

# 1 Die Struktur von Rijndael

## Repräsentation der Blöcke

Rijndael operiert auf Oktetten (8-Bit-Bytes), also auf dem  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum  $\mathbb{F}_2^8$ . Da an mehreren Stellen die Struktur dieses Vektorraums als Körper mit 256 Elementen ausgenutzt wird, liegt es nahe, ihn von vorherein mit diesem Körper  $\mathbb{F}_{256}$  zu identifizieren.

Die Blöcke, mit denen Rijndael umgeht, sind zunächst Bit-Blöcke, deren Länge ein Vielfaches von 32 ist; spezifiziert ist der Algorithmus für die Block- und Schlüssellängen 128, 160, 192, 224, 256.

Hier liegt der einzige Unterschied zwischen Rijndael und AES: AES ist nur für die Blocklänge 128 und die Schlüssellängen 128, 192 und 256 spezifiziert. Der Standardisierungsprozess macht daher keine Aussagen über die Sicherheit von Rijndael bei den übrigen Größen dieser Parameter.

Die 32 Bit werden jeweils als eine Spalte aus 4 Oktetten, also als ein Element des 4-dimensionalen  $\mathbb{F}_{256}$ -Vektorraums  $\mathbb{F}_{256}^4$  aufgefasst. Ein Block der Länge  $n = 32 \cdot N_b$  wird dann als  $N_b$ -Tupel solcher Spalten, also als  $4 \times N_b$ -Matrix

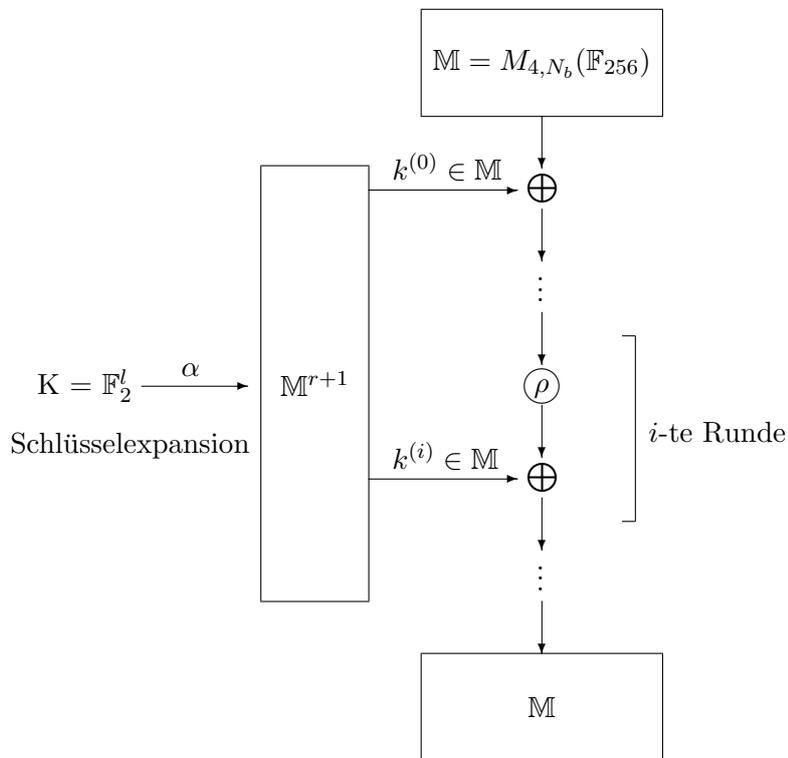
$$a = \begin{pmatrix} a_{0,0} & \dots & a_{0,N_b-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{3,0} & \dots & a_{3,N_b-1} \end{pmatrix} \in M_{4,N_b}(\mathbb{F}_{256}) =: \mathbb{M}$$

interpretiert. Analog sei die Schlüssellänge  $l = 32 \cdot N_k$ ; entsprechende Matrizen werden aber nicht verwendet, sondern Schlüssel werden erst expandiert und dann in Rundenschlüssel  $k^{(i)} \in \mathbb{M}$  zerlegt.

Nach der Spezifikation von Rijndael ist  $N_b, N_k \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  
nach der Spezifikation von AES  $N_b = 4$ ,  $N_k \in \{4, 6, 8\}$ .

## Das Iterationsschema

Der Verschlüsselungs-Algorithmus von Rijndael durchläuft  $r$  Runden, die jeweils aus der Kernabbildung  $\rho$  und der (binären) Addition eines Teilschlüssels (Rundenschlüssel) bestehen; in der letzten Runde ist die Kernabbildung etwas verkürzt – mehr dazu später. Vor Beginn der ersten Runde wird schon ein Teilschlüssel addiert; die Schlüsselexpansion muss also aus den gegebenen  $l$  Schlüsselbits  $r + 1$  Teilschlüssel aus je  $32N_b$  Bits produzieren. Die Kernabbildung ist invertierbar. Sie ist von Runde zu Runde (mit Ausnahme der letzten) gleich.



Die Zahl der Runden ist wie folgt festgelegt:

$N_k$	$N_b$				
	4	5	6	7	8
4	10	11	12	13	14
5	11	11	12	13	14
6	12	12	12	13	14
7	13	13	13	13	14
8	14	14	14	14	14

Bei AES mit Schlüssellänge 128, 192 oder 256 ist die Rundenzahl also 10, 12 oder 14.

