	47	62	77	92	107	123	138	154	170	186	202	218	234	250	266	283	299	315	332	348	365
42	49	64	79	94	110	126	142	158	174	191	207	224	240	257	273	290	307	324	340	357	374
43	50	65	81	97	113	129	146	162	179	196	212	229	246	263	280	298	315	332	349	366	384
44	51	67	83	99	116	132	149	166	183	200	218	235	252	270	287	305	323	340	358	376	393
45	52	68	85	102	118	136	153	170	188	205	223	241	259	277	294	312	330	349	367	385	403
46	54	70	87	104	121	139	156	174	192	210	228	247	265	283	301	320	338	357	375	394	413
47	55	72	89	106	124	142	160	178	197	215	234	252	271	290	308	327	346	365	384	403	422
48	56	73	91	109	127	145	164	182	201	220	239	258	277	296	315	335	354	373	393	412	432
49	57	75	93	111	130	148	167	186	206	225	244	264	283	303	322	342	362	382	402	421	441
50	59	77	95	114	132	152	171	190	210	230	250	269	289	309	329	350	370	390	410	431	451

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 2.5%-Quantil

Tabelliert ist das 2.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.025}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	29	30	31	33	34	35	36	38	39	40	41	42	44	45	46	47	49	50	51	52
6	38	39	41	43	44	46	47	49	51	52	54	56	57	59	60	62	64	65	67	68
7	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77	79	81	83	85
8	56	58	61	63	66	68	70	73	75	78	80	82	85	87	90	92	94	97	99	102
9	65	68	71	74	77	79	82	85	88	90	93	96	99	102	104	107	110	113	116	118
10	75	78	81	84	88	91	94	97	100	104	107	110	113	116	120	123	126	129	132	136
11	84	88	91	95	99	102	106	109	113	117	120	124	128	131	135	138	142	146	149	153
12	94	98	102	106	110	114	118	122	126	130	134	138	142	146	150	154	158	162	166	170
13	103	108	112	117	121	126	130	134	139	143	148	152	157	161	166	170	174	179	183	188
14	113	118	123	128	132	137	142	147	152	157	162	166	171	176	181	186	191	196	200	205
15	123	128	133	139	144	149	154	160	165	170	175	181	186	191	197	202	207	212	218	223
16	133	138	144	150	155	161	167	172	178	184	189	195	201	207	212	218	224	229	235	241
17	142	148	155	161	167	173	179	185	191	197	203	210	216	222	228	234	240	246	252	259
18	152	159	165	172	178	185	191	198	204	211	217	224	231	237	244	250	257	263	270	277
19	162	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232	239	246	253	259	266	273	280	287	294
20	172	179	187	194	201	209	216	223	231	238	246	253	260	268	275	283	290	298	305	312
21	182	189	197	205	213	221	228	236	244	252	260	268	276	283	291	299	307	315	323	330
22	192	200	208	216	224	233	241	249	257	266	274	282	291	299	307	315	324	332	340	349
23	201	210	219	227	236	245	253	262	271	279	288	297	306	314	323	332	340	349	358	367
24	211	220	229	239	248	257	266	275	284	293	302	312	321	330	339	348	357	366	376	385
25	221	231	240	250	259	269	278	288	298	307	317	326	336	345	355	365	374	384	393	403
26	231	241	251	261	271	281	291	301	311	321	331	341	351	361	371	381	391	401	411	421
27	241	251	262	272	283	293	303	314	324	335	345	356	366	377	387	397	408	418	429	439
28	251	262	273	283	294	305	316	327	338	349	359	370	381	392	403	414	425	436	447	458
29	261	272	283	295	306	317	329	340	351	362	374	385	396	408	419	430	442	453	464	476
30	271	283	294	306	318	329	341	353	365	376	388	400	412	423	435	447	459	471	482	494
31	281	293	305	317	329	342	354	366	378	390	402	415	427	439	451	463	476	488	500	512
32	291	303	316	329	341	354	366	379	392	404	417	429	442	455	467	480	493	505	518	531
33	301	314	327	340	353	366	379	392	405	418	431	444	457	470	483	497	510	523	536	549
34	311	324	338	351	365	378	392	405	419	432	446	459	473	486	500	513	527	540	554	567
35	321	335	349	362	376	390	404	418	432	446	460	474	488	502	516	530	544	558	572	586
36	331	345	359	374	388	402	417	431	446	460	474	489	503	517	532	546	561	575	590	604
37	341	356	370	385	400	415	429	444	459	474	489	504	518	533	548	563	578	593	608	623
38	351	366	381	396	412	427	442	457	473	488	503	518	534	549	564	580	595	610	626	641
39	361	377	392	408	423	439	455	470	486	502	517	533	549	565	580	596	612	628	644	659
40	371	387	403	419	435	451	467	483	500	516	532	548	564	580	597	613	629	645	661	678
41	381	397	414	430	447	463	480	497	513	530	546	563	580	596	613	629	646	663	679	696
42	391	408	425	442	459	476	493	510	527	544	561	578	595	612	629	646	663	680	697	715
43	401	418	436	453	471	488	505	523	540	558	575	593	610	628	645	663	680	698	715	733
44	411	429	447	464	482	500	518	536	554	572	590	608	626	644	661	679	697	715	733	752
45	421	439	458	476	494	512	531	549	567	586	604	623	641	659	678	696	715	733	752	770
46	431	450	468	487	506	525	543	562	581	600	619	637	656	675	694	713	732	751	770	788
47	441	460	479	499	518	537	556	575	595	614	633	652	672	691	710	730	749	768	788	807
48	451	471	490	510	530	549	569	588	608	628	648	667	687	707	726	746	766	786	806	825
49	461	481	501	521	541	561	581	602	622	642	662	682	702	723	743	763	783	803	824	844
50	471	492	512	533	553	574	594	615	635	656	676	697	718	738	759	780	800	821	842	862

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 5%-Quantil

Tabelliert ist das 5%-Quantil $U_{m,n;\,0.05}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26	27	29	30	31	33
6	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33	35	37	38	40	42
7	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40	42	45	47	49	51
8	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48	50	53	55	58	61
9	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70
10	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63	66	69	73	76	80
11	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70	74	78	82	86	90
12	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78	82	86	91	95	99
13	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85	90	95	99	104	109
14	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93	98	103	108	114	119
15	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101	106	112	117	123	129
16	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138
17	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116	122	129	135	142	148
18	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124	131	137	144	151	158
19	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131	139	146	153	161	168
20	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139	147	155	162	170	178
21	27	35	42	50	58	66	74	82	90	98	106	114	122	131	139	147	155	163	171	180	188
22	29	37	45	53	61	69	78	86	95	103	112	120	129	137	146	155	163	172	180	189	198
23	30	38	47	55	64	73	82	91	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	190	199	208
24	31	40	49	58	67	76	86	95	104	114	123	132	142	151	161	170	180	189	199	208	218
25	33	42	51	61	70	80	90	99	109	119	129	138	148	158	168	178	188	198	208	218	228
26	34	44	54	63	73	83	93	104	114	124	134	144	155	165	175	186	196	206	217	227	238
27	36	46	56	66	76	87	97	108	118	129	140	150	161	172	183	193	204	215	226	237	248
28	37	47	58	69	79	90	101	112	123	134	145	157	168	179	190	201	213	224	235	246	258
29	39	49	60	71	83	94	105	117	128	139	151	163	174	186	197	209	221	232	244	256	268
30	40	51	62	74	86	97	109	121	133	145	157	169	181	193	205	217	229	241	253	265	278
31	41	53	65	77	89	101	113	125	137	150	162	175	187	200	212	225	237	250	262	275	288
32	43	55	67	79	92	104	117	129	142	155	168	181	194	207	219	232	245	258	272	285	298
33	44	57	69	82	95	108	121	134	147	160	173	187	200	213	227	240	254	267	281	294	308
34	46	58	71	85	98	111	125	138	152	165	179	193	207	220	234	248	262	276	290	304	318
35	47	60	74	87	101	115	129	142	157	171	185	199	213	227	242	256	270	285	299	313	328
36	49	62	76	90	104	118	132	147	161	176	190	205	220	234	249	264	278	293	308	323	338
37	50	64	78	92	107	122	136	151	166	181	196	211	226	241	256	272	287	302	317	332	348
38	51	66	80	95	110	125	140	155	171	186	202	217	233	248	264	279	295	311	326	342	358
39	53	68	83	98	113	129	144	160	176	191	207	223	239	255	271	287	303	319	336	352	368
40	54	69	85	100	116	132	148	164	180	197	213	229	246	262	279	295	312	328	345	361	378
41	56	71	87	103	119	136	152	168	185	202	218	235	252	269	286	303	320	337	354	371	388
42	57	73	89	106	122	139	156	173	190	207	224	241	259	276	293	311	328	346	363	381	398
43	59	75	92	108	125	143	160	177	195	212	230	247	265	283	301	319	336	354	372	390	408
44	60	77	94	111	128	146	164	182	199	217	235	253	272	290	308	326	345	363	381	400	418
45	61	79	96	114	132	150	168	186	204	223	241	260	278	297	315	334	353	372	391	409	428
46	63	80	98	116	135	153	172	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	400	419	438
47	64	82	100	119	138	156	175	195	214	233	252	272	291	311	330	350	369	389	409	429	448
48	66	84	103	122	141	160	179	199	218	238	258	278	298	318	338	358	378	398	418	438	458
49	67	86	105	124	144	163	183	203	223	243	264	284	304	325	345	366	386	407	427	448	468
50	69	88	107	127	147	167	187	208	228	249	269	290	311	332	352	373	394	415	436	457	479

