

Klausur zur Vorlesung Theorie 2

Hinweise zur Klausur

- Zugelassene Hilfsmittel: Eine DIN A4 Seite (beidseitig beschrieben). Keine Bücher, kein Taschenrechner (sollte auch nicht nötig sein).
- Bitte schreiben Sie jede Aufgabe auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt deutlich lesbar Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Nummer der Aufgabe. Blätter ohne Namen können leider nicht berücksichtigt werden.
- Bitte beachten Sie: Wir bewerten Klausuren nur, wenn Sie eine Klausurzulassung haben und über Jogustine angemeldet sind.
- Zum Bestehen der Klausur müssen 25 Punkte erreicht werden.

Wissensfragen (insgesamt 20 Punkte)

Bitte beantworten Sie die Aufgaben kurz und präzise, gerne in Stichpunkten. Lange Aufsätze sind nicht nötig. Für die Beantwortung der Wissensfragen sollten Sie ca. 30 Minuten brauchen.

1. Wie lauten die Maxwellgleichungen im Vakuum im Gaußschen Maßsystem? Erläutern Sie die einzelnen Terme. (2 Punkte)
2. Was ist der Poynting Vektor? Was beschreibt er? Geben Sie die Gleichung dafür an. Erläutern Sie dann das Poynting-Theorem (d.h. , die Energie-Bilanz-Gleichung) im Vakuum. (Vakuum heißt: Kein Medium. Explizite Ladungs- und Stromverteilungen darf es trotzdem geben.) (2 Punkte)
3. Was versteht man in der Elektrostatik und Magnetostatik unter Multipolentwicklung? Wann ist eine solche Entwicklung sinnvoll? (Längliche Formeln sind hier nicht gefragt, nur die Grundidee und der Entwicklungsparameter!) (2 Punkte)
4. Betrachten Sie konkret eine runde Leiterschleife des Radius R , durch die ein Strom I fließt. Wie groß ist das zugehörige magnetische Monopolmoment? (2 Punkte)
5. Wie funktioniert ein Faraday-Käfig? Funktioniert er auch bei hochfrequenter Strahlung? (z.B. harter Synchrotronstrahlung?) Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

6. Erläutern Sie *kurz* das Konzept der Greens-Funktion am Beispiel des Laplace-Operators. Welcher Gleichung muss die Greens-Funktion genügen? Wie kann man daraus eine allgemeine Lösung der inhomogenen Laplace-Gleichung konstruieren?
(2 Punkte)
7. Erläutern Sie den Begriff der Gleichzeitigkeit in der speziellen Relativitätstheorie. Warum kann es keine absolute Gleichzeitigkeit geben? Unter welchen Umständen kann es ein Inertialsystem geben, in dem zwei Ereignisse gleichzeitig sind?
(2 Punkte)
8. Was versteht man unter einer Weltlinie? Wie ist die Eigenzeit einer Weltlinie definiert?
(2 Punkte)
9. Was versteht man unter einer Lagrangedichte? Aus welchem allgemeinen Prinzip ergeben sich daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen und wie lauten sie?
(2 Punkte)
10. Wie lautet konkret die Lagrange-Dichte des freien elektromagnetischen Feldes? Warum gibt es darin keinen "Masseterm", der zu $A_\mu A^\mu$ proportional ist?
(2 Punkte)

Aufgaben (insgesamt 30 Punkte)

Aufgabe 1) Vektorpotential (insgesamt 5 Punkte)

Gegeben sei ein homogenes Magnetfeld in z -Richtung, $\vec{B} = (0, 0, B)$.

- (a) Bestimmen Sie zwei mögliche Vektorpotentiale $\vec{A}$, und $\vec{A}'$ zu $\vec{B}$, so dass $\vec{A}$ nur eine x -Komponente hat und $\vec{A}'$ nur eine y -Komponente. (3 Punkte)
- (b) Zeigen Sie, dass die beiden Vektorfelder $\vec{A}$ und $\vec{A}'$ durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen und geben Sie die Erzeugende der Transformation an, d.h. die Funktion $\Lambda(\vec{r})$ mit $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$. (2 Punkte)

Aufgabe 2) Elektrostatik: Geladener Zylinder

(insgesamt 5 Punkte)

Betrachten Sie einen unendlich langen, homogen geladenen Zylinder mit dem Radius R und der Ladungsdichte ρ_0 , der in z -Richtung ausgerichtet ist mit Zentrum bei $x = y = 0$.