### Die Kernabbildung

Jede Runde von Rijndael besteht aus den vier Schritten

1. **SubBytes**, einer Substitution, die aus paralleler Anwendung der S-Box auf jedes Oktett besteht,
2. **ShiftRows**, einer Permutation jeder Matrixzeile in sich,

3. **MixColumns**, einer linearen Abbildung (also komplizierter als nur Permutation) jeder Matrixspalte in sich,
4. **AddRoundKey**, der Addition des Rundenschlüssels.

Die Kernabbildung  $\rho$  umfasst also die ersten drei dieser Schritte. In der letzten Runde wird der dritte Schritt **MixColumns** weggelassen; dadurch wird für die Umkehrabbildung, den Entschlüsselungsalgorithmus, ein strukturell gleicher Aufbau erreicht, und zur kryptographischen Stärke trägt dieser eine lineare Schritt am Ende ohnehin nichts mehr bei.

### Der Substitutionsschritt SubBytes

Auf alle Oktette des aktuellen Zustands, also alle Einträge einer Matrix  $b \in \mathbb{M}$ , wird die S-Box  $S_{RD}$  einzeln angewendet. Diese ist Komposition  $S_{RD} = f \circ g$  zweier Abbildungen, nämlich der Inversion in  $\mathbb{F}_{256}$ ,

$$g: \mathbb{F}_{256} \longrightarrow \mathbb{F}_{256}, \quad g(x) = \begin{cases} x^{-1} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

deren Nichtlinearitäts-Eigenschaften bestens bekannt sind, sowie der affinen Abbildung

$$f: \mathbb{F}_{256} \longrightarrow \mathbb{F}_{256}, \quad \begin{pmatrix} x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_7 \\ x_6 \\ x_5 \\ x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die so gewählt ist, dass

- $S_{RD}$  keinen Fixpunkt hat, also  $S_{RD}(b) \neq b$  für alle  $b \in \mathbb{F}_{256}$ ,
- $S_{RD}$  keinen „Anti-Fixpunkt“ hat, also  $S_{RD}(b) \neq \bar{b}$  für alle  $b \in \mathbb{F}_{256}$ ;

dabei ist  $\bar{b} = (1 - b_7, \dots, 1 - b_0)$  das BOOLEsche Komplement, also die bitweise logische Negation.

### Die Permutation der Zeilen ShiftRows

Jede der vier Zeilen des Zustands – der aktuellen  $4 \times N_b$ -Matrix – wird individuell zyklisch nach links geschoben, und zwar Zeile  $i$  um  $C_i$  Stellen. Die Werte der  $C_i$  hängen wie folgt von der Blocklänge ab:

$N_b$	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
4	0	1	2	3
5	0	1	2	3
6	0	1	2	3
7	0	1	2	4
8	0	1	3	4

## Die lineare Transformation der Spalten MixColumns

Der Zustand wird Spalte für Spalte – d. h. die Zustandsmatrix  $\in \mathbb{M}$  wird – von links mit einer festen  $4 \times 4$ -Matrix multipliziert; das Ziel dieses Schritts ist, erhebliche Diffusion zu erzeugen. Es handelt sich also um eine lineare Abbildung

$$\mu: \mathbb{F}_{256}^4 \longrightarrow \mathbb{F}_{256}^4,$$

und zwar um die, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 02 & 03 & 01 & 01 \\ 01 & 02 & 03 & 01 \\ 01 & 01 & 02 & 03 \\ 03 & 01 & 01 & 02 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird; die Einträge sind als Oktette in Hexadezimal-Darstellung zu interpretieren, also z. B.  $03 = (00000011) \in \mathbb{F}_2^8$ .

## Die Entschlüsselung

Die gesamte Rijndael-Verschlüsselung ist die Komposition

$$F_k = \kappa_r \circ \tau \circ \sigma \circ \dots \circ \underbrace{[\kappa_i \circ \mu \circ \tau \circ \sigma]}_{i=1, \dots, r-1} \circ \dots \circ \kappa_0$$

von Abbildungen  $\mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$ ; dabei ist  $\kappa_i$  die Addition des  $i$ -ten Rundenschlüssels,  $\tau = \text{ShiftRows}$ ,  $\sigma = \text{SubBytes}$  und  $\mu = \text{MixColumns}$ . Für die Entschlüsselung brauchen wir die Umkehrabbildung, die zunächst so aussieht:

$$F_k^{-1} = \kappa_0^{-1} \circ \dots \circ [\sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \mu^{-1} \circ \kappa_i^{-1}] \circ \dots \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \kappa_r^{-1}.$$

Die versprochene Strukturgleichheit mit  $F_k$  ergibt sich aus einigen Umformungen:

- Es ist  $\kappa_i^{-1} = \kappa_i$  für alle  $i$ .
- Da  $\sigma$  nur auf den Matrix-Einträgen wirkt, und zwar auf allen gleich, ist  $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$ .

- Schließlich ist  $\kappa_i \circ \mu(x) = \mu(x) + k^{(i)} = \mu(x + \mu^{-1}(k^{(i)})) = \mu \circ \tilde{\kappa}_i(x)$ , da  $\mu$  linear ist. Also ist  $\mu_i^{-1} \circ \kappa_i = \tilde{\kappa}_i \circ \mu_i^{-1}$ , wobei  $\tilde{\kappa}_i$  die binäre Addition von  $\mu^{-1}(k^{(i)})$  ist.

Damit ergibt sich

$$F_k^{-1} = \kappa_0 \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \dots \circ [\tilde{\kappa}_i \circ \mu_i^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1}] \circ \dots \circ \kappa_r.$$

Die Umkehrabbildung ist also genauso zusammengesetzt, nur dass

- das Schlüsselauswahlschema modifiziert ist,
- 

## Die Schlüsselexpansion