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 5%-Quantil

Tabelliert ist das 5%-Quantil $U_{m,n;\,0.05}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	34	36	37	39	40	41	43	44	46	47	49	50	51	53	54	56	57	59	60	61
6	44	46	47	49	51	53	55	57	58	60	62	64	66	68	69	71	73	75	77	79
7	54	56	58	60	62	65	67	69	71	74	76	78	80	83	85	87	89	92	94	96
8	63	66	69	71	74	77	79	82	85	87	90	92	95	98	100	103	106	108	111	114
9	73	76	79	83	86	89	92	95	98	101	104	107	110	113	116	119	122	125	128	132
10	83	87	90	94	97	101	104	108	111	115	118	122	125	129	132	136	139	143	146	150
11	93	97	101	105	109	113	117	121	125	129	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168
12	104	108	112	117	121	125	129	134	138	142	147	151	155	160	164	168	173	177	182	186
13	114	118	123	128	133	137	142	147	152	157	161	166	171	176	180	185	190	195	199	204
14	124	129	134	139	145	150	155	160	165	171	176	181	186	191	197	202	207	212	217	223
15	134	140	145	151	157	162	168	173	179	185	190	196	202	207	213	218	224	230	235	241
16	144	150	157	163	169	175	181	187	193	199	205	211	217	223	229	235	241	247	253	260
17	155	161	168	174	181	187	194	200	207	213	220	226	233	239	246	252	259	265	272	278
18	165	172	179	186	193	200	207	213	220	227	234	241	248	255	262	269	276	283	290	297
19	175	183	190	197	205	212	219	227	234	242	249	256	264	271	279	286	293	301	308	315
20	186	193	201	209	217	225	232	240	248	256	264	272	279	287	295	303	311	319	326	334
21	196	204	213	221	229	237	245	254	262	270	278	287	295	303	312	320	328	336	345	353
22	206	215	224	232	241	250	258	267	276	285	293	302	311	319	328	337	346	354	363	372
23	217	226	235	244	253	262	272	281	290	299	308	317	326	336	345	354	363	372	381	391
24	227	237	246	256	265	275	285	294	304	313	323	332	342	352	361	371	381	390	400	409
25	238	248	258	268	278	288	298	308	318	328	338	348	358	368	378	388	398	408	418	428
26	248	258	269	279	290	300	311	321	332	342	353	363	374	384	395	405	416	426	437	447
27	258	269	280	291	302	313	324	335	346	357	367	378	389	400	411	422	433	444	455	466
28	269	280	292	303	314	326	337	348	360	371	382	394	405	417	428	439	451	462	474	485
29	279	291	303	315	326	338	350	362	374	385	397	409	421	433	445	456	468	480	492	504
30	290	302	314	326	339	351	363	375	388	400	412	424	437	449	461	474	486	498	511	523
31	300	313	326	338	351	364	376	389	402	414	427	440	453	465	478	491	504	516	529	542
32	311	324	337	350	363	376	389	403	416	429	442	455	468	482	495	508	521	534	548	561
33	321	335	348	362	375	389	403	416	430	443	457	471	484	498	512	525	539	552	566	580
34	332	346	360	374	388	402	416	430	444	458	472	486	500	514	528	542	556	571	585	599
35	342	357	371	385	400	414	429	443	458	472	487	501	516	530	545	560	574	589	603	618
36	353	367	382	397	412	427	442	457	472	487	502	517	532	547	562	577	592	607	622	637
37	363	378	394	409	424	440	455	471	486	501	517	532	548	563	579	594	609	625	640	656
38	374	389	405	421	437	453	468	484	500	516	532	548	564	579	595	611	627	643	659	675
39	384	400	417	433	449	465	482	498	514	530	547	563	579	596	612	629	645	661	678	694
40	395	411	428	445	461	478	495	512	528	545	562	579	595	612	629	646	663	679	696	713
41	405	422	439	456	474	491	508	525	542	560	577	594	611	629	646	663	680	698	715	732
42	416	433	451	468	486	504	521	539	556	574	592	609	627	645	663	680	698	716	734	751
43	426	444	462	480	498	516	534	552	571	589	607	625	643	661	679	698	716	734	752	770
44	437	455	474	492	511	529	548	566	585	603	622	640	659	678	696	715	734	752	771	789
45	447	466	485	504	523	542	561	580	599	618	637	656	675	694	713	732	751	770	789	809
46	458	477	496	516	535	555	574	593	613	632	652	671	691	710	730	749	769	789	808	828
47	468	488	508	528	547	567	587	607	627	647	667	687	707	727	747	767	787	807	827	847
48	479	499	519	539	560	580	600	621	641	662	682	702	723	743	764	784	805	825	845	866
49	489	510	531	551	572	593	614	634	655	676	697	718	739	760	780	801	822	843	864	885
50	500	521	542	563	584	606	627	648	669	691	712	733	755	776	797	819	840	861	883	904

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 95%-Quantil

Tabelliert ist das 95%-Quantil $U_{m,n;\,0.95}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	20	24	28	31	35	38	42	46	49	53	56	60	64	67	71	74	78	81	85	89	92
6	24	28	33	37	41	45	49	54	58	62	66	70	75	79	83	87	91	95	100	104	108
7	28	33	37	42	47	52	57	62	66	71	76	81	85	90	95	100	105	109	114	119	124
8	31	37	42	48	53	59	64	69	75	80	86	91	96	102	107	112	118	123	129	134	139
9	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	155
10	38	45	52	59	65	72	78	85	92	98	105	111	118	124	131	137	144	151	157	164	170
11	42	49	57	64	71	78	86	93	100	107	114	121	129	136	143	150	157	164	171	178	185
12	46	54	62	69	77	85	93	101	108	116	124	131	139	147	155	162	170	178	185	193	201
13	49	58	66	75	83	92	100	108	117	125	133	142	150	158	166	175	183	191	200	208	216
14	53	62	71	80	89	98	107	116	125	134	143	152	160	169	178	187	196	205	214	222	231
15	56	66	76	86	95	105	114	124	133	143	152	162	171	181	190	199	209	218	228	237	246
16	60	70	81	91	101	111	121	131	142	152	162	172	182	192	202	212	222	232	242	252	262
17	64	75	85	96	107	118	129	139	150	160	171	182	192	203	213	224	235	245	256	266	277
18	67	79	90	102	113	124	136	147	158	169	181	192	203	214	225	236	247	259	270	281	292
19	71	83	95	107	119	131	143	155	166	178	190	202	213	225	237	249	260	272	284	295	307
20	74	87	100	112	125	137	150	162	175	187	199	212	224	236	249	261	273	285	298	310	322
21	78	91	105	118	131	144	157	170	183	196	209	222	235	247	260	273	286	299	312	324	337
22	81	95	109	123	137	151	164	178	191	205	218	232	245	259	272	285	299	312	326	339	352
23	85	100	114	129	143	157	171	185	200	214	228	242	256	270	284	298	312	326	339	353	367
24	89	104	119	134	149	164	178	193	208	222	237	252	266	281	295	310	324	339	353	368	382
25	92	108	124	139	155	170	185	201	216	231	246	262	277	292	307	322	337	352	367	382	397
26	96	112	128	145	161	177	193	208	224	240	256	272	287	303	319	334	350	366	381	397	412
27	99	116	133	150	167	183	200	216	233	249	265	282	298	314	330	347	363	379	395	411	427
28	103	121	138	155	173	190	207	224	241	258	275	291	308	325	342	359	375	392	409	426	442
29	106	125	143	161	178	196	214	231	249	267	284	301	319	336	354	371	388	406	423	440	457
30	110	129	148	166	184	203	221	239	257	275	293	311	329	347	365	383	401	419	437	455	472
31	114	133	152	171	190	209	228	247	266	284	303	321	340	358	377	395	414	432	451	469	487
32	117	137	157	177	196	216	235	255	274	293	312	331	350	369	389	408	427	446	464	483	502
33	121	141	162	182	202	222	242	262	282	302	322	341	361	381	400	420	439	459	478	498	517
34	124	146	167	187	208	229	249	270	290	311	331	351	371	392	412	432	452	472	492	512	532
35	128	150	171	193	214	235	256	278	298	319	340	361	382	403	423	444	465	485	506	527	547
36	131	154	176	198	220	242	264	285	307	328	350	371	392	414	435	456	478	499	520	541	562
37	135	158	181	204	226	248	271	293	315	337	359	381	403	425	447	468	490	512	534	556	577
38	139	162	186	209	232	255	278	301	323	346	368	391	413	436	458	481	503	525	548	570	592
39	142	166	190	214	238	261	285	308	331	355	378	401	424	447	470	493	516	539	561	584	607
40	146	171	195	220	244	268	292	316	340	363	387	411	434	458	481	505	528	552	575	599	622
41	149	175	200	225	250	274	299	324	348	372	397	421	445	469	493	517	541	565	589	613	637
42	153	179	205	230	256	281	306	331	356	381	406	431	455	480	505	529	554	578	603	627	652
43	156	183	209	236	262	287	313	339	364	390	415	441	466	491	516	541	567	592	617	642	667
44	160	187	214	241	268	294	320	346	373	399	425	451	476	502	528	554	579	605	631	656	682
45	164	191	219	246	273	300	327	354	381	407	434	460	487	513	540	566	592	618	644	671	697
46	167	196	224	252	279	307	334	362	389	416	443	470	497	524	551	578	605	632	658	685	712
47	171	200	229	257	285	314	342	369	397	425	453	480	508	535	563	590	618	645	672	699	727
48	174	204	233	262	291	320	349	377	406	434	462	490	518	546	574	602	630	658	686	714	742
49	178	208	238	268	297	327	356	385	414	443	471	500	529	557	586	614	643	671	700	728	757
50	181	212	243	273	303	333	363	392	422	451	481	510	539	568	598	627	656	685	714	743	771

