Übungen zu „Theorie ungeordneter Systeme“

Prof. Walter Schirmacher,WS 2009/10

Blatt 1

1) Fourier-Reihe

Eine periodische Funktion $f(x)$ mit Periode λ d.h. $f(x+\lambda) = f(x)$ lässt sich in eine *Fourier-Reihe* entwickeln:

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(k_n x) + b_n \cos(k_n x)] \qquad k_n = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

a) Berechnen Sie durch Integration von $f(x)$, $f(x)\sin(k_n x)$, bzw. $f(x)\cos(k_n x)$ über eine Periode die Koeffizienten b_0, a_n und b_n.

b) Zeigen Sie, dass die komplexe Darstellung gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{-ik_n x} \qquad 2\alpha_n = \begin{cases} b_n + ia_n & n > 0 \\ 2b_0 & n = 0 \\ b_n - ia_n & n < 0 \end{cases}$$

2) Fouriertransformation

Eine quadrat-integrable Funktion $f(x)$ (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)^2 < \infty$) lässt sich *Fourier-transformieren*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{-ikx} f(k)$$

wobei $f(k)$ *Fourier-Transformierte* heißt.

a) Zeigen Sie, daß die Fouriertransformierte gegeben ist durch

$$f(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{ikx} f(x)$$

<u>Hinweis:</u> Betrachten Sie eine beliebige periodische Funktion und lassen Sie die Periode $\lambda \to \infty$ gehen.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformation einer normierten Gauss-Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{\frac{1}{2}x^2/a^2}$.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) = 1$ (Beweis?).

b) Beweisen Sie den Verschiebungssatz $f(x) = g(x+a) \quad \Leftrightarrow \quad f(k) = e^{iak} g(k)$

c) Beweisen Sie den Faltungssatz: $f(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{x} g(\tilde{x}) h(x - \tilde{x})}_{\text{Faltung der funktionen } g(x) \text{ und } h(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(k) = 2\pi g(k) h(k)$

d) Verallgemeinern Sie die Fouriertransformation auf eine Funktion $f(\vec{r})$ des dreidimensionalen Raums und geben Sie die Rücktransformierte $f(\vec{k})$ an.

3) Yukawa-Potential

a) Zeigen Sie durch Ausintegration des Raumwinkels, dass die (dreidimensionale) Fouriertransformierte eines Zentralpotentials $V(r) = V(|\vec{r}|)$ nur von $q = |\vec{q}|$ abhängt und geschrieben werden kann als

$$V(q) = \int \mathrm{d}^3 r \; e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} V(r) = \frac{4\pi}{q} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r \; r \sin(qr) V(r). \tag{1}$$

b) Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte des Yukawa-Potentials

$$V(r) = V_0 \frac{1}{r} e^{-\lambda r}, \qquad \lambda > 0 \tag{2}$$

durch

$$V(q) = V_0 \frac{4\pi}{q^2 + \lambda^2} \tag{3}$$

gegeben ist.