- (a) Bestimmen Sie das elektrische Feld innerhalb und außerhalb des Stabes. (2 Punkte)

Wenn Sie diese Teilaufgabe nicht lösen konnten, dann rechnen Sie weiter mit

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r} \begin{cases} a r & : r < R \\ b/r & : r > R \end{cases} ,$$

wobei $\vec{r} = (x, y, 0)$.

- (b) Bestimmen Sie das zugehörige elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$. Wählen Sie dabei die Integrationskonstante so, dass $\Phi = 0$ bei $r = 0$. Warum ist die Wahl $\Phi = 0$ bei $r \rightarrow \infty$ hier nicht sinnvoll? (2 Punkte)
- (c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Feldes pro Stablänge. (1 Punkt)

Aufgabe 3) Kausalität

(insgesamt 5 Punkte)

In einem vorgegebenen Inertialsystem findet folgende Serie von Ereignissen E_i zu den Zeiten t_i an den Orten $\vec{r}_i$ statt.

	t	x	y	z
E_1	0	0	2m	2m,
E_2	$2 \cdot 10^{-8}\text{s}$	0	1m	3m
E_3	$1 \cdot 10^{-8}\text{s}$	1m	0	0

Die Lichtgeschwindigkeit ist $c = 2.998 \cdot 10^8 \text{m/s}$.

- (a) Betrachten Sie alle Paare von Ereignissen (E_1, E_2) , (E_1, E_3) , (E_2, E_3) . Zwischen welchen Ereignissen kann es einen kausalen Zusammenhang geben? (3 Punkte)

Hinweis: Es wird von Ihnen keine exakte Rechnung bis auf 3 Nachkommastellen erwartet. Eine gut begründete Antwort reicht aus.

- (b) Falls es einen Zusammenhang geben kann: Welches Ereignis kann welches beeinflussen? Warum? (2 Punkte)

Aufgabe 4) Transformation elektromagnetischer Felder (insgesamt 5 Punkte)

In einem Inertialsystem wirke ein räumlich und zeitlich konstantes elektrisches Feld $\vec{E}$ und magnetisches Feld $\vec{B}$.

- (a) Rekapitulieren Sie das Transformationsgesetz für den elektromagnetischen Feldstärketensor in kontravarianter Darstellung $F^{\mu\nu}$, kovarianter Darstellung $F_{\mu\nu}$ und gemischter Darstellung $F^\mu{}_\nu$ unter allgemeinen Lorentztransformationen Λ . (2 Punkte)
- (b) Konkret sei in einem Inertialsystem das magnetische Feld $\vec{B} = 0$ und das elektrische Feld $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$. Berechnen Sie mit Hilfe von (a) das $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld in einem Inertialsystem, das sich in x -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. (3 Punkte)

Aufgabe 5) Kanonischer Energie-Impuls-Tensor (insgesamt 5 Punkte)

- (a) Die Dynamik eines Satzes von Feldern ϕ_α sei durch die Lagrangedichte $\mathcal{L}(\phi_\alpha, \partial_\mu \phi_\alpha)$ bestimmt. Zeigen Sie, daß der kanonische Energie-Impuls-Tensor

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \sum_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} (\partial^\nu \phi_\alpha) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ erfüllt. (2 Punkte)

- (b) Zeigen Sie: Sind die Felder im Raum auf ein endliches Gebiet beschränkt, so folgt aus (a), dass es einen zeitlich erhaltenen Vierervektor gibt. Leiten Sie einen expliziten Ausdruck für diesen Vierervektor an. Welche physikalische Bedeutung hat er? (2 Punkte)
 - (c) Geben Sie (ohne Rechnung) einen kovarianten Ausdruck für die den erhaltenen Vierervektor aus (b) an. (1 Punkt)
- (Wenn Ihr in (b) hergeleiteter Ausdruck bereits kovariant war, dann können Sie diese Teilaufgabe weglassen).

Aufgabe 6) Lagrange-Dichte (insgesamt 5 Punkte)

Gegeben sei ein skalares Feld $\Phi(x)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^2]$$

Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen, um die Feldgleichung für dieses Feld herzuleiten.

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um die Klein-Gordon-Gleichung. Sie beschreibt relativistische Materiefelder für Teilchen mit Spin 0.