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 95%-Quantil

Tabelliert ist das 95%-Quantil $U_{m,n;\,0.95}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	96	99	103	106	110	114	117	121	124	128	131	135	139	142	146	149	153	156	160	164
6	112	116	121	125	129	133	137	141	146	150	154	158	162	166	171	175	179	183	187	191
7	128	133	138	143	148	152	157	162	167	171	176	181	186	190	195	200	205	209	214	219
8	145	150	155	161	166	171	177	182	187	193	198	204	209	214	220	225	230	236	241	246
9	161	167	173	178	184	190	196	202	208	214	220	226	232	238	244	250	256	262	268	273
10	177	183	190	196	203	209	216	222	229	235	242	248	255	261	268	274	281	287	294	300
11	193	200	207	214	221	228	235	242	249	256	264	271	278	285	292	299	306	313	320	327
12	208	216	224	231	239	247	255	262	270	278	285	293	301	308	316	324	331	339	346	354
13	224	233	241	249	257	266	274	282	290	298	307	315	323	331	340	348	356	364	373	381
14	240	249	258	267	275	284	293	302	311	319	328	337	346	355	363	372	381	390	399	407
15	256	265	275	284	293	303	312	322	331	340	350	359	368	378	387	397	406	415	425	434
16	272	282	291	301	311	321	331	341	351	361	371	381	391	401	411	421	431	441	451	460
17	287	298	308	319	329	340	350	361	371	382	392	403	413	424	434	445	455	466	476	487
18	303	314	325	336	347	358	369	381	392	403	414	425	436	447	458	469	480	491	502	513
19	319	330	342	354	365	377	389	400	412	423	435	447	458	470	481	493	505	516	528	540
20	334	347	359	371	383	395	408	420	432	444	456	468	481	493	505	517	529	541	554	566
21	350	363	375	388	401	414	427	439	452	465	478	490	503	516	528	541	554	567	579	592
22	366	379	392	406	419	432	446	459	472	485	499	512	525	539	552	565	578	592	605	618
23	381	395	409	423	437	451	464	478	492	506	520	534	548	561	575	589	603	617	631	644
24	397	411	426	440	455	469	483	498	512	527	541	556	570	584	599	613	627	642	656	671
25	412	427	442	457	472	487	502	517	532	547	562	577	592	607	622	637	652	667	682	697
26	428	444	459	475	490	506	521	537	552	568	583	599	614	630	645	661	676	692	707	723
27	444	460	476	492	508	524	540	556	572	588	605	621	637	653	669	685	701	717	733	749
28	459	476	492	509	526	542	559	576	592	609	626	642	659	675	692	709	725	742	758	775
29	475	492	509	526	544	561	578	595	612	630	647	664	681	698	715	733	750	767	784	801
30	490	508	526	544	561	579	597	615	632	650	668	686	703	721	739	756	774	792	809	827
31	506	524	542	561	579	597	616	634	652	671	689	707	725	744	762	780	798	817	835	853
32	521	540	559	578	597	616	635	653	672	691	710	729	748	766	785	804	823	842	860	879
33	537	556	576	595	615	634	653	673	692	712	731	750	770	789	808	828	847	867	886	905
34	552	572	592	612	632	652	672	692	712	732	752	772	792	812	832	852	872	891	911	931
35	568	588	609	630	650	671	691	712	732	753	773	794	814	835	855	875	896	916	937	957
36	583	605	626	647	668	689	710	731	752	773	794	815	836	857	878	899	920	941	962	983
37	599	621	642	664	686	707	729	750	772	794	815	837	858	880	901	923	945	966	988	1009
38	614	637	659	681	703	725	748	770	792	814	836	858	880	903	925	947	969	991	1013	1035
39	630	653	675	698	721	744	766	789	812	835	857	880	903	925	948	970	993	1016	1038	1061
40	645	669	692	715	739	762	785	808	832	855	878	901	925	948	971	994	1017	1041	1064	1087
41	661	685	709	733	756	780	804	828	852	875	899	923	947	970	994	1018	1042	1065	1089	1113
42	676	701	725	750	774	798	823	847	872	896	920	945	969	993	1017	1042	1066	1090	1114	1139
43	692	717	742	767	792	817	842	867	891	916	941	966	991	1016	1041	1065	1090	1115	1140	1165
44	707	733	758	784	809	835	860	886	911	937	962	988	1013	1038	1064	1089	1114	1140	1165	1191
45	723	749	775	801	827	853	879	905	931	957	983	1009	1035	1061	1087	1113	1139	1165	1191	1216
46	738	765	792	818	845	871	898	925	951	978	1004	1031	1057	1084	1110	1137	1163	1189	1216	1242
47	754	781	808	835	863	890	917	944	971	998	1025	1052	1079	1106	1133	1160	1187	1214	1241	1268
48	769	797	825	853	880	908	936	963	991	1018	1046	1074	1101	1129	1156	1184	1211	1239	1267	1294
49	785	813	841	870	898	926	954	983	1011	1039	1067	1095	1123	1151	1180	1208	1236	1264	1292	1320
50	800	829	858	887	916	944	973	1002	1031	1059	1088	1117	1145	1174	1203	1231	1260	1289	1317	1346

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 97.5%-Quantil

Tabelliert ist das 97.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.975}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	22	26	29	33	37	41	45	48	52	56	60	64	67	71	75	79	82	86	90	94	97
6	26	30	35	39	43	48	52	57	61	66	70	74	79	83	88	92	96	101	105	110	114
7	29	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
8	33	39	45	50	56	62	68	73	79	85	90	96	101	107	113	118	124	130	135	141	146
9	37	43	50	56	63	69	75	81	88	94	100	106	113	119	125	131	138	144	150	156	162
10	41	48	55	62	69	76	83	90	96	103	110	117	124	131	137	144	151	158	165	172	178
11	45	52	60	68	75	83	90	98	105	113	120	128	135	142	150	157	165	172	179	187	194
12	48	57	65	73	81	90	98	106	114	122	130	138	146	154	162	170	178	186	194	202	210
13	52	61	70	79	88	96	105	114	123	131	140	148	157	166	174	183	192	200	209	217	226
14	56	66	75	85	94	103	113	122	131	140	150	159	168	177	187	196	205	214	223	233	242
15	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	169	179	189	199	209	218	228	238	248	257
16	64	74	85	96	106	117	128	138	148	159	169	180	190	201	211	221	232	242	252	263	273
17	67	79	90	101	113	124	135	146	157	168	179	190	201	212	223	234	245	256	267	278	289
18	71	83	95	107	119	131	142	154	166	177	189	201	212	224	235	247	258	270	281	293	304
19	75	88	100	113	125	137	150	162	174	187	199	211	223	235	247	260	272	284	296	308	320
20	79	92	105	118	131	144	157	170	183	196	209	221	234	247	260	272	285	298	310	323	336
21	82	96	110	124	138	151	165	178	192	205	218	232	245	258	272	285	298	311	325	338	351
22	86	101	115	130	144	158	172	186	200	214	228	242	256	270	284	298	311	325	339	353	367
23	90	105	120	135	150	165	179	194	209	223	238	252	267	281	296	310	325	339	353	368	382
24	94	110	125	141	156	172	187	202	217	233	248	263	278	293	308	323	338	353	368	383	398
25	97	114	130	146	162	178	194	210	226	242	257	273	289	304	320	336	351	367	382	398	413
26	101	118	135	152	169	185	202	218	235	251	267	283	300	316	332	348	364	380	397	413	429
27	105	123	140	158	175	192	209	226	243	260	277	294	311	327	344	361	378	394	411	428	444
28	109	127	145	163	181	199	217	234	252	269	287	304	321	339	356	373	391	408	425	443	460
29	112	131	150	169	187	206	224	242	260	278	296	314	332	350	368	386	404	422	440	457	475
30	116	136	155	174	193	212	231	250	269	288	306	325	343	362	380	399	417	436	454	472	491
31	120	140	160	180	200	219	239	258	277	297	316	335	354	373	392	411	430	449	468	487	506
32	124	145	165	186	206	226	246	266	286	306	326	345	365	385	404	424	444	463	483	502	522
33	127	149	170	191	212	233	254	274	295	315	335	356	376	396	416	437	457	477	497	517	537
34	131	153	175	197	218	240	261	282	303	324	345	366	387	408	428	449	470	491	511	532	552
35	135	158	180	202	225	246	268	290	312	333	355	376	398	419	440	462	483	504	526	547	568
36	139	162	185	208	231	253	276	298	320	342	365	387	409	431	452	474	496	518	540	562	583
37	143	166	190	214	237	260	283	306	329	352	374	397	419	442	464	487	509	532	554	576	599
38	146	171	195	219	243	267	290	314	337	361	384	407	430	453	476	500	522	545	568	591	614
39	150	175	200	225	249	274	298	322	346	370	394	417	441	465	488	512	536	559	583	606	630
40	154	180	205	230	256	280	305	330	354	379	403	428	452	476	501	525	549	573	597	621	645
41	158	184	210	236	262	287	313	338	363	388	413	438	463	488	513	537	562	587	611	636	660
42	161	188	215	242	268	294	320	346	372	397	423	448	474	499	525	550	575	600	626	651	676
43	165	193	220	247	274	301	327	354	380	406	433	459	485	511	537	562	588	614	640	666	691
44	169	197	225	253	280	308	335	362	389	416	442	469	496	522	549	575	601	628	654	680	707
45	173	202	230	258	287	314	342	370	397	425	452	479	506	533	561	588	615	641	668	695	722
46	176	206	235	264	293	321	350	378	406	434	462	489	517	545	573	600	628	655	683	710	737
47	180	210	240	270	299	328	357	386	414	443	471	500	528	556	585	613	641	669	697	725	753
48	184	215	245	275	305	335	364	394	423	452	481	510	539	568	597	625	654	683	711	740	768
49	188	219	250	281	311	342	372	402	431	461	491	520	550	579	609	638	667	696	725	755	784
50	191	223	255	286	318	348	379	410	440	470	500	531	561	591	621	650	680	710	740	769	799

