

Übungen zur Vorlesung Theorie II (Elektrodynamik)

Blatt 9

Quickies:

96. Wie ist der Viererimpuls definiert?
97. Welche physikalische Bedeutung haben die nullte Komponente p^0 und die Norm $p_\mu p^\mu$ des Viererimpulses?
98. Wie hängen in der speziellen Relativitätstheorie Impuls- und Energieerhaltung miteinander zusammen?
99. Erklären Sie das berühmte Gesetz $E = mc^2$.
100. Was versteht man unter der Ruhmasse und der Ruhenergie eines Massenpunktes?
101. Warum müssen Teilchen ohne Ruhmasse Lichtgeschwindigkeit haben?
102. Formulieren Sie die Lagrange-Funktion für ein kräftefreies Teilchen in kovarianter Form.
103. Welche Größe wird von der Trajektorie eines freien Teilchens minimiert?
104. Wie lautet die Lagrangefunktion eines Punkt-Teilchens im elektromagnetischen Feld? Welche Bewegungsgleichung ergibt sich daraus?
105. Erläutern Sie die Begriffe des elektromagnetischen Viererpotentials und des Feldstärketensors. Wie hängen die beiden zusammen?
106. Wie gehen die elektromagnetischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in den Feldstärketensor ein?
107. Was ist die Lorentzkraft?
108. Was versteht man unter Eichinvarianz?
109. Wie kann man die Lorenzgleichung kovariant ausdrücken?
110. Was versteht man unter einer Lagrangedichte?
111. Aus welchem allgemeinen Prinzip ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen? Wie lauten sie?
112. Wie ist der kanonische Energie-Impuls-Tensor definiert?

Aufgaben (abzugeben bis 10. Juli, 13:00 Uhr, im roten Kasten 34, Erdgeschoss Physik-Gebäude)

Aufgabe 26) Relativistische Raketengleichung (10 Punkte)

Eine relativistische Rakete bewege sich relativ zum ruhenden Beobachter mit Geschwindigkeit $v(t)$. Im mitbewegten System habe sie zu gegebener Eigenzeit τ die Ruhmasse $m(\tau)$ und stosse im Eigenzeitraum $d\tau$ Treibstoff der Masse $d\mu$ mit konstanter relativer Geschwindigkeit V_g ab. Dadurch wird die Rakete beschleunigt.

Reibungseffekte und äußere (Gravitations)kräfte sollen nicht berücksichtigt werden.

- (a) Stellen Sie im mitbewegten System zu gegebener Zeit τ für den infinitesimalen Zeitraum $d\tau$ die Impulsbilanzgleichung auf. Sie dürfen dabei $V_g \ll c$ annehmen.
- (b) Leiten Sie daraus die Raketengleichung im Ruhssystem her:

$$m \frac{dv}{dt} + V_g \frac{dm}{dt} (1 - \beta^2) = 0 \quad \text{mit} \quad \beta = v/c.$$

- (c) Die Rakete habe zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit Null und die Masse m_0 . Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(m)$ zu späteren Zeiten als Funktion der verbleibenden Masse m .

Hinweis: $\int dx/(1-x^2) = \text{Artanh}(x)$ für $x < 1$.

- (d) Was ändert sich, wenn V_g mit c vergleichbar wird?

Achtung: Für die Beantwortung dieser Frage müssen Sie die vollständige Energie-Impuls-Bilanzgleichung für alle Komponenten des Vierervektors p berücksichtigen. Beachten Sie, dass die gesamte Ruhmasse im System (d.h. die Summe der Ruhmassen von Rakete und Treibstoff) sich während des Prozesses verändern kann.

Aufgabe 27) Lagrange-Funktion im elektromagnetischen Feld (10 Punkte)

Die Lagrangefunktion eines Punktteilchens im elektromagnetischen Feld ist

$$\mathcal{L} = - \left[mc \sqrt{\frac{dx_\mu}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda}} + \frac{q}{c} A_\mu(x) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right].$$

Hier ist $\{A_\mu\}(x) = (\Phi, -\vec{A})$ das sogenannte Viererpotential des elektromagnetischen Feldes, wobei Φ und $\vec{A}$ die aus Kapitel 1 bekannten Potentiale des elektromagnetischen Feldes sind.

Der kanonische Viererimpuls ist in Analogie zur nichtrelativistischen Mechanik definiert als

$$P^\mu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (dx_\mu/d\lambda)}$$

- Berechnen Sie P für freie Teilchen ($A \equiv 0$). Zeigen Sie, dass P in diesem Fall identisch mit dem Energie-Impuls-Vektor ist.
- Berechnen Sie P für Teilchen im elektromagnetischen Feld.
- Leiten Sie die Bewegungsgleichungen her.
- Das Viererpotential $\{A_\mu\}$ hängt mit dem Feldstärketensor aus Aufgabe 25) über die folgende Gleichung zusammen: $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Nutzen Sie diesen Zusammenhang, um zu überprüfen, dass im nichtrelativistischen Grenzfall die Lorentzkraft richtig herauskommt. Was ändert sich, wenn $v \approx c$ wird?

Aufgabe 28) Lagrange-Dichte (10 Punkte)

Gegeben sei ein skalar Feld $\Phi(x)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^2]$$

(Es handelt sich dabei um die Klein-Gordon Gleichung. Sie beschreibt relativistische Materiefelder für Teilchen mit Spin 0).

- Leiten Sie mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen die Feldgleichung für dieses Feld her.
- Berechnen Sie den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ und zeigen Sie explizit, dass er die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ erfüllt.
- Zeigen Sie: Sind die Felder im Raum auf ein endliches Gebiet beschränkt, so folgt aus (b), dass es einen zeitlich erhaltenen Vierervektor gibt. Leiten Sie einen expliziten Ausdruck für diesen Vierervektor an. Welche physikalische Bedeutung hat er?