

Übungen zur Vorlesung Theorie II (Elektrodynamik)

Blatt 9

Quickies:

113. Wie lautet die Lagrangedichte für ein freies elektromagnetisches Feld?
114. Wie lautet die Lagrangedichte für ein elektromagnetisches Feld, das mit Materie wechselwirkt?
115. Was versteht man unter einem Viererstrom?
116. Wie lauten die Maxwellgleichungen (i) ausgedrückt in $\vec{E}$ und $\vec{B}$, (ii) ausgedrückt in $F^{\mu\nu}$, (iii) ausgedrückt in A^μ , in Lorentz-Eichung?
117. Warum haben Photonen keine Masse?
118. Was ist eine Kontinuitätsgleichung? Was haben Kontinuitätsgleichungen mit Erhaltungsgrößen zu tun?
119. Wie kann man aus einer Symmetrie der Lagrangedichte auf eine Kontinuitätsgleichung bzw. eine Erhaltungsgröße schließen?
120. Welche Kontinuitätsgleichung folgt aus der Eichinvarianz? Welche Größe ist deswegen erhalten?
121. Welche Kontinuitätsgleichungen folgen aus Invarianz bzgl. Raum-Zeit-Translationen?
122. Was ist das Maxwellsche Tensorfeld?
123. Wann erfüllt das Maxwellsche Tensorfeld eine Kontinuitätsgleichung?
124. Was tritt an die Stelle, wenn die Kontinuitätsgleichung nicht mehr erfüllt ist?

Aufgabe (für Interessierte, wird nur auf Wunsch besprochen, ist auch nicht klausurrelevant)

Aufgabe 29) Lagrangedichte für massive Photonen

Mit Hilfe des Lagrangeformalismus kann theoretisch untersucht werden, wie sich eine nichtverschwindende Photonenmasse auf die Gleichungen der Elektrodynamik auswirken würde. Dazu wird die Lagrangedichte um einen "Masseterm" ergänzt (Procasche Lagrangedichte):

$$\mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{8\pi} A_\mu A^\mu - \frac{1}{c} J_\mu A^\mu + \mathcal{L}_{\text{Materie}}. \quad (1)$$

- (a) Erläutern Sie kurz, warum der Masseterm $m^2 A_\mu A^\mu$ in der gewöhnlichen Formulierung der Elektrodynamik nicht auftaucht.
- (b) Leiten Sie aus der Lagrangedichte die Bewegungsgleichungen für die Felder ab. Die Lösung ist $\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 A_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu$.
- (c) Zeigen Sie: Wenn der Viererstrom der Materie die Kontinuitätsgleichung erfüllt, $\partial_\mu J^\mu = 0$, dann folgt daraus $\partial_\mu A^\mu = 0$.
- (d) Betrachten Sie nun eine statische, im Ursprung ruhende Punktladung q . Stellen Sie für diesen Fall die Feldgleichungen für das skalare Potential Φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ auf. Zeigen Sie, daß diese durch $\vec{A} \equiv 0$ und $\Phi(r) = q/r \exp(-mr)$ gelöst werden. Was folgt daraus für das Coulomb-Gesetz für die Kraft zwischen zwei geladenen Teilchen?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß $\Phi(r)$ die Feldgleichung bei $r \neq 0$ erfüllt. Um den Fall $r \rightarrow 0$ zu behandeln, integrieren Sie z.B. über ein infinitesimales Volumenelement um $r = 0$ und wenden Sie den Gaußschen Satz an.