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 97.5%-Quantil

Tabelliert ist das 97.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.975}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	101	105	109	112	116	120	124	127	131	135	139	143	146	150	154	158	161	165	169	173
6	118	123	127	131	136	140	145	149	153	158	162	166	171	175	180	184	188	193	197	202
7	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	205	210	215	220	225	230
8	152	158	163	169	174	180	186	191	197	202	208	214	219	225	230	236	242	247	253	258
9	169	175	181	187	193	200	206	212	218	225	231	237	243	249	256	262	268	274	280	287
10	185	192	199	206	212	219	226	233	240	246	253	260	267	274	280	287	294	301	308	314
11	202	209	217	224	231	239	246	254	261	268	276	283	290	298	305	313	320	327	335	342
12	218	226	234	242	250	258	266	274	282	290	298	306	314	322	330	338	346	354	362	370
13	235	243	252	260	269	277	286	295	303	312	320	329	337	346	354	363	372	380	389	397
14	251	260	269	278	288	297	306	315	324	333	342	352	361	370	379	388	397	406	416	425
15	267	277	287	296	306	316	326	335	345	355	365	374	384	394	403	413	423	433	442	452
16	283	294	304	314	325	335	345	356	366	376	387	397	407	417	428	438	448	459	469	479
17	300	311	321	332	343	354	365	376	387	398	409	419	430	441	452	463	474	485	496	506
18	316	327	339	350	362	373	385	396	408	419	431	442	453	465	476	488	499	511	522	533
19	332	344	356	368	380	392	404	416	428	440	452	464	476	488	501	513	525	537	549	561
20	348	361	373	386	399	411	424	437	449	462	474	487	500	512	525	537	550	562	575	588
21	364	378	391	404	417	430	444	457	470	483	496	509	522	536	549	562	575	588	601	615
22	380	394	408	422	436	449	463	477	491	504	518	532	545	559	573	587	600	614	628	641
23	397	411	425	440	454	468	483	497	511	526	540	554	568	583	597	611	626	640	654	668
24	413	428	443	457	472	487	502	517	532	547	562	576	591	606	621	636	651	666	680	695
25	429	444	460	475	491	506	522	537	552	568	583	599	614	630	645	660	676	691	707	722
26	445	461	477	493	509	525	541	557	573	589	605	621	637	653	669	685	701	717	733	749
27	461	478	494	511	527	544	561	577	594	610	627	643	660	676	693	710	726	743	759	776
28	477	494	511	529	546	563	580	597	614	631	649	666	683	700	717	734	751	768	785	802
29	493	511	529	546	564	582	599	617	635	653	670	688	706	723	741	759	776	794	812	829
30	509	527	546	564	582	601	619	637	655	674	692	710	728	747	765	783	801	819	838	856
31	525	544	563	582	601	619	638	657	676	695	714	732	751	770	789	808	826	845	864	883
32	541	561	580	599	619	638	658	677	696	716	735	755	774	793	813	832	851	871	890	909
33	557	577	597	617	637	657	677	697	717	737	757	777	797	817	837	856	876	896	916	936
34	573	594	614	635	655	676	696	717	737	758	778	799	819	840	860	881	901	922	942	963
35	589	610	631	653	674	695	716	737	758	779	800	821	842	863	884	905	926	947	968	989
36	605	627	649	670	692	714	735	757	778	800	822	843	865	887	908	930	951	973	994	1016
37	621	643	666	688	710	732	755	777	799	821	843	865	888	910	932	954	976	998	1020	1042
38	637	660	683	706	728	751	774	797	819	842	865	888	910	933	956	978	1001	1024	1046	1069
39	653	676	700	723	747	770	793	817	840	863	887	910	933	956	980	1003	1026	1049	1072	1096
40	669	693	717	741	765	789	813	837	860	884	908	932	956	980	1003	1027	1051	1075	1099	1122
41	685	710	734	759	783	808	832	856	881	905	930	954	978	1003	1027	1052	1076	1100	1125	1149
42	701	726	751	776	801	826	851	876	901	926	951	976	1001	1026	1051	1076	1101	1126	1151	1175
43	717	743	768	794	819	845	871	896	922	947	973	998	1024	1049	1075	1100	1126	1151	1177	1202
44	733	759	785	812	838	864	890	916	942	968	994	1020	1046	1072	1099	1125	1151	1177	1203	1228
45	749	776	802	829	856	883	909	936	963	989	1016	1042	1069	1096	1122	1149	1175	1202	1228	1255
46	765	792	820	847	874	901	929	956	983	1010	1037	1065	1092	1119	1146	1173	1200	1227	1254	1282
47	781	809	837	864	892	920	948	976	1003	1031	1059	1087	1114	1142	1170	1197	1225	1253	1280	1308
48	797	825	854	882	910	939	967	996	1024	1052	1080	1109	1137	1165	1194	1222	1250	1278	1306	1335
49	813	842	871	900	929	958	987	1015	1044	1073	1102	1131	1160	1188	1217	1246	1275	1304	1332	1361
50	829	858	888	917	947	976	1006	1035	1065	1094	1124	1153	1182	1212	1241	1270	1300	1329	1358	1388

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99%-Quantil

Tabelliert ist das 99%-Quantil $U_{m,n;\,0.99}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	63	67	71	75	79	83	87	91	95	99	103
6	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	74	79	83	88	93	97	102	107	111	116	120
7	31	37	42	48	53	58	64	69	74	80	85	90	95	101	106	111	116	122	127	132	138
8	35	41	48	54	60	66	72	78	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	149	154
9	39	46	53	60	66	73	80	86	93	99	106	112	119	125	132	139	145	152	158	165	171
10	43	51	58	66	73	80	87	95	102	109	116	123	131	138	145	152	159	166	174	181	188
11	47	56	64	72	80	87	95	103	111	119	127	134	142	150	158	166	173	181	189	197	204
12	51	60	69	78	86	95	103	112	120	129	137	145	154	162	171	179	187	196	204	212	221
13	55	65	74	83	93	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201	210	219	228	237
14	59	70	80	89	99	109	119	129	138	148	158	167	177	186	196	206	215	225	234	244	254
15	63	74	85	95	106	116	127	137	147	158	168	178	188	199	209	219	229	239	250	260	270
16	67	79	90	101	112	123	134	145	156	167	178	189	200	211	221	232	243	254	265	275	286
17	71	83	95	107	119	131	142	154	165	177	188	200	211	223	234	246	257	268	280	291	302
18	75	88	101	113	125	138	150	162	174	186	199	211	223	235	247	259	271	283	295	307	319
19	79	93	106	119	132	145	158	171	183	196	209	221	234	247	259	272	285	297	310	322	335
20	83	97	111	125	139	152	166	179	192	206	219	232	246	259	272	285	298	312	325	338	351
21	87	102	116	131	145	159	173	187	201	215	229	243	257	271	285	298	312	326	340	353	367
22	91	107	122	137	152	166	181	196	210	225	239	254	268	283	297	312	326	340	355	369	383
23	95	111	127	143	158	174	189	204	219	234	250	265	280	295	310	325	340	355	370	384	399
24	99	116	132	149	165	181	197	212	228	244	260	275	291	307	322	338	353	369	384	400	415
25	103	120	138	154	171	188	204	221	237	254	270	286	302	319	335	351	367	383	399	415	432
26	107	125	143	160	178	195	212	229	246	263	280	297	314	331	347	364	381	398	414	431	448
27	111	130	148	166	184	202	220	238	255	273	290	308	325	343	360	377	395	412	429	446	464
28	115	134	153	172	191	209	228	246	264	282	300	318	336	354	372	390	408	426	444	462	480
29	119	139	159	178	197	216	235	254	273	292	311	329	348	366	385	403	422	440	459	477	496
30	123	144	164	184	204	223	243	263	282	301	321	340	359	378	397	417	436	455	474	493	512
31	127	148	169	190	210	231	251	271	291	311	331	351	370	390	410	430	449	469	489	508	528
32	131	153	174	196	217	238	259	279	300	320	341	361	382	402	422	443	463	483	503	524	544
33	135	157	180	202	223	245	266	288	309	330	351	372	393	414	435	456	477	497	518	539	560
34	139	162	185	207	230	252	274	296	318	340	361	383	404	426	447	469	490	512	533	554	576
35	143	167	190	213	236	259	282	304	327	349	371	394	416	438	460	482	504	526	548	570	592
36	147	171	195	219	243	266	289	313	336	359	381	404	427	450	472	495	518	540	563	585	608
37	151	176	201	225	249	273	297	321	345	368	392	415	438	462	485	508	531	554	577	601	624
38	155	181	206	231	256	280	305	329	354	378	402	426	450	474	497	521	545	569	592	616	640
39	159	185	211	237	262	288	313	338	362	387	412	436	461	485	510	534	559	583	607	631	656
40	163	190	216	243	269	295	320	346	371	397	422	447	472	497	522	547	572	597	622	647	671
41	167	194	222	249	275	302	328	354	380	406	432	458	484	509	535	560	586	611	637	662	687
42	171	199	227	254	282	309	336	363	389	416	442	469	495	521	547	573	599	625	651	677	703
43	175	204	232	260	288	316	344	371	398	425	452	479	506	533	560	586	613	640	666	693	719
44	179	208	237	266	295	323	351	379	407	435	462	490	517	545	572	599	627	654	681	708	735
45	183	213	243	272	301	330	359	388	416	444	473	501	529	557	585	613	640	668	696	724	751
46	187	217	248	278	308	337	367	396	425	454	483	511	540	569	597	626	654	682	711	739	767
47	190	222	253	284	314	344	374	404	434	463	493	522	551	580	610	639	668	697	725	754	783
48	194	227	258	290	321	352	382	413	443	473	503	533	563	592	622	652	681	711	740	770	799
49	198	231	264	296	327	359	390	421	452	482	513	543	574	604	634	665	695	725	755	785	815
50	202	236	269	301	334	366	398	429	461	492	523	554	585	616	647	678	708	739	770	800	831

