

Übungen zur Vorlesung Theorie II (Elektrodynamik)

Blatt 5

Quickies:

49. Was sind Dirichletsche Randbedingungen? Wo sind sie physikalisch realisiert?
50. Was sind von Neumannsche Randbedingungen? Wo sind sie physikalisch realisiert?
51. Was versteht man unter Spiegelladungen und wann treten sie auf?
52. Erläutern Sie das Konzept der Greenschen Funktion.
53. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen Greenschen Funktionen und Spiegelladungen
54. Wie lautet die Greens-Funktion für die Laplace-Gleichung im unbegrenzten Raum?
55. Wie ist das elektrostatische Potential innerhalb eines Leiters?
56. Was versteht man in einem System von Leitern unter Kapazitäten und Kapazitätskoeffizienten?
57. Was sind dispergierende und dissipative Medien? Nennen Sie Beispiele.
58. Wie ist der Brechungsindex definiert, was beschreibt er und warum heisst er so?
59. Skizzieren Sie das $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld einer linear polarisierten Welle mit Ausbreitungsvektor $\hat{k}$
60. Was versteht man unter Phasengeschwindigkeit?
61. Wie viele unabhängige Polarisationsrichtungen hat eine elektromagnetische Welle?
62. Was versteht man unter einer zirkular polarisierten Welle?

Aufgaben (abzugeben bis 12.Juni, 13:00 Uhr, im roten Kasten 34, Erdgeschoss Physik-Gebäude)

Aufgabe 14) Spiegelladungen II (10 Punkte)

Die Spiegelladungs-Methode kann auch für leitende Kugeln angewendet werden. Betrachten Sie eine geerdete leitende Kugel des Radius R mit Mittelpunkt im Ursprung. Eine Ladung q sitze bei $(x, y, z) = (0, 0, z_0)$, ($z_0 > R$). In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass man mit Hilfe einer einzigen virtuellen Spiegelladung q' innerhalb der Kugel ein Potential außerhalb der Kugel konstruieren kann, das die Maxwellgleichungen und die Randbedingung $\Phi \equiv 0$ an der Oberfläche der Kugel erfüllt.

- (a) Betrachten Sie vorab zwei Punktladungen $q_1 > 0, q_2 < 0$ am Ort $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, 0, d)$ (mit $d > 0$). Berechnen Sie die Äquipotentialfläche $\Phi = 0$.

Ergebnis: Es ist die Oberfläche einer Kugel

mit Radius $R = d \left| \frac{q_1 q_2}{q_1^2 - q_2^2} \right|$ und Zentrum bei $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{q_1^2 d}{q_1^2 - q_2^2}$.

- (b) Benutzen Sie das Ergebnis von (a), um für unser Problem die Lage (x^*, y^*, z^*) und den Wert q^* der Spiegelladung zu bestimmen.
- (c) Geben Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ für $\vec{r}, \vec{r}'$ außerhalb der Kugel an.

Aufgabe 15) Greens-Funktion des d'Alembert Operators (12 Punkte)

Berechnen Sie die Greens-Funktion des d'Alembert Operators im unbegrenzten Raum, d.h., lösen Sie die inhomogene Wellengleichung $\square G(\vec{r}, t) = 4\pi\delta(\vec{r})\delta(t)$

Gehen Sie dabei z.B. folgendermassen vor:

- (a) Nehmen Sie eine Fouriertransformation $\vec{r} \rightarrow \vec{k}$ im Raum vor.

$$\text{Sie erhalten } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{G}(\vec{k}, t) + k^2 \hat{G}(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta(t)$$

- (b) Lösen Sie diese Differentialgleichung allgemein für $t \neq 0$.

- (c) Die Lösung ist noch nicht eindeutig. Fordern Sie zusätzlich $\hat{G}(\vec{k}, t) \equiv 0$ für $t < 0$. Das entspricht der Forderung nach Kausalität (zur Zeit $t < 0$ "weiss" $G(\vec{r}, t)$ noch nichts von dem Wirken der Delta-Funktionen bei $t = 0$.)

Bestimmen Sie nun die Randbedingungen bei $t \rightarrow 0^+$ und lösen Sie die Gleichung aus (a) für diese Randbedingung.

Sie erhalten $\hat{G}(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{c}{k} \sin(ckt) \theta(t)$, wobei $\theta(t)$ die Heaviside Theta Funktion ist.

Hinweis: Betrachten Sie zur Ermittlung der Randbedingung $\int_{-\infty}^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{G}(\vec{k}, t)$ und $\int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \hat{G}(\vec{k}, t)$. Was ändert sich beim Übergang von $t \rightarrow 0^-$ zu $t \rightarrow 0^+$?

- (d) Transformieren Sie $\hat{G}(\vec{k}, t)$ zurück nach $G(\vec{r}, t)$. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der im Skript, Seite 49, angegebenen Greensfunktion.

Allgemeiner Hinweis: Wenn Sie Schwierigkeiten mit der δ -Funktion und der Fourier-Transformation haben, dann gehen Sie auch in der Pfingstwoche in die Tutorien und bearbeiten dort das Präsenzblatt 2.

Aufgabe 16) Liénard-Wiechert Potentiale (8 Punkte)

In der Vorlesung wird gezeigt werden, dass die Potentiale einer gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}, t)$ und Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r}, t)$ die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \int dt' \rho(\vec{r}', t') \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \int d^3r' \int dt' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{c} \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Potentiale die Lorentz-Eichung erfüllen, wenn $\rho(\vec{r}, t)$ und $\vec{j}(\vec{r}, t)$ auf ein endliches Raumgebiet beschränkt sind.