

# Mathematische Rechenmethoden

---

Version vom SS 2010 und WS 2010/2011\*

Universität Mainz  
Fachbereich 08  
Theorie der kondensierten Materie  
Prof. Dr. Friederike Schmid<sup>†</sup>

Der nachfolgende Text ist nicht als vollständiges Manuskript zu verstehen, er skizziert lediglich die wichtigsten *Inhalte* der Vorlesung, soweit sie bisher stattgefunden hat.

## Mathematische Rechenmethoden für Physiker 1

- Einleitung
- Komplexe Zahlen
- Lineare Algebra
  - Vektoren und Vektorräume
  - Matrizen
  - Eigenwerte
  - Determinanten
- Analysis
  - Folgen und Reihen
  - Potenzreihen
  - Differenzieren
  - Integrieren
- Differentialgleichungen

## Mathematische Rechenmethoden für Physiker 2

- Vektoranalysis
- Die Delta-Funktion
- Fouriertransformationen
- Partielle Differentialgleichungen
- Orthogonale Funktionen

---

\*Elektronisch: Letzte Änderung am 18.02.2011

<sup>†</sup>03-534, Tel. (06131-)39-20365, <friederike.schmid@uni-mainz.de>

## Literatur

**K. Hefft** Mathematischer Vorkurs

(online unter <http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/> )

