5.6 Binäre Summen binärer Zufallsvariablen

Satz 5 („Piling Up Lemma“) *Sei Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum und*

$$X_1, \ldots, X_r : \Omega \longrightarrow \mathbb{F}_2$$

unabhängige Zufallsvariablen mit $p_i := P(X_i = 0) = P(X_i^{-1}(0))$. Sei $X = X_1 + \cdots + X_r$ (binäre Summe in $\mathbb{F}_2$) und $p := P(X = 0)$. Sei $\lambda_i = (2p_i - 1)^2$ für $i = 1, \ldots r$ und $\lambda = (2p - 1)^2$. Dann gilt $\lambda = \lambda_1 \cdots \lambda_r$.

Beweis. Es reicht, den Beweis für $r = 2$ zu führen. Für $\omega \in \Omega$ ist $X(\omega) = 0$ genau dann, wenn $X_1(\omega)$ und $X_2(\omega)$ *beide* 0 *oder beide* 1 sind. Also ist

$$\begin{aligned} p &= p_1p_2 + (1 - p_1)(1 - p_2) = 1 - p_1 - p_2 + 2p_1p_2, \\ 2p - 1 &= 4p_1p_2 - 2p_1 - 2p_2 + 1 = (2p_1 - 1)(2p_2 - 1), \\ \lambda &= \lambda_1\lambda_2, \end{aligned}$$

wie behauptet. $\diamond$

Für die Wahrscheinlichkeiten ist die Formel etwas komplizierter:

Korollar 1 *Mit den Bezeichnungen von Satz 5 gilt*

$$p = \frac{1}{2} + 2^{r-1} \cdot \prod_{i=1}^{r} (p_i - \frac{1}{2}).$$

Korollar 2 *Ist ein $p_i = \frac{1}{2}$, so $\lambda = 0$, $p = \frac{1}{2}$.*

Korollar 3 *Mit wachsendem r ist λ monoton fallend.*