# Übungen zu „Theorie ungeordneter Systeme“

Prof. Walter Schirmacher,WS 2009/10

# Blatt 6

## 1) Bewegungsgleichung des elastischen Mediums

Leiten Sie aus der Lagrangedichte des elastischen Mediums

$$\mathcal{L}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{u}_i(\vec{r},t)\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ii}(\vec{r},t)\right)^2 - \mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(\vec{r},t)\,\varepsilon_{ij}(\vec{r},t)$$

mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen für $u_i(\vec{r},t)$ her. $\varepsilon_{ij}(\vec{r},t)$ ist dabei der Dehnungstensor

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j(\vec{r},t) + \partial_j u_i(\vec{r},t)\right).$$

## 2) 2-site CPA für „skalare Schwingungen”

Wir betrachten folgende Bewegungsgleichung für „skalare Auslenkungen” $u_i(t)$ auf einem einfach-kubischen Gitter

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u_i(t) = -\sum_j K_{ij}\left(u_i(t) - u_j(t)\right)$$

wobei $K_{ij}$ räumlich fluktuierende Kraftkonstanten zwischen nächsten Nachbarn sind. In der Coherent-Potential Approximation (CPA) betrachtet man ein Referenzsystem, das als effektives Medium bezeichnet wird. In diesem fluktuieren die Kraftkonstanten nicht, sondern sind komplexe Größen, die von dem komplexen Frequenzparameter $z = -\omega^2 - i\varepsilon$ abhängen. Die Greensche Funktion des effektiven Mediums gehorcht der Bewegungsgleichung

$$zG_{ij}(z) - \delta_{ij} = Z\Gamma(z)\left(G_{lj}(z) - G_{ij}(z)\right) \tag{1}$$

wobei $Z = 6$ die Koordinationszahl, $l$ ein beliebiger Nachbar-Gitterplatz und $\Gamma(z)$ die Kraftkonstante des effektiven Mediums ist. Wir betrachten nun eine spezielle Bindung zwischen den Gitterplätzen $i_0$ und $j_0$. Bei dieser Bindung ersetzen wir die effektive Kraftkonstante $\Gamma(z)$ durch die tatsächliche Kraftkonstante $K_{i_0j_0}$, so dass wir die „Störung” $v_{i_0j_0}(z) = K_{i_0j_0} - \Gamma(z)$ erhalten.

a) Zeigen Sie, dass der durch die „Störung” verursachte Zusatzterm $V_{ij}$ des Hamiltonoperators vier von Null verschiedene Einträge hat.

b) Die CPA-Bedingung zur Bestimmung von $\Gamma(z)$ lautet, dass die gemittelte Greensche Funktion des „gestörten” Systems gleich der des effektiven Mediums ist, d.h. die gemittelte $T$-Matrix der Störung soll gleich 0 sein. Dies ist eine zweidimensionale Matrixgleichung. Zeigen Sie durch explizite Matrixinversion und unter Verwendung von (1), dass diese Gleichung zu

$$\left\langle \frac{K - \Gamma(z)}{1 + (K - \Gamma(z))\,\frac{2}{Z\Gamma(z)}\,(1 - zG_{ii}(z))} \right\rangle = 0$$

führt und bestimmen Sie die Funktion $G_{ii}(z)$.

c) Zeigen Sie, dass diese Gleichung geschrieben werden kann als

$$\Gamma(z) = \left\langle \frac{K}{1 + (K - \Gamma(z))\,\frac{2}{Z\Gamma(z)}\,(1 - zG_{ii}(z))} \right\rangle.$$

und leiten Sie, in dem sie in 2. Ordnung den Nenner nach $K - \Gamma$ entwickeln eine “2-site SCBA” für die Größe $\Sigma(z) = -[\Gamma(z) - \langle K\rangle]$ her.