

Übungen zur Vorlesung Theorie II (Elektrodynamik)

Blatt 6

Quickies:

63. Wie lautet das Reflexionsgesetz?
64. Wie lautet das Snelliussche Gesetz?
65. Was beschreiben die Fresnelschen Formeln?
66. Unter welchen Umständen können elektromagnetische Wellen in Leiter eindringen?
67. Was versteht man unter der Skin-Tiefe? Wie hängt sie von der Frequenz einer elektromagnetischen Welle ab?
68. Geben Sie die elektromagnetischen Potentiale von beliebigen Ladungs- und Stromverteilungen im unbegrenzten Raum an.
69. Was beschreiben die Liénard-Wiechert Potentiale? Welche Form haben sie?

Aufgaben (abzugeben bis 19.Juni, 13:00 Uhr, im roten Kasten 34, Erdgeschoss Physik-Gebäude)

Aufgabe 17) Fresnel-Formeln (10 Punkte)

Das Verhalten einer elektromagnetischen Welle beim Durchgang durch eine Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien mit Dielektrizitätskonstante ϵ, ϵ' und magnetischer Permittivität μ, μ' wird durch die in der Vorlesung angegebenen Fresnel-Formeln beschrieben.

Für den Anteil der $\vec{E}$ -Felder, der senkrecht zur Einfallsebene polarisiert ist (d.h. der von dem Ausbreitungsvektor $\vec{k}$ und dem Normalenvektor $\vec{N}$ aufgespannten Ebene), lauten sie:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n \cos \alpha}{n \cos \alpha + n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha'} \quad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{n \cos \alpha - n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha'}{n \cos \alpha + n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha'}$$

und für den Anteil parallel zur Einfallsebene:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n \cos \alpha}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha + n \cos \alpha'} \quad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha - n \cos \alpha'}{n' \frac{\mu}{\mu'} \cos \alpha + n \cos \alpha'}$$

mit $\cos \alpha' = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \alpha}$.

Hier ist $\vec{E}'_0$ die Amplitude der gebrochenen Welle und $\vec{E}''_0$ die Amplitude der reflektierten Welle, α ist der Einfallswinkel zum Normalenvektor auf der Oberfläche, α' der entsprechende Winkel der gebrochenen Welle, und n, n' die Brechungsindizes der Medien.

Betrachten Sie den Fall $\mu = \mu'$.

- (a) Leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen für $\vec{B}$ und $\vec{E}$ an der Grenzfläche die Fresnel-Gleichungen für den Anteil parallel zur Einfallsebene her.
- (b) Bei einem bestimmten Einfallswinkel ist das reflektierte Licht vollständig in Richtung senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Berechnen Sie diesen Winkel.
- (c) Im Fall $n > n'$ tritt ab einem Winkel α_t Totalreflexion ein, das heisst, für $\alpha > \alpha_t$ tritt kein Licht durch die Grenzfläche. (Betrachten Sie dazu die möglichen Werte von α' .)
Anmerkung: Diese Situation tritt z.B. ein, wenn sie im Schwimmbad unter Wasser schräg nach oben schauen. Bei Totalreflexion tritt die Welle nicht in das Medium mit $n' < n$ ein, sondern wird darin exponentiell gedämpft.

Aufgabe 18) Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung (14 Punkte)

In der Vorlesung wurden die von einer bewegten Punktladung q mit Trajektorie $\vec{R}(t)$ erzeugten elektromagnetischen Potentiale hergeleitet. Das Ergebnis in Lorentz-Eichung lautete:

$$\Phi(\vec{r}, t) = q \left/ \left(|\vec{r} - \vec{R}'| - \frac{\vec{v}' \cdot (\vec{r} - \vec{R}')}{c} \right) \right|_{t'=t_{\text{ret}}}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}'}{c} \Phi(\vec{r}, t)$$

wobei $\vec{R}' := \vec{R}(t')$, $\vec{v}' := \dot{\vec{R}}(t')$ und t_{ret} definiert ist als die Lösung von $(t - t_{\text{ret}}) = \frac{1}{c} |\vec{r} - \vec{R}(t_{\text{ret}})|$.

In dieser Aufgabe sollen Sie diese Gleichungen auf eine gleichförmig bewegte Punktladung mit Trajektorie $\vec{R}(t') = \vec{v} t'$ anwenden, wobei $\vec{v}$ konstant ist. Setzen Sie einfachheitshalber $t = 0$.

- (a) Zeigen Sie vorab: Wegen $\vec{A} = \Phi \vec{v}/c$ gilt in Lorentz-Eichung: $\vec{E} = -\nabla\Phi + \frac{\vec{v}}{c}(\frac{\vec{v}}{c} \cdot \nabla)\Phi$ und $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{E}$.
- (b) Bestimmen Sie nun die elektromagnetischen Potentiale $\Phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$.
- (c) Berechnen Sie daraus das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Sie erhalten

$$\vec{E} = \frac{q(1 - (v/c)^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{v}/c)^2}^3} \vec{r}, \quad \vec{B} = \frac{q(1 - (v/c)^2)}{\sqrt{r^2 - (\vec{r} \times \vec{v}/c)^2}^3} \left(\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{r} \right)$$

- (d) Diskutieren Sie den Fall $v/c \ll 1$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Feld einer ruhenden Punktladung.
- (e) Berechnen Sie die Kraft zwischen zwei Ladungen, die mit gleicher Geschwindigkeit $\vec{v}$ und im Abstand $\vec{r} \perp \vec{v}$ nebeneinander herfliegen. Wie hängt diese Kraft von der Geschwindigkeit der Teilchen ab?

Aufgabe 19) Zeitdilatation in der Relativitätstheorie (6 Punkte)

In der Atmosphäre werden in etwa 15 km Höhe Myonen erzeugt, die sich fast mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegen: $v = 0.9992 c$. Myonen sind instabil und zerfallen mit einer Halbwertszeit von 1.5 Mikrosekunden in ihrem eigenen Ruhesystem.

Nehmen Sie an, es werden N_0 Myonen erzeugt, die senkrecht auf die Erde zufliegen.

- (a) Wie viel Prozent der Myonen würden die Erde erreichen, wenn man relativistische Effekte vernachlässigen könnte?
- (b) Wie viel Prozent der Myonen erreichen die Erde, wenn man die Relativitätstheorie berücksichtigt?