**W. Nolting** Theoretische Physik Bd. 1, erstes Kapitel

**S. Großmann** Mathematischer Einführungskurs für die Physik

**K.-H. Goldhorn, H.-P. Heinz** Mathematik für Physiker 1

**C. Lang, N. Pucker** Mathematische Methoden in der Physik

**M. L. Boas** Mathematical Methods in the Physical Sciences

**WolframAlpha** <http://www.wolframalpha.com/examples>

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Komplexe Zahlen</b>  | <b>11</b> |
| 1.1      | Einleitung . . . . .  | 11        |
| 1.2      | Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .                              | 12        |
| 1.2.1    | Rechnen mit der imaginären Einheit . . . . .                        | 12        |
| 1.2.2    | Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen: . . . . .           | 12        |
| 1.2.3    | Euler-Formel . . . . .  | 12        |
| 1.2.4    | Rechenregeln . . . . .  | 12        |
| 1.2.5    | Spezielle Transformationen . . . . .                                | 12        |
| 1.3      | Funktionen von komplexen Variablen . . . . .                        | 13        |
| 1.3.1    | Potenzen . . . . .  | 13        |
| 1.3.2    | Wurzeln . . . . .   | 13        |
| 1.3.3    | Exponentialfunktion . . . . .                                       | 13        |
| 1.3.4    | Logarithmus . . . . .   | 13        |
| 1.3.5    | Trigonometrische Funktionen . . . . .                               | 13        |
| <b>2</b> | <b>Lineare Algebra</b>  | <b>15</b> |
| 2.1      | Vektoren und Vektorräume . . . . .                                  | 15        |
| 2.1.1    | Begriffsklärung . . . . .   | 15        |
| 2.1.2    | Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung . . . . .             | 15        |
| 2.1.3    | Elementares Rechnen mit Vektoren, Begriff des Vektorraums . . . . . | 16        |
| 2.1.4    | Lineare Abhängigkeit . . . . .                                      | 16        |
| 2.2      | Skalarprodukt (inneres Produkt) . . . . .                           | 17        |
| 2.2.1    | Definition . . . . .  | 17        |
| 2.2.2    | Rechenregeln . . . . .  | 17        |
| 2.2.3    | Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol . . . . .               | 17        |
| 2.3      | Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt) . . . . .             | 18        |
| 2.3.1    | Definition . . . . .  | 18        |
| 2.3.2    | Rechengesetze . . . . .   | 18        |
| 2.3.3    | Koordinatendarstellung und "Epsilon-Tensor" . . . . .               | 18        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.3.4    | Höhere Vektorprodukte . . . . .  | 19        |
| 2.4      | Matrizen . . . . .   | 20        |
| 2.4.1    | Beispiele von Matrizen . . . . .                                       | 20        |
| 2.4.2    | Elementare Begriffe . . . . .  | 22        |
| 2.4.3    | Rechnen mit Matrizen . . . . .   | 22        |
| 2.4.4    | Determinanten . . . . .  | 24        |
| 2.4.5    | Drehungen und Drehmatrizen . . . . .                                   | 27        |
| 2.4.6    | Das Eigenwertproblem . . . . .   | 28        |
| 2.4.7    | Funktionen von Matrizen . . . . .                                      | 30        |
| <b>3</b> | <b>Analysis</b>  | <b>31</b> |
| 3.1      | Differentialrechnung . . . . .   | 31        |
| 3.1.1    | Die Ableitung . . . . .  | 31        |
| 3.1.2    | Einige elementare Ableitungen . . . . .                                | 33        |
| 3.1.3    | Differentiationsregeln . . . . .                                       | 33        |
| 3.1.4    | Zusammenstellung einiger wichtiger Ableitungen . . . . .               | 34        |
| 3.1.5    | Extremwertaufgaben . . . . .   | 35        |
| 3.2      | Integralrechnung . . . . .   | 37        |
| 3.2.1    | Das Riemannsches Integral . . . . .                                    | 37        |
| 3.2.2    | Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .             | 38        |
| 3.2.3    | Integrationsmethoden . . . . .   | 39        |
| 3.2.4    | Uneigentliche Integrale . . . . .                                      | 40        |
| 3.2.5    | Mehrfachintegrale . . . . .  | 41        |
| 3.2.6    | Kurven- und Oberflächenintegrale . . . . .                             | 43        |
| 3.3      | Potenzreihen . . . . .   | 45        |
| 3.3.1    | Folgen und Reihen . . . . .  | 45        |
| 3.3.2    | Potenzreihen . . . . .   | 47        |
| 3.3.3    | Taylor-Entwicklung . . . . .   | 48        |
| 3.3.4    | Analytische Funktionen . . . . .                                       | 51        |
| <b>4</b> | <b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>                             | <b>55</b> |
| 4.1      | Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .               | 56        |
| 4.1.1    | Separable Differentialgleichungen . . . . .                            | 56        |
| 4.1.2    | Lineare Differentialgleichungen . . . . .                              | 56        |
| 4.2      | Systeme von Differentialgleichungen . . . . .                          | 58        |
| 4.2.1    | Allgemeine Vorbemerkungen . . . . .                                    | 58        |
| 4.2.1.1  | Charakterisierung . . . . .  | 58        |
| 4.2.1.2  | Lineare Differentialgleichungssysteme . . . . .                        | 59        |
| 4.2.2    | Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . . | 60        |

|   |           |
|---|-----------|
| <i>INHALTSVERZEICHNIS</i>   | 5         |
| 4.2.2.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .                           | 60        |
| 4.2.2.2 Differentialgleichungssysteme . . . . .                                     | 61        |
| <b>5 Vektoranalysis</b>   | <b>65</b> |
| 5.1 Vorbemerkungen und Erinnerung . . . . .   | 65        |
| 5.1.1 Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren . . . . .                        | 65        |
| 5.1.2 Felder . . . . .  | 66        |
| 5.1.3 Kurvenintegral bzw. Linienintegral . . . . .                                  | 66        |
| 5.1.4 Flächenintegral . . . . .   | 66        |
| 5.2 Der Nabla-Operator . . . . .  | 67        |
| 5.2.1 Skalare Felder und Gradient . . . . .   | 67        |
| 5.2.2 Vektorfelder: Divergenz und Rotation . . . . .                                | 68        |
| 5.2.3 Der Laplace-Operator . . . . .  | 68        |
| 5.2.4 Wichtige Zusammenhänge . . . . .  | 69        |
| 5.3 Krummlinige Koordinaten . . . . .   | 69        