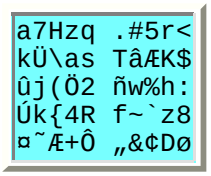
Kryptologie

Der globale Koinzidenzindex eines Textes



Definition

Sei $a \in \Sigma^r$ ein Text (mit $r \geq 2$) und $\kappa_1(a)$, ..., $\kappa_{r-1}(a)$ die Folge der Autokoinzidenzindizes. Dann heißt der Mittelwert

$$\varphi(a) := [\kappa_1(a) + ... + \kappa_{r-1}(a)] / [r - 1]$$

der **(globale) Koinzidenzindex** von a.

Dadurch ist also eine Abbildung

$$\varphi : \Sigma^{(\geq 2)} \rightarrow \mathbf{Q}$$

definiert.

Andere Beschreibung

Wie oft findet man, wenn man zwei beliebige Stellen des Textes a herauspickt, ein »Zwillingspaar«, also zweimal den gleichen Buchstaben $s \in \Sigma$? (= eine »Koinzidenz«)

Sei $h_s = \#\{j \mid a_j = s\}$ die Häufigkeit von s in a. Dann ist die Antwort:

$h_s \cdot (h_s - 1)/2$ -mal.

Insgesamt ist die Anzahl der Zwillingspaare also

$$\sum_{s \in \Sigma} \frac{h_s (h_s - 1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{s \in \Sigma} h_s^2 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{s \in \Sigma} h_s = \frac{1}{2} \cdot \sum_{s \in \Sigma} h_s^2 - \frac{r}{2}.$$

Man kann diese Koinzidenzen (= Zwillingspaare) auch anders zählen:

Sei dazu z_q die Anzahl der bereits gefundenen Koinzidenzen im Abstand q für q = 1, ..., r-1, initialisiert mit z_q := 0.

Für i = 0, ..., r-2	[Zählschleife über den Text a]
für j = i+1, ..., r-1	[Zählschleife über den Resttext]
falls $a_i = a_j$	[Koinzidenz gefunden]
inkrementiere z_{j-i}	[im Abstand j-i]
inkrementiere z_{r+i-j}	[und im Abstand r+i-j]

Genauso wurde übrigens in dem Perl-Programm gezählt.

Am Ende der Schleife enthalten z_1, ..., z_{r-1} Werte, für die gilt:

Hilfssatz. (i) $z_1 + ... + z_{r-1} = \Sigma_{s\in\Sigma}\, h_s\cdot(h_s-1)$.

(ii) $\kappa_q(a) = z_q/r$ *für* q = 1, ..., r-1.

Beweis. (i) Alle Koinzidenzen sind doppelt gezählt.

(ii) $\kappa_q(a) = (1/r)\cdot \#\{j \mid a_{j+q} = a_j\}$ nach Definition (Indizes mod r).♦

Satz (Kappa-Phi-Theorem) *Der Koinzidenzindex eines Textes* $a \in \Sigma^*$ (*der Länge* $r \geq 2$) *ist der Anteil der Koinzidenzen unter allen Buchstabenpaaren von a.*

Beweis.

$$\varphi(a) = \frac{\kappa_1(a) + \cdots + \kappa_{r-1}(a)}{r-1} = \frac{z_1 + \cdots + z_{r-1}}{r\cdot(r-1)}$$
$$= \frac{\sum_{s\in\Sigma} h_s\cdot(h_s-1)}{r\cdot(r-1)} = \frac{\sum_{s\in\Sigma} \frac{h_s(h_s-1)}{2}}{\frac{r\cdot(r-1)}{2}};$$

im Zähler steht jetzt die Gesamtzahl der Koinzidenzen, im Nenner die Gesamtzahl aller Buchstabenpaare.♦

Korollar 1.

$$\varphi(a) = \frac{r}{r-1}\cdot\sum_{s\in\Sigma}\left(\frac{h_s}{r}\right)^2 - \frac{1}{r-1}.$$

Beweis. Das folgt aus dem Zwischenschritt

$$\varphi(a) = \frac{\sum_{s \in \Sigma} h_s^2 - r}{r \cdot (r-1)} .$$

♦

Korollar 2 (Invarianzsatz 2) *Der Koinzidenzindex eines Textes ist invariant unter **mono**alphabetischer Substitution und unter Transposition.*

Beweis. Die Anzahl der Zwillingspaare ändert sich nicht. ♦

Im Beispiel des (deutschen) Rheingedichts war $\varphi(a) \approx 0.0715$, beim (englischen) »If ...« $\varphi(c) \approx 0.0623$. Diese Werte entsprechen der Erwartung, da sie ja als Mittelwerte der Autokoinzidenzindizes selbst den typischen Wert der Zeichenkoinzidenz zweier Texte der gleichen Sprache annehmen sollten.

Im Beispiel des analysierten Geheimtextes war $\varphi(c) \approx 0.0440$. Auch dies ist ein typischer Wert, den wir bald verstehen werden.

Autor: Klaus Pommerening, 24. Februar 2000; letzte Änderung: 25. Mai 2002.

E-Mail an Pommerening@imsd.uni-mainz.de.