Institut für Physik SS 2017

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Elektrodynamik"

Präsenzübung – Mathematische Voraussetzungen

Besprechung im Tutorium in der Woche nach dem 5. Mai

Präsenzaufgabe 5) Delta-Funktion

Zeigen bzw. berechnen Sie

(a) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \delta(x)$

(b) $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \delta'(x-x_0) \mathrm{e}^{-2x}$

(c) Zeigen Sie: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

(d) Zeigen Sie: $\theta'(x) = \delta(x)$

Hinweise: Formeln

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, \delta(x-x_0) f(x) = f(x_0)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 1/2 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 6) Fourier-Transformation

Berechnen bzw. zeigen Sie

- $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \mathrm{e}^{ikx}$, $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \cos^{kx}$
- Den Faltungssatz: Für $h(x) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x'\, f(x')\, g(x-x')$ gilt $\hat{h}(k) = \sqrt{2\pi}\, \hat{f}(k)\, \hat{g}(k)$
- Für $\vec{j}(\vec{r}) = \nabla g(\vec{r})$, $\quad h(\vec{r}) = \Delta g(\vec{r})$
  gilt $\hat{\vec{j}}(\vec{k}) = i\vec{k}\hat{g}(\vec{k})$, $\quad \hat{h}(\vec{k}) = -k^2 \hat{g}(\vec{k})$.
- Gegeben sei $\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{k} \sin(ka)$ (in 3D, $k = |\vec{k}|$).
  Berechnen Sie $f(\vec{r})$ durch Rücktransformation.

Hinweise: Formeln

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, f(x)\, \mathrm{e}^{-ikx} \text{ (in 1D)}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}k\, \hat{f}(k)\, \mathrm{e}^{ikx} \text{ (in 1D)}$$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}^3 \int_\infty \mathrm{d}^3r\, f(\vec{r})\, \mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \text{ (in 3D)}$$

$$f(\vec{r}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}^3 \int_\infty \mathrm{d}^3k\, \hat{f}(\vec{k})\, \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \text{ (in 3D)}$$

Präsenzaufgabe 7) Diffusionsgleichung in einer Dimension

Lösen Sie die eindimensionale Diffusionsgleichung $\partial_t \rho(x,t) = D\partial_{xx}\rho(x,t)$ für $t \neq 0$ mit der Anfangsbedingung $\rho(x,0) = \delta(x)$ mit Hilfe von Fouriertransformationen.

(a) Transformieren Sie die Gleichung und die Anfangsbedingung in den Fourierraum.

(b) Lösen Sie die Gleichung und bestimmen Sie $\hat{\vec{\rho}}(k,t)$.

(c) Transformieren Sie $\hat{\rho}(\vec{k},t)$ zurück in den Realraum.

Hinweise: Formel

Für $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2a}$ ist $\hat{f}(k) = \mathrm{e}^{-k^2 a/2}\sqrt{\frac{a}{2\pi}}$.