Institut für Physik SS 2017

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie II (Elektrodynamik)

Blatt 2

Quickies:

16. Erläutern Sie die Begriffe von Vektorpotential und skalarem Potential in der Elektrodynamik
17. Was versteht man unter Eichinvarianz? Was ist eine Eichtransformation? Geben Sie einige wichtige Eichungen an.
18. Wie lauten die Maxwellgleichungen in Potentialschreibweise in der Coulomb-Eichung? In der Lorenz-Eichung?
19. Wie lauten die stationären Maxwellgleichungen?
20. Welche Gleichungen erfüllen die zugehörigen Potentiale in Coulomb-Eichung?
21. Geben Sie die allgemeine Lösung für das elektrostatische Potential Φ und das elektrostatische Feld $\vec{E}$ im unbegrenzten Raum bei vorgegebener stationärer Ladungsverteilung an.
22. Geben Sie die allgemeine Lösung für das Vektorpotential $\vec{A}$ und das Magnetfeld $\vec{B}$ im unbegrenzten Raum bei vorgegebener stationärer Stromdichteverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ an.
23. Wie lautet das Gesetz von Biot-Savart-Ampère? tem Was versteht man in der Elektrostatik und Magnetostatik unter Multipolentwicklung?
24. Was ist das Monopolmoment einer Ladungsverteilung?
25. Wie ist das Dipolmoment und das Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung definiert?
26. Wie lauten die führenden Terme (bis zur zweiten Ordnung) des Fernfeldes einer stationären Ladungsverteilung?
27. Welche Kraft wirkt auf einen elektrischen Monopol in einem äusseren elektrostatischen Feld? auf einen elektrischen Dipol?
28. Wie ist die Energie einer Ladungsverteilung im äußeren Potential?
29. Was sind Kugelflächenfunktionen?
30. Wie lautet die Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten?

Aufgaben (abzugeben bis 15. Mai, 13:00 Uhr, im roten Kasten 34, Erdgeschoss Physik-Gebäude)

Aufgabe 4) Elektrostatisches Potential (4 Punkte)

Zeigen Sie: Innerhalb eines leeren, ladungsfreien Raumbereichs kann das elektrostatische Potential kein Minimum oder Maximum haben. Mit anderen Worten: Es gibt keinen Ort, an dem eine Testladung stabil festgehalten werden kann – unabhängig davon, wie man ausserhalb des Raumbereichs Ladungen verteilt.

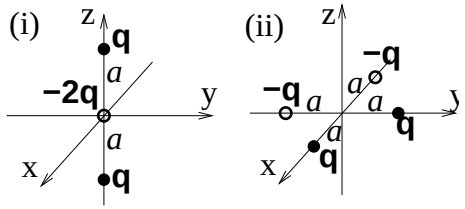
Aufgabe 5) Vektorpotential (6 Punkte)

Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld in z-Richtung, $\vec{B} = (0, 0, B)$.

(a) Bestimmen Sie zwei mögliche Vektorpotentiale $\vec{A}$, und $\vec{A}'$ zu $\vec{B}$, so dass $\vec{A}$ nur eine x-Komponente hat und $\vec{A}'$ nur eine y-Komponente.

(b) Zeigen Sie, dass die beiden Vektorfelder $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen und geben Sie die Erzeugende der Transformation an, d.h. die Funktion $\Lambda(\vec{r})$ mit $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$.

Aufgabe 6) Multipolentwicklung (10 Punkte)



Betrachten Sie die links gezeichneten Ladungsverteilungen. In Ladungsverteilung (i) ist je eine Ladung q bei $(x, y, z) = (0, 0, \pm a)$ und eine Ladung $-2q$ am Ursprung. In Ladungsverteilung (ii) sind Ladungen q bei $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ und Ladungen $-q$ bei $(-1, 0, 0)$ und $(0, -1, 0)$.

(a) Berechnen Sie das kartesischen Monopolmoment, Dipolmoment, und Quadrupolmoment für die beiden Ladungsverteilungen.

(b) Geben Sie für beide Ladungsverteilungen den in $1/r$ führenden Term des elektrostatischen Potentials $\Phi(\vec{r})$ an.

(c) Berechnen Sie nun für beide Ladungsverteilungen die sphärischen Multipolmomente q_{lm} von niedrigster nichtverschwindender Ordnung l.

(d) Drücken Sie $\Phi(\vec{r})$ durch q_{lm} aus. Setzen Sie die in (c) berechneten Ausdrücke ein und verifizieren Sie explizit, dass das Ergebnis mit dem aus (b) übereinstimmt.

Aufgabe 7) Kugelflächenfunktionen (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde für zwei Vektoren $\vec{r}$, $\vec{r}'$ mit $r > r'$ der folgende Ausdruck angegeben:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \Big(\frac{4\pi}{2l+1}\, r'^{l} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi) \Big) \text{ für } r > r' \tag{1}$$

In dieser Aufgabe sollen Sie den Ausdruck verifizieren.

Zusätzlich zu den in der Vorlesung (bzw. Skript) angegebenen Gleichungen brauchen Sie dafür noch die folgenden zwei Zusammenhänge:

- Es gilt: $Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$, wobei $P_l(x)$ das l-te Legendre-Polynom ist mit $P_l(1) = 1$.
- Das Additionstheorem: Für Einheitsvektoren $\vec{e}$, $\vec{e}'$ mit Kugelkoordinaten (θ, ϕ) und (θ', ϕ') gilt

$$P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi')\, Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{2}$$

(a) Definieren Sie eine Funktion $\Phi(\vec{r}) := 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$. Nehmen Sie an, dass $\vec{r}'$ auf der z-Achse liegt. Zeigen Sie, dass sich $\Phi(\vec{r})$ dann folgendermaßen entwickeln läßt: $\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{r^{l+1}} Y_{l0}(\theta, \phi)$
Hinweise: Folgendes wurde in der Vorlesung gezeigt oder zumindest besprochen:
  – Die allgemeine Lösung von $\Delta\Phi = 0$ für Funktionen $\Phi(\vec{r})$ lautet:
    $\Phi(\vec{r}) = \sum_{lm} (a_{lm}(r) r^l + b_{lm}/r^{l+1}) Y_{lm}(\theta, \phi)$
  – Beliebige Funktionen $f(\theta, \phi)$ kann man nach $Y_{lm}(\theta, \phi)$ entwickeln gemäß
    $f(\theta, \phi) = \sum_{lm} c_{lm} Y_{lm}$ mit $c_{lm} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi)$.

(b) Berechnen Sie die Koeffizienten b_l aus (a). Betrachten Sie dafür zunächst den Spezialfall, dass auch $\vec{r}$ auf der z-Achse liegt und verallgemeinern Sie dann.

(c) Um zu Gleichung (1) zu kommen, müssen Sie nun die Entwicklung aus (a,b) für beliebige $\vec{r}'$ verallgemeinern (d.h. $\vec{r}'$ ist nicht mehr unbedingt auf der z-Achse). Verwenden Sie dafür das Additionstheorem (2).