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99%-Quantil

Tabelliert ist das 99%-Quantil $U_{m,n;\,0.99}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	107	111	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159	163	167	171	175	179	183
6	125	130	134	139	144	148	153	157	162	167	171	176	181	185	190	194	199	204	208	213
7	143	148	153	159	164	169	174	180	185	190	195	201	206	211	216	222	227	232	237	243
8	160	166	172	178	184	190	196	202	207	213	219	225	231	237	243	249	254	260	266	272
9	178	184	191	197	204	210	217	223	230	236	243	249	256	262	269	275	282	288	295	301
10	195	202	209	216	223	231	238	245	252	259	266	273	280	288	295	302	309	316	323	330
11	212	220	228	235	243	251	259	266	274	282	289	297	305	313	320	328	336	344	351	359
12	229	238	246	254	263	271	279	288	296	304	313	321	329	338	346	354	363	371	379	388
13	246	255	264	273	282	291	300	309	318	327	336	345	354	362	371	380	389	398	407	416
14	263	273	282	292	301	311	320	330	340	349	359	368	378	387	397	406	416	425	435	444
15	280	290	300	311	321	331	341	351	361	371	381	392	402	412	422	432	442	452	462	473
16	297	308	318	329	340	351	361	372	383	394	404	415	426	436	447	458	469	479	490	501
17	314	325	336	348	359	370	382	393	404	416	427	438	450	461	472	484	495	506	517	529
18	331	343	354	366	378	390	402	414	426	438	450	462	474	485	497	509	521	533	545	557
19	347	360	372	385	397	410	422	435	447	460	472	485	497	510	522	535	547	560	572	585
20	364	377	390	403	417	430	443	456	469	482	495	508	521	534	547	560	573	586	599	613
21	381	395	408	422	436	449	463	477	490	504	518	531	545	559	572	586	599	613	627	640
22	398	412	426	440	455	469	483	497	512	526	540	554	569	583	597	611	625	640	654	668
23	414	429	444	459	474	489	503	518	533	548	563	577	592	607	622	637	651	666	681	696
24	431	446	462	477	493	508	524	539	554	570	585	601	616	631	647	662	677	693	708	724
25	448	464	480	496	512	528	544	560	576	592	608	624	640	656	671	687	703	719	735	751
26	464	481	497	514	531	547	564	580	597	614	630	647	663	680	696	713	729	746	762	779
27	481	498	515	532	550	567	584	601	618	635	652	670	687	704	721	738	755	772	789	806
28	497	515	533	551	569	586	604	622	639	657	675	693	710	728	746	763	781	799	816	834
29	514	532	551	569	587	606	624	642	661	679	697	716	734	752	770	789	807	825	843	861
30	531	550	569	587	606	625	644	663	682	701	720	738	757	776	795	814	833	851	870	889
31	547	567	586	606	625	645	664	684	703	723	742	761	781	800	820	839	858	878	897	916
32	564	584	604	624	644	664	684	704	724	744	764	784	804	824	844	864	884	904	924	944
33	580	601	622	642	663	684	704	725	745	766	787	807	828	848	869	889	910	930	951	971
34	597	618	639	661	682	703	724	745	767	788	809	830	851	872	893	914	936	957	978	999
35	614	635	657	679	701	723	744	766	788	810	831	853	875	896	918	940	961	983	1005	1026
36	630	652	675	697	720	742	764	787	809	831	854	876	898	920	943	965	987	1009	1031	1054
37	647	670	693	716	738	761	784	807	830	853	876	899	921	944	967	990	1013	1035	1058	1081
38	663	687	710	734	757	781	804	828	851	875	898	921	945	968	992	1015	1038	1062	1085	1108
39	680	704	728	752	776	800	824	848	872	896	920	944	968	992	1016	1040	1064	1088	1112	1136
40	696	721	746	770	795	820	844	869	893	918	943	967	992	1016	1041	1065	1090	1114	1139	1163
41	713	738	763	789	814	839	864	889	914	940	965	990	1015	1040	1065	1090	1115	1140	1165	1190
42	729	755	781	807	833	858	884	910	936	961	987	1013	1038	1064	1090	1115	1141	1167	1192	1218
43	746	772	799	825	851	878	904	930	957	983	1009	1035	1062	1088	1114	1140	1167	1193	1219	1245
44	762	789	816	843	870	897	924	951	978	1005	1031	1058	1085	1112	1139	1165	1192	1219	1246	1272
45	779	806	834	861	889	916	944	971	999	1026	1054	1081	1108	1136	1163	1190	1218	1245	1272	1300
46	795	823	852	880	908	936	964	992	1020	1048	1076	1104	1132	1160	1188	1215	1243	1271	1299	1327
47	812	841	869	898	927	955	984	1012	1041	1069	1098	1127	1155	1184	1212	1240	1269	1297	1326	1354
48	828	858	887	916	945	975	1004	1033	1062	1091	1120	1149	1178	1207	1236	1265	1294	1323	1352	1381
49	845	875	905	934	964	994	1024	1053	1083	1113	1142	1172	1202	1231	1261	1290	1320	1350	1379	1409
50	861	892	922	953	983	1013	1044	1074	1104	1134	1165	1195	1225	1255	1285	1315	1346	1376	1406	1436

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.5%-Quantil

Tabelliert ist das 99.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.995}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	24	28	33	37	41	45	49	53	57	62	66	70	74	78	82	86	90	95	99	103	107
6	28	33	38	43	48	53	58	62	67	72	77	82	86	91	96	101	106	110	115	120	125
7	33	38	44	49	55	60	66	71	77	82	88	93	99	104	110	115	121	126	131	137	142
8	37	43	49	56	62	68	74	80	86	93	99	105	111	117	123	129	135	141	148	154	160
9	41	48	55	62	69	76	82	89	96	103	110	116	123	130	137	143	150	157	163	170	177
10	45	53	60	68	76	83	91	98	105	113	120	128	135	142	150	157	165	172	179	187	194
11	49	58	66	74	82	91	99	107	115	123	131	139	147	155	163	171	179	187	195	203	211
12	53	62	71	80	89	98	107	116	124	133	142	150	159	168	176	185	193	202	211	219	228
13	57	67	77	86	96	105	115	124	134	143	152	162	171	180	189	199	208	217	226	236	245
14	62	72	82	93	103	113	123	133	143	153	163	173	183	193	202	212	222	232	242	252	262
15	66	77	88	99	110	120	131	142	152	163	173	184	194	205	215	226	236	247	257	268	278
16	70	82	93	105	116	128	139	150	162	173	184	195	206	217	229	240	251	262	273	284	295
17	74	86	99	111	123	135	147	159	171	183	194	206	218	230	241	253	265	277	288	300	312
18	78	91	104	117	130	142	155	168	180	193	205	217	230	242	254	267	279	291	304	316	328
19	82	96	110	123	137	150	163	176	189	202	215	229	241	254	267	280	293	306	319	332	345
20	86	101	115	129	143	157	171	185	199	212	226	240	253	267	280	294	307	321	334	348	361
21	90	106	121	135	150	165	179	193	208	222	236	251	265	279	293	307	322	336	350	364	378
22	95	110	126	141	157	172	187	202	217	232	247	262	277	291	306	321	336	350	365	380	394
23	99	115	131	148	163	179	195	211	226	242	257	273	288	304	319	334	350	365	380	396	411
24	103	120	137	154	170	187	203	219	236	252	268	284	300	316	332	348	364	380	396	411	427
25	107	125	142	160	177	194	211	228	245	262	278	295	312	328	345	361	378	394	411	427	444
26	111	130	148	166	184	201	219	237	254	271	289	306	323	340	358	375	392	409	426	443	460
27	115	134	153	172	190	209	227	245	263	281	299	317	335	353	370	388	406	424	441	459	477
28	119	139	159	178	197	216	235	254	272	291	310	328	347	365	383	402	420	438	457	475	493
29	123	144	164	184	204	223	243	262	282	301	320	339	358	377	396	415	434	453	472	491	509
30	127	149	169	190	211	231	251	271	291	311	330	350	370	389	409	429	448	468	487	506	526
31	132	153	175	196	217	238	259	279	300	320	341	361	381	402	422	442	462	482	502	522	542
32	136	158	180	202	224	245	267	288	309	330	351	372	393	414	435	455	476	497	517	538	559
33	140	163	186	208	231	253	275	297	318	340	362	383	405	426	447	469	490	511	533	554	575
34	144	168	191	214	237	260	283	305	328	350	372	394	416	438	460	482	504	526	548	570	591
35	148	172	197	220	244	267	291	314	337	360	382	405	428	450	473	496	518	540	563	585	608
36	152	177	202	227	251	275	299	322	346	369	393	416	439	463	486	509	532	555	578	601	624
37	156	182	207	233	257	282	307	331	355	379	403	427	451	475	499	522	546	570	593	617	640
38	160	187	213	239	264	289	315	339	364	389	414	438	463	487	511	536	560	584	608	633	657
39	164	192	218	245	271	297	322	348	373	399	424	449	474	499	524	549	574	599	624	648	673
40	168	196	224	251	278	304	330	357	383	409	434	460	486	511	537	562	588	613	639	664	689
41	173	201	229	257	284	311	338	365	392	418	445	471	497	524	550	576	602	628	654	680	706
42	177	206	235	263	291	319	346	374	401	428	455	482	509	536	563	589	616	642	669	695	722
43	181	211	240	269	298	326	354	382	410	438	466	493	521	548	575	603	630	657	684	711	738
44	185	215	245	275	304	333	362	391	419	448	476	504	532	560	588	616	644	671	699	727	754
45	189	220	251	281	311	341	370	399	429	457	486	515	544	572	601	629	658	686	714	743	771
46	193	225	256	287	318	348	378	408	438	467	497	526	555	585	614	643	672	701	729	758	787
47	197	230	262	293	324	355	386	417	447	477	507	537	567	597	626	656	686	715	745	774	803
48	201	234	267	299	331	363	394	425	456	487	517	548	578	609	639	669	700	730	760	790	820
49	205	239	273	305	338	370	402	434	465	497	528	559	590	621	652	683	713	744	775	805	836
50	209	244	278	311	345	377	410	442	474	506	538	570	602	633	665	696	727	759	790	821	852

