Institut für Physik SS 2017

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung Theorie II (Elektrodynamik)

Blatt 8

Quickies:

81. Was ist der metrische Tensor?
82. Was versteht man unter einem Linienelement? Wie transformieren sich Linienelemente unter Lorentz-Transformationen?
83. Welche Form haben allgemeine Lorentz-Transformationen? Welche Bedingung muß die Transformationsmatrix erfüllen?
84. Welche Transformationen umfaßt die Poincaré-Gruppe, die homogene Lorentz-Gruppe, die eigentlich orthochrone Lorentz-Gruppe?
85. Erläutern Sie die zehn freien Parameter einer allgemeinen Lorentz-Transformation.
86. Wie lautet die Einsteinsche Summenkonvention?
87. Was versteht man unter einem Minkowski-Diagramm? Wo liegt darin der Lichtkegel und was stellt er dar?
88. Was sind raumartige, zeitartige, lichtartige Vierervektoren?
89. Wann kann ein Ereignis ein anderes kausal beeinflussen?
90. Was versteht man unter einem Weltpunkt? Einer Weltlinie? Welche wichtige Eigenschaft muss eine Weltlinie haben?
91. Wie ist die Eigenzeit einer Weltlinie definiert?
92. Was ist die Weltgeschwindigkeit?
93. Welche Eigenschaft definiert einen kontravarianten Vierervektor? Einen kovarianten Vierervektor? Nennen Sie Beispiele.
94. Was versteht man unter einem Vierertensor?
95. Wie sieht die "kovariante Formulierung" eines physikalischen Gesetzes aus? Was ist der Nutzen einer solchen Formulierung?

Aufgaben (abzugeben bis 3. Juli, 13:00 Uhr, im roten Kasten 34, Erdgeschoss Physik-Gebäude)

Aufgabe 23) Gleichzeitigkeit und Kausalität (10 Punkte)

In einem vorgegebenen Inertialsystem findet folgende Serie von Ereignissen E_i zu den Zeiten t_i an den Orten $\vec{r}_i$ statt.

E_1	$x_1 = 2m$	$y_1 = 2m;$	$z_1 = 4m$	$t_1 = 0$
E_2	$x_2 = -2m$	$y_2 = -1m$	$z_2 = 0$	$t_2 = 2 \cdot 10^{-8} s$
E_3	$x_3 = 0$	$y_3 = 0$	$z_3 = 2m$	$t_3 = 3 \cdot 10^{-8} s$

Betrachten Sie nacheinander alle Paare von Ereignissen (E_1, E_2), (E_1, E_3), (E_2, E_3).

(a) Kann es ein Inertialsystem geben, in dem das Ereignispaar gleichzeitig ist? Mit welcher Geschwindigkeit müßte sich dieses Inertialsystem relativ zum Ruhsystem bewegen?

(b) Kann es zwischen den Ereignissen des Paars einen kausalen Zusammenhang geben? Wenn ja, welches Ereignis kann welches beeinflussen?

Aufgabe 24) <u>**Weltlinie**</u> (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen, das bei $t = 0$ in Ruhe startet, und dann in Richtung x beschleunigt wird. Im mitbewegten System sei die Beschleunigung zur Eigenzeit τ durch $a(\tau)$ gegeben. Zeigen Sie, daß das Teilchen nach der Eigenzeit τ die Strecke

$$x = c \int_0^\tau \mathrm{d}\tau' \, \sinh(U(\tau')/c) \qquad \text{mit} \quad U(\tau) := \int_0^\tau \mathrm{d}\tau' \, a(\tau')$$

zurückgelegt hat.

Hinweis: Betrachten Sie Inertialsysteme $\bar{\Sigma}_{\tau'}$, die zu gegebenen Eigenzeiten τ' genau mit dem mitbewegten System übereinstimmen, und wenden Sie das Geschwindigkeitsadditionstheorem auf infinitesimale Geschwindigkeitsänderungen $\mathrm{d}\bar{v} = a\mathrm{d}\tau$ im System $\bar{\Sigma}_{\tau'}$ an.

Aufgabe 25) <u>**Vierer-Tensor**</u> (10 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass Naturgesetze im Rahmen von Vierergrößen formuliert werden müssen, um mit der speziellen Relativitätstheorie kompatibel zu sein, d.h. mit Größen $t^{\sigma_1 \ldots \sigma_n}{}_{\rho_1 \ldots \rho_m}$ die sich gemäß

$$\bar{t}^{\mu_1 \ldots \mu_n}{}_{\nu_1 \ldots \nu_m} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\sigma_1} \ldots \Lambda^{\mu_n}{}_{\sigma_n} t^{\sigma_1 \ldots \sigma_n}{}_{\rho_1 \ldots \rho_m} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho_1}{}_{\nu_1} \cdots \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho_m}{}_{\nu_m}$$

transformieren. Dabei gilt die Einstein'sche Summenkonvention und Λ ist eine Lorentztransformationsmatrix, Λ^{-1} ist das Inverse.

Ohne Beweis ist eine solche Größe der elektrische Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie zunächst: In Matrixschreibweise gilt für $F = \{F^{\mu\nu}\}$, $\Lambda = \{\lambda^\mu{}_\nu\}$ konkret die Transformationsregel $\bar{F} = \Lambda \, F \Lambda^T$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) die transformierten Feldkomponenten bei einer speziellen Lorentztransformation (einem Boost) mit $\vec{v} = (v, 0, 0)$.

(c) Die Inverse der Lorentztransformation aus (b) (Λ^{-1}) erhalten Sie, indem sie die umgekehrte Geschwindigkeit benutzen. Überprüfen Sie, ob Sie für den Feldstärketensor in kovarianter Schreibweise

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

das gleiche Ergebnis wie in (b) bekommen.