Übungen zu „Feldtheoretische Behandlung ungeordneter und weicher Materie“

(Theorie ungeordneter Systeme II.)

Prof. Walter Schirmacher, WS 2009/10

Blatt 2

1) Pfadintegral für ein freies Teilchen

Berechnen Sie explizit das Pfadintegral

$$U_{q \rightarrow q'}^{t \rightarrow t'} = \int \mathcal{D}[p, q] e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p, q)]}$$

für ein freies Teilchen

- für „normale“ Zeit t ;
- für imaginäre Zeit $\tau = it$.

Vergleichen Sie letzteres mit einem Random-Walk und schreiben Sie die zugehörige Schrödingergleichung hin.

2) Teilchen im Magnetfeld und Fokker-Planck-Gleichung

Ein geladenes Teilchen (Ladung Q) im Magnetfeld $\vec{B} \propto \vec{e}_z$ hat die Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = T - V = \frac{1}{2m} (\dot{\vec{x}})^2 + Q\dot{A}\dot{\vec{x}} - V(\vec{x})$$

und bewege sich nur in der x - y -Ebene.

- Schreiben Sie zunächst die Hamiltonfunktion unter Beachtung von $q_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ und dann die Schrödingergleichung hin.
- Verwenden Sie nun die Lorentz-Eichung $A = (0, Bx, 0)$ und zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung bzgl. der x - und y -Variable separabel ist.
- Schreiben Sie für beide Variablen das Feynmansche Pfadintegral hin und zwar in der „normalen“ Zeit als auch in imaginärer Zeit $\tau = it$.
- Sei $\tilde{A}$ die Varianz der Zufallskräfte in einer einkomponentigen Langevingleichung, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial t} n(t) + f(n) = \xi(t) \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \tilde{A}\delta(t-t').$$

Identifizieren Sie nun im Pfadintegral der y -Komponente des geladenen Teilchens

- $y \equiv q \equiv n$
- $m \equiv \tilde{A}$
- $A_y \equiv f(q)/\tilde{A}$
- $V(y) \equiv f(q)^2/2\tilde{A}$

und zeigen Sie, dass die zugehörige Schrödingergleichung (in imaginärer Zeit) die Fokker-Planck-Gleichung ist. Überzeugen Sie sich, dass das y -Pfadintegral das zur Langevingleichung gehörige MSRJD-Pfadintegral ist (s. Altland-Skripte, S. *xlvi*).