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.5%-Quantil

Tabelliert ist das 99.5%-Quantil $U_{m,n;\,0.995}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	111	115	119	123	127	132	136	140	144	148	152	156	160	164	168	173	177	181	185	189
6	130	134	139	144	149	153	158	163	168	172	177	182	187	192	196	201	206	211	215	220
7	148	153	159	164	169	175	180	186	191	197	202	207	213	218	224	229	235	240	245	251
8	166	172	178	184	190	196	202	208	214	220	227	233	239	245	251	257	263	269	275	281
9	184	190	197	204	211	217	224	231	237	244	251	257	264	271	278	284	291	298	304	311
10	201	209	216	223	231	238	245	253	260	267	275	282	289	297	304	311	319	326	333	341
11	219	227	235	243	251	259	267	275	283	291	299	307	315	322	330	338	346	354	362	370
12	237	245	254	262	271	279	288	297	305	314	322	331	339	348	357	365	374	382	391	399
13	254	263	272	282	291	300	309	318	328	337	346	355	364	373	383	392	401	410	419	429
14	271	281	291	301	311	320	330	340	350	360	369	379	389	399	409	418	428	438	448	457
15	289	299	310	320	330	341	351	362	372	382	393	403	414	424	434	445	455	466	476	486
16	306	317	328	339	350	361	372	383	394	405	416	427	438	449	460	471	482	493	504	515
17	323	335	347	358	370	381	393	405	416	428	439	451	463	474	486	497	509	521	532	544
18	340	353	365	377	389	402	414	426	438	450	463	475	487	499	511	524	536	548	560	572
19	358	370	383	396	409	422	435	447	460	473	486	499	511	524	537	550	563	575	588	601
20	375	388	402	415	429	442	455	469	482	496	509	522	536	549	562	576	589	603	616	629
21	392	406	420	434	448	462	476	490	504	518	532	546	560	574	588	602	616	630	644	658
22	409	424	438	453	468	482	497	511	526	540	555	570	584	599	613	628	642	657	671	686
23	426	441	457	472	487	502	517	533	548	563	578	593	608	624	639	654	669	684	699	714
24	443	459	475	491	506	522	538	554	570	585	601	617	633	648	664	680	695	711	727	743
25	460	477	493	509	526	542	559	575	591	608	624	640	657	673	689	706	722	738	754	771
26	477	494	511	528	545	562	579	596	613	630	647	664	681	698	715	731	748	765	782	799
27	494	512	529	547	565	582	600	617	635	652	670	687	705	722	740	757	775	792	810	827
28	511	529	548	566	584	602	620	638	656	675	693	711	729	747	765	783	801	819	837	855
29	528	547	566	585	603	622	641	659	678	697	715	734	753	771	790	809	827	846	865	883
30	545	565	584	603	623	642	661	681	700	719	738	758	777	796	815	834	854	873	892	911
31	562	582	602	622	642	662	682	702	721	741	761	781	801	821	840	860	880	900	920	939
32	579	600	620	641	661	682	702	723	743	763	784	804	825	845	866	886	906	927	947	967
33	596	617	638	659	681	702	723	744	765	786	807	828	849	870	891	912	933	953	974	995
34	613	635	656	678	700	721	743	765	786	808	829	851	873	894	916	937	959	980	1002	1023
35	630	652	675	697	719	741	763	786	808	830	852	874	896	919	941	963	985	1007	1029	1051
36	647	670	693	715	738	761	784	807	829	852	875	898	920	943	966	988	1011	1034	1056	1079
37	664	687	711	734	758	781	804	828	851	874	898	921	944	968	991	1014	1037	1061	1084	1107
38	681	705	729	753	777	801	825	849	873	896	920	944	968	992	1016	1040	1063	1087	1111	1135
39	698	722	747	771	796	821	845	870	894	919	943	968	992	1016	1041	1065	1090	1114	1138	1163
40	715	740	765	790	815	840	866	891	916	941	966	991	1016	1041	1066	1091	1116	1141	1166	1191
41	731	757	783	809	834	860	886	912	937	963	988	1014	1040	1065	1091	1116	1142	1167	1193	1218
42	748	775	801	827	854	880	906	933	959	985	1011	1037	1063	1090	1116	1142	1168	1194	1220	1246
43	765	792	819	846	873	900	927	953	980	1007	1034	1061	1087	1114	1141	1167	1194	1221	1247	1274
44	782	810	837	865	892	920	947	974	1002	1029	1056	1084	1111	1138	1166	1193	1220	1247	1275	1302
45	799	827	855	883	911	939	967	995	1023	1051	1079	1107	1135	1163	1191	1218	1246	1274	1302	1330
46	816	845	873	902	930	959	988	1016	1045	1073	1102	1130	1159	1187	1216	1244	1272	1301	1329	1358
47	833	862	891	920	950	979	1008	1037	1066	1095	1124	1153	1182	1211	1240	1269	1298	1327	1356	1385
48	850	879	909	939	969	999	1028	1058	1088	1117	1147	1177	1206	1236	1265	1295	1325	1354	1384	1413
49	866	897	927	958	988	1018	1049	1079	1109	1139	1170	1200	1230	1260	1290	1320	1351	1381	1411	1441
50	883	914	945	976	1007	1038	1069	1100	1131	1161	1192	1223	1254	1285	1315	1346	1377	1407	1438	1469

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.75%-Quantil

Tabelliert ist das 99.75%-Quantil $U_{m,n;\,0.9975}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	25	29	34	38	42	46	51	55	59	63	68	72	76	80	85	89	93	97	102	106	110
6	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74	79	84	89	94	99	104	109	114	119	124	129
7	34	39	45	51	57	62	68	74	79	85	91	96	102	107	113	119	124	130	135	141	147
8	38	44	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108	114	121	127	133	139	146	152	158	164
9	42	49	57	64	71	78	85	92	99	106	113	120	127	134	141	148	154	161	168	175	182
10	46	54	62	70	78	86	93	101	109	116	124	132	139	147	154	162	169	177	185	192	200
11	51	59	68	76	85	93	102	110	118	127	135	143	151	160	168	176	184	192	201	209	217
12	55	64	74	83	92	101	110	119	128	137	146	155	164	172	181	190	199	208	217	226	234
13	59	69	79	89	99	109	118	128	138	147	157	166	176	185	195	204	214	223	233	242	252
14	63	74	85	95	106	116	127	137	147	157	168	178	188	198	208	218	228	239	249	259	269
15	68	79	91	102	113	124	135	146	157	168	178	189	200	211	222	232	243	254	264	275	286
16	72	84	96	108	120	132	143	155	166	178	189	201	212	223	235	246	258	269	280	292	303
17	76	89	102	114	127	139	151	164	176	188	200	212	224	236	248	260	272	284	296	308	320
18	80	94	107	121	134	147	160	172	185	198	211	223	236	249	261	274	287	299	312	324	337
19	85	99	113	127	141	154	168	181	195	208	222	235	248	261	275	288	301	314	328	341	354
20	89	104	119	133	148	162	176	190	204	218	232	246	260	274	288	302	316	329	343	357	371
21	93	109	124	139	154	169	184	199	214	228	243	258	272	287	301	316	330	344	359	373	388
22	97	114	130	146	161	177	192	208	223	239	254	269	284	299	314	329	344	360	375	390	405
23	102	119	135	152	168	185	201	217	233	249	264	280	296	312	328	343	359	375	390	406	421
24	106	124	141	158	175	192	209	226	242	259	275	292	308	324	341	357	373	390	406	422	438
25	110	129	147	164	182	200	217	234	252	269	286	303	320	337	354	371	388	405	421	438	455
26	114	133	152	171	189	207	225	243	261	279	297	314	332	349	367	385	402	419	437	454	472
27	119	138	158	177	196	215	233	252	270	289	307	326	344	362	380	398	416	434	452	471	489
28	123	143	163	183	203	222	242	261	280	299	318	337	356	375	393	412	431	449	468	487	505
29	127	148	169	189	210	230	250	270	289	309	329	348	368	387	406	426	445	464	484	503	522
30	131	153	175	196	217	237	258	278	299	319	339	359	379	400	420	439	459	479	499	519	539
31	135	158	180	202	223	245	266	287	308	329	350	371	391	412	433	453	474	494	515	535	555
32	140	163	186	208	230	252	274	296	318	339	361	382	403	425	446	467	488	509	530	551	572
33	144	168	191	214	237	260	282	305	327	349	371	393	415	437	459	481	502	524	546	567	589
34	148	173	197	221	244	267	291	314	336	359	382	405	427	450	472	494	517	539	561	583	606
35	152	178	202	227	251	275	299	322	346	369	393	416	439	462	485	508	531	554	577	599	622
36	157	183	208	233	258	283	307	331	355	379	403	427	451	474	498	522	545	569	592	616	639
37	161	187	214	239	265	290	315	340	365	389	414	438	463	487	511	535	559	584	608	632	656
38	165	192	219	246	272	298	323	349	374	399	424	450	475	499	524	549	574	598	623	648	672
39	169	197	225	252	279	305	331	358	384	409	435	461	486	512	537	563	588	613	639	664	689
40	173	202	230	258	285	313	340	366	393	419	446	472	498	524	550	576	602	628	654	680	706
41	178	207	236	264	292	320	348	375	402	429	456	483	510	537	563	590	617	643	669	696	722
42	182	212	241	271	299	328	356	384	412	439	467	495	522	549	577	604	631	658	685	712	739
43	186	217	247	277	306	335	364	393	421	449	478	506	534	562	590	617	645	673	700	728	756
44	190	222	253	283	313	343	372	401	431	459	488	517	546	574	603	631	659	688	716	744	772
45	195	227	258	289	320	350	380	410	440	469	499	528	557	587	616	645	674	702	731	760	789
46	199	232	264	295	327	358	388	419	449	479	510	539	569	599	629	658	688	717	747	776	805
47	203	236	269	302	334	365	397	428	459	489	520	551	581	612	642	672	702	732	762	792	822
48	207	241	275	308	340	373	405	436	468	500	531	562	593	624	655	686	716	747	778	808	839
49	211	246	280	314	347	380	413	445	477	510	541	573	605	636	668	699	731	762	793	824	855
50	216	251	286	320	354	388	421	454	487	520	552	584	617	649	681	713	745	777	808	840	872

