

Übungen zur Vorlesung Theorie II (Elektrodynamik)

Blatt 1

Vorbemerkungen: Die Blätter werden von den Tutoren korrigiert. Um die Klausurzulassung zu erwerben, müssen Sie 50 % der Gesamtpunktzahl erzielen. Auf jedes Blatt gibt es 30 Punkte. Bitte geben Sie auf jedem Blatt auch an, wieviel Zeit Sie für die Bearbeitung gebraucht haben.

Quickies:

1. Wie lauten die Maxwellgleichungen im Vakuum im Gaußschen Maßsystem? Erläutern Sie die einzelnen Terme
2. Wie lautet die Gleichung für die Lorentzkraft auf ein Punktteilchen im Gaußschen Maßsystem? Erläutern Sie die einzelnen Terme.
3. Was ist das Gauß'sche Maßsystem? Gibt es noch andere Maßsysteme? Geben Sie Beispiele.
4. Was ist eine Kontinuitätsgleichung?
5. Wie lautet die Gleichung, die die Erhaltung der Ladung beschreibt?
6. Erläutern Sie das Gauß'sche Gesetz
7. Erläutern Sie das Ampere'sche Gesetz
8. Erläutern Sie die Poisson-Gleichung
9. Erläutern Sie das Faraday'sche Induktionsgesetz
10. Erläutern Sie den Maxwell'schen Verschiebungsstrom. Warum musste er eingeführt werden?
11. Wie lautet der Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes?
12. Was ist der Poynting-Vektor? Was beschreibt er? Geben Sie die Gleichung dafür an.
13. Wie lautet der Ausdruck für die Impulsdichte des elektromagnetischen Feldes?
14. Wie ist der Maxwellsche Spannungstensor definiert?
15. Wie lautet der Impulssatz in der Elektrodynamik?
16. Erläutern Sie die Begriffe von Vektorpotential und skalarem Potential in der Elektrodynamik.

Aufgaben (abzugeben bis 8. Mai, 13:00 Uhr, im roten Kasten 34, Erdgeschoss Physik-Gebäude)

Aufgabe 1) Punktladung im elektromagnetischen Feld (12 Punkte)

Berechnen Sie die Bewegung einer Punktladung q der Masse m im homogenen statischen Feld $\vec{E}, \vec{B}$. Gehen Sie dabei folgendermassen vor:

- (a) Zeigen Sie: Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems lassen sich die Bewegungsgleichungen schreiben als

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{q}{c} \dot{y} B \\ m\ddot{y} &= q E_{\perp} - \frac{q}{c} \dot{x} B \\ m\ddot{z} &= q E_{\parallel} \end{aligned}$$

Dabei ist $E_{\parallel}$ der zu $\vec{B}$ parallele Anteil von $\vec{E}$ und $E_{\perp}$ der senkrechte Rest.

- (b) Zeigen Sie: Für orthogonale Felder $\vec{E} \perp \vec{B}$ gibt es eine Schar von Lösungen, bei denen die Ladung eine konstante Geschwindigkeit $\vec{v}$ hat. Wie lauten sie?
- (c) Lösen Sie für allgemeine $\vec{E}, \vec{B}$ die Gleichungen aus (a) für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0)$ (d.h. $\dot{x}(0) = v_0, \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$).

Hinweise:

- Die Gleichung für $z(t)$ kann separat gelöst werden.
 - Wenden Sie bzgl. $x(t), y(t)$ das bekannte Verfahren für inhomogene lineare Differentialgleichungen an, d.h. lösen Sie zuerst die homogene Gleichung ($E_{\perp} = 0$) und addieren Sie dann eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (z.B. aus (b)) hinzu.
 - Sie können sich Schreibarbeit sparen, wenn Sie Abkürzungen einführen, z.B. $\Omega = qB/cm$ und $v_B = cE_{\perp}/B$.
- (d) Zeichnen Sie die Projektionen möglicher Bahnen in der (xy) -Ebene. Wann haben die Bahnen welche Form?

Aufgabe 2) Drehimpuls des elektromagnetischen Feldes (10 Punkte)

Betrachten Sie einen Zylinderkondensator, bestehend aus zwei coaxialen Zylindern der Länge L mit Innenradius R_1 und Außenradius R_2 . Die beiden Zylinder tragen die Ladung $\pm Q$. Zusätzlich ist ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ angelegt, das in Richtung parallel zum Zylinder zeigt.

- (a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ im Kondensator. Vernachlässigen Sie dabei Randeffekte, d.h. rechnen Sie im Grenzfall $L \gg R_{1,2}$.
- (b) Berechnen Sie die Impulsdichte $\vec{g}$ des elektromagnetischen Feldes und den Gesamtimpuls.
- (c) Aus der Impulsdichte kann man auch eine Drehimpulsdichte $\vec{l}_F = \vec{r} \times \vec{g}$ ableiten. Berechnen Sie diese und den Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_F$ des Feldes.
- (d) Wenn man das magnetische Feld abschaltet, wird der elektromagnetische Drehimpuls in mechanischen Drehimpuls überführt. Diskutieren Sie die Drehimpulsbilanz.

Berechnen Sie dazu zuerst nach dem Faradayschen Induktionsgesetz das elektrische Feld und das daraus resultierende Drehmoment, das durch eine Magnetfeldänderung $\partial_t \vec{B}$ auf die Ladungen $\pm Q$ in den Zylindern ausgeübt wird. Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit $\partial_t \vec{L}_F$.

Aufgabe 3) Ladungsverteilung des Wasserstoffatoms (8 Punkte)

Das elektrostatische Potential des neutralen Wasserstoffatoms lautet

$$\Phi(r) = \frac{q}{r} e^{-2r/a_0} \left(1 + \frac{r}{a_0}\right).$$

Hier ist q die Elementarladung und a_0 der Bohrsche Radius.

- (a) Berechnen Sie aus $\vec{E} = -\nabla\Phi$ und dem Gaußschen Gesetz die Ladung $Q(R)$, die innerhalb einer Kugel des Radius R liegt. Überzeugen Sie sich davon, dass die Gesamtladung verschwindet, d.h. $\lim_{R \rightarrow \infty} Q(R) = 0$.
- (b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho(r)$ und diskutieren Sie sie. Achten Sie darauf, dass das Integral über $\rho(r)$ verschwinden muss.
- (c) Welches Potential würde die Elektronenhülle alleine (ohne den Kern) erzeugen?

Hinweis: Verwenden Sie Kugelkoordinaten. Ausdrücke für den Nabla- und Laplace-Operator in Kugelkoordinaten finden Sie z.B. in auf Seite 96 in meinem MRM-Skript:

www.staff.uni-mainz.de/schmidfr/Lehre/Skripte/Mathematische_Rechenmethoden.pdf