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.75%-Quantil

Tabelliert ist das 99.75%-Quantil $U_{m,n;\,0.9975}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	114	119	123	127	131	135	140	144	148	152	157	161	165	169	173	178	182	186	190	195
6	133	138	143	148	153	158	163	168	173	178	183	187	192	197	202	207	212	217	222	227
7	152	158	163	169	175	180	186	191	197	202	208	214	219	225	230	236	241	247	253	258
8	171	177	183	189	196	202	208	214	221	227	233	239	246	252	258	264	271	277	283	289
9	189	196	203	210	217	223	230	237	244	251	258	265	272	279	285	292	299	306	313	320
10	207	215	222	230	237	245	252	260	267	275	283	290	298	305	313	320	328	335	343	350
11	225	233	242	250	258	266	274	282	291	299	307	315	323	331	340	348	356	364	372	380
12	243	252	261	270	278	287	296	305	314	322	331	340	349	358	366	375	384	393	401	410
13	261	270	280	289	299	308	318	327	336	346	355	365	374	384	393	402	412	421	431	440
14	279	289	299	309	319	329	339	349	359	369	379	389	399	409	419	429	439	449	459	469
15	297	307	318	329	339	350	361	371	382	393	403	414	424	435	446	456	467	478	488	499
16	314	326	337	348	359	371	382	393	405	416	427	438	450	461	472	483	495	506	517	528
17	332	344	356	368	379	391	403	415	427	439	451	463	475	486	498	510	522	534	546	557
18	349	362	375	387	400	412	425	437	450	462	474	487	499	512	524	537	549	562	574	587
19	367	380	393	406	420	433	446	459	472	485	498	511	524	537	550	563	577	590	603	616
20	385	398	412	426	439	453	467	481	494	508	522	535	549	563	576	590	604	617	631	645
21	402	416	431	445	459	474	488	502	517	531	545	559	574	588	602	617	631	645	659	674
22	419	434	449	464	479	494	509	524	539	554	569	584	598	613	628	643	658	673	688	702
23	437	452	468	484	499	515	530	546	561	577	592	608	623	639	654	669	685	700	716	731
24	454	471	487	503	519	535	551	567	583	599	616	632	648	664	680	696	712	728	744	760
25	472	489	505	522	539	555	572	589	606	622	639	656	672	689	706	722	739	756	772	789
26	489	507	524	541	559	576	593	610	628	645	662	680	697	714	731	749	766	783	800	817
27	507	524	542	560	578	596	614	632	650	668	686	703	721	739	757	775	793	810	828	846
28	524	542	561	580	598	617	635	654	672	690	709	727	746	764	783	801	819	838	856	875
29	541	560	580	599	618	637	656	675	694	713	732	751	770	789	808	827	846	865	884	903
30	559	578	598	618	637	657	677	697	716	736	755	775	795	814	834	854	873	893	912	932
31	576	596	617	637	657	677	698	718	738	758	779	799	819	839	860	880	900	920	940	960
32	593	614	635	656	677	698	719	739	760	781	802	823	844	864	885	906	927	947	968	989
33	610	632	654	675	697	718	739	761	782	804	825	847	868	889	911	932	953	975	996	1017
34	628	650	672	694	716	738	760	782	804	826	848	870	892	914	936	958	980	1002	1024	1046
35	645	668	690	713	736	758	781	804	826	849	871	894	917	939	962	984	1007	1029	1052	1074
36	662	686	709	732	755	779	802	825	848	871	895	918	941	964	987	1010	1033	1056	1080	1103
37	680	703	727	751	775	799	823	847	870	894	918	942	965	989	1013	1036	1060	1084	1107	1131
38	697	721	746	770	795	819	844	868	892	917	941	965	990	1014	1038	1062	1087	1111	1135	1159
39	714	739	764	789	814	839	864	889	914	939	964	989	1014	1039	1064	1088	1113	1138	1163	1188
40	731	757	783	808	834	860	885	911	936	962	987	1013	1038	1064	1089	1114	1140	1165	1191	1216
41	749	775	801	827	854	880	906	932	958	984	1010	1036	1062	1088	1114	1140	1166	1192	1218	1244
42	766	793	819	846	873	900	927	953	980	1007	1033	1060	1087	1113	1140	1166	1193	1220	1246	1273
43	783	810	838	865	893	920	947	975	1002	1029	1056	1084	1111	1138	1165	1192	1220	1247	1274	1301
44	800	828	856	884	912	940	968	996	1024	1052	1080	1107	1135	1163	1191	1218	1246	1274	1302	1329
45	817	846	875	903	932	960	989	1017	1046	1074	1103	1131	1159	1188	1216	1244	1273	1301	1329	1357
46	835	864	893	922	951	980	1010	1039	1068	1097	1126	1155	1184	1212	1241	1270	1299	1328	1357	1386
47	852	882	911	941	971	1001	1030	1060	1090	1119	1149	1178	1208	1237	1267	1296	1326	1355	1385	1414
48	869	899	930	960	990	1021	1051	1081	1111	1142	1172	1202	1232	1262	1292	1322	1352	1382	1412	1442
49	886	917	948	979	1010	1041	1072	1103	1133	1164	1195	1225	1256	1287	1317	1348	1379	1409	1440	1470
50	903	935	967	998	1030	1061	1092	1124	1155	1186	1218	1249	1280	1312	1343	1374	1405	1436	1467	1499

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.9%-Quantil

Tabelliert ist das 99.9%-Quantil $U_{m,n;\,0.999}$.

$m \setminus n$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
5	25	30	35	39	43	48	52	57	61	66	70	74	79	83	87	92	96	101	105	109	114
6	30	36	41	46	51	56	61	67	72	77	82	87	92	97	102	107	113	118	123	128	133
7	35	41	47	53	59	64	70	76	82	88	94	100	105	111	117	123	128	134	140	146	152
8	39	46	53	59	66	73	79	86	92	99	105	112	118	125	131	138	144	151	157	164	170
9	43	51	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131	138	145	153	160	167	174	181	188
10	48	56	64	73	81	89	97	105	112	120	128	136	144	152	160	167	175	183	191	199	206
11	52	61	70	79	88	97	105	114	122	131	140	148	157	165	174	182	190	199	207	216	224
12	57	67	76	86	95	105	114	123	132	142	151	160	169	178	187	197	206	215	224	233	242
13	61	72	82	92	102	112	122	132	142	152	162	172	182	191	201	211	221	231	240	250	260
14	66	77	88	99	110	120	131	142	152	163	173	184	194	205	215	225	236	246	257	267	277
15	70	82	94	105	117	128	140	151	162	173	184	196	207	218	229	240	251	262	273	284	295
16	74	87	100	112	124	136	148	160	172	184	196	207	219	231	243	254	266	278	289	301	313
17	79	92	105	118	131	144	157	169	182	194	207	219	231	244	256	269	281	293	305	318	330
18	83	97	111	125	138	152	165	178	191	205	218	231	244	257	270	283	296	309	322	335	347
19	87	102	117	131	145	160	174	187	201	215	229	243	256	270	283	297	311	324	338	351	365
20	92	107	123	138	153	167	182	197	211	225	240	254	269	283	297	311	325	340	354	368	382
21	96	113	128	144	160	175	190	206	221	236	251	266	281	296	311	325	340	355	370	385	399
22	101	118	134	151	167	183	199	215	231	246	262	278	293	309	324	340	355	371	386	401	417
23	105	123	140	157	174	191	207	224	240	257	273	289	305	322	338	354	370	386	402	418	434
24	109	128	146	164	181	199	216	233	250	267	284	301	318	335	351	368	385	401	418	435	451
25	114	133	152	170	188	206	224	242	260	277	295	313	330	347	365	382	399	417	434	451	469
26	118	138	157	176	195	214	233	251	269	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486
27	122	143	163	183	202	222	241	260	279	298	317	336	354	373	392	410	429	447	466	484	503
28	127	148	169	189	210	230	250	269	289	308	328	347	367	386	405	424	444	463	482	501	520
29	131	153	175	196	217	237	258	278	299	319	339	359	379	399	419	439	458	478	498	518	537
30	135	158	180	202	224	245	266	287	308	329	350	371	391	412	432	453	473	493	514	534	554
31	140	163	186	209	231	253	275	296	318	339	361	382	403	425	446	467	488	509	530	551	572
32	144	168	192	215	238	261	283	306	328	350	372	394	416	437	459	481	502	524	546	567	589
33	149	173	198	222	245	268	292	315	337	360	383	405	428	450	473	495	517	539	562	584	606
34	153	178	203	228	252	276	300	324	347	370	394	417	440	463	486	509	532	555	577	600	623
35	157	184	209	234	259	284	308	333	357	381	405	428	452	476	499	523	546	570	593	617	640
36	162	189	215	241	266	292	317	342	366	391	416	440	464	489	513	537	561	585	609	633	657
37	166	194	221	247	274	299	325	351	376	401	427	452	477	501	526	551	576	600	625	650	674
38	170	199	226	254	281	307	334	360	386	412	438	463	489	514	540	565	590	616	641	666	691
39	175	204	232	260	288	315	342	369	396	422	448	475	501	527	553	579	605	631	657	683	708
40	179	209	238	267	295	323	350	378	405	432	459	486	513	540	567	593	620	646	673	699	725
41	183	214	244	273	302	330	359	387	415	443	470	498	525	553	580	607	634	661	688	715	742
42	188	219	249	279	309	338	367	396	425	453	481	509	537	565	593	621	649	677	704	732	759
43	192	224	255	286	316	346	376	405	434	463	492	521	550	578	607	635	664	692	720	748	776
44	196	229	261	292	323	354	384	414	444	474	503	533	562	591	620	649	678	707	736	765	794
45	201	234	267	299	330	361	392	423	454	484	514	544	574	604	634	663	693	722	752	781	811
46	205	239	272	305	337	369	401	432	463	494	525	556	586	617	647	677	707	738	768	798	828
47	210	244	278	312	344	377	409	441	473	504	536	567	598	629	660	691	722	753	783	814	845
48	214	249	284	318	352	385	418	450	483	515	547	579	610	642	674	705	737	768	799	830	862
49	218	254	290	324	359	392	426	459	492	525	558	590	623	655	687	719	751	783	815	847	879
50	223	259	295	331	366	400	434	468	502	535	569	602	635	668	701	733	766	798	831	863	896

Quantile der $U_{m,n}$-Verteilung: 99.9%-Quantil

Tabelliert ist das 99.9%-Quantil $U_{m,n;\,0.999}$.

$m \setminus n$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
5	118	122	127	131	135	140	144	149	153	157	162	166	170	175	179	183	188	192	196	201
6	138	143	148	153	158	163	168	173	178	184	189	194	199	204	209	214	219	224	229	234
7	157	163	169	175	180	186	192	198	203	209	215	221	226	232	238	244	249	255	261	267
8	176	183	189	196	202	209	215	222	228	234	241	247	254	260	267	273	279	286	292	299
9	195	202	210	217	224	231	238	245	252	259	266	274	281	288	295	302	309	316	323	330
10	214	222	230	237	245	253	261	268	276	284	292	299	307	315	323	330	338	346	354	361
11	233	241	250	258	266	275	283	292	300	308	317	325	334	342	350	359	367	376	384	392
12	251	260	269	278	287	296	306	315	324	333	342	351	360	369	378	387	396	405	414	423
13	269	279	289	299	308	318	328	337	347	357	366	376	386	396	405	415	425	434	444	454
14	288	298	308	319	329	339	350	360	370	381	391	401	412	422	432	443	453	463	474	484
15	306	317	328	339	350	361	372	383	394	405	416	427	438	448	459	470	481	492	503	514
16	324	336	347	359	371	382	394	405	417	428	440	452	463	475	486	498	509	521	533	544
17	342	354	367	379	391	403	416	428	440	452	464	477	489	501	513	525	537	550	562	574
18	360	373	386	399	412	425	437	450	463	476	489	501	514	527	540	553	565	578	591	604
19	378	392	405	419	432	446	459	473	486	499	513	526	540	553	567	580	593	607	620	634
20	396	410	424	439	453	467	481	495	509	523	537	551	565	579	593	607	621	635	649	663
21	414	429	444	458	473	488	502	517	532	546	561	576	590	605	620	634	649	664	678	693
22	432	447	463	478	493	509	524	539	555	570	585	600	616	631	646	661	677	692	707	722
23	450	466	482	498	514	530	546	562	577	593	609	625	641	657	673	688	704	720	736	752
24	468	484	501	518	534	551	567	584	600	617	633	650	666	683	699	715	732	748	765	781
25	486	503	520	537	554	572	589	606	623	640	657	674	691	708	725	742	759	776	794	811
26	504	521	539	557	575	592	610	628	646	663	681	699	716	734	752	769	787	805	822	840
27	521	540	558	577	595	613	632	650	668	687	705	723	741	760	778	796	814	833	851	869
28	539	558	577	596	615	634	653	672	691	710	729	748	766	785	804	823	842	861	880	898
29	557	577	596	616	635	655	674	694	713	733	752	772	791	811	830	850	869	889	908	928
30	575	595	615	635	655	676	696	716	736	756	776	796	816	836	857	877	897	917	937	957
31	592	613	634	655	676	696	717	738	759	779	800	821	841	862	883	903	924	945	965	986
32	610	632	653	674	696	717	739	760	781	802	824	845	866	888	909	930	951	972	994	1015
33	628	650	672	694	716	738	760	782	804	826	847	869	891	913	935	957	979	1000	1022	1044
34	646	668	691	713	736	759	781	804	826	849	871	894	916	939	961	983	1006	1028	1051	1073
35	663	687	710	733	756	779	802	826	849	872	895	918	941	964	987	1010	1033	1056	1079	1102
36	681	705	729	752	776	800	824	847	871	895	919	942	966	989	1013	1037	1060	1084	1107	1131
37	699	723	748	772	796	821	845	869	894	918	942	966	991	1015	1039	1063	1088	1112	1136	1160
38	716	741	766	791	816	841	866	891	916	941	966	991	1016	1040	1065	1090	1115	1139	1164	1189
39	734	760	785	811	836	862	888	913	939	964	989	1015	1040	1066	1091	1117	1142	1167	1193	1218
40	752	778	804	830	857	883	909	935	961	987	1013	1039	1065	1091	1117	1143	1169	1195	1221	1247
41	769	796	823	850	877	903	930	957	983	1010	1037	1063	1090	1117	1143	1170	1196	1223	1249	1276
42	787	814	842	869	897	924	951	979	1006	1033	1060	1088	1115	1142	1169	1196	1223	1250	1278	1305
43	805	833	861	889	917	945	972	1000	1028	1056	1084	1112	1139	1167	1195	1223	1250	1278	1306	1333
44	822	851	880	908	937	965	994	1022	1051	1079	1107	1136	1164	1193	1221	1249	1278	1306	1334	1362
45	840	869	898	928	957	986	1015	1044	1073	1102	1131	1160	1189	1218	1247	1276	1305	1333	1362	1391
46	857	887	917	947	977	1006	1036	1066	1095	1125	1155	1184	1214	1243	1273	1302	1332	1361	1391	1420
47	875	906	936	966	997	1027	1057	1088	1118	1148	1178	1208	1238	1269	1299	1329	1359	1389	1419	1449
48	893	924	955	986	1017	1048	1078	1109	1140	1171	1202	1232	1263	1294	1325	1355	1386	1416	1447	1478
49	910	942	974	1005	1037	1068	1100	1131	1162	1194	1225	1257	1288	1319	1350	1382	1413	1444	1475	1506
50	928	960	992	1025	1057	1089	1121	1153	1185	1217	1249	1281	1313	1344	1376	1408	1440	1472	1503	1535

Literaturverzeichnis

[1] **Breiman, L. (1968)** Probability. Addison Wesley.

[2] **Dehling, H. und Haupt, B. (2004)** Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Springer Verlag.

[3] **Durrett, R.T. (2010)** Probability: Theory and examples (fourth edition), Cambridge University Press.

[4] **Elstrodt, J. (2007)** Maß- und Integrationstheorie. 5. Auflage. Springer Verlag.

[5] **Feller, W. (1968)** An introduction to probability theory and its applications, Vol I, Wiley and Sons.

[6] **Feller, W. (1971)** An introduction to probability theory and its applications, Vol II, Wiley and Sons.

[7] **Georgii, H.-O. (2009)** Stochastik, 4. Auflage. de Gruyter.

[8] **Keller, G. (2003)** Wahrscheinlichkeitstheorie. Vorlesungsskript Universität Erlangen.

[9] **Klenke, A. (2008)** Wahrscheinlichkeitstheorie. 2. Auflage, Springer Verlag.

[10] **Krengel, U. (2005)** Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 8. Auflage, Vieweg Verlag.

[11] **Shiryaev, A.N. (1989)** Probability (second edition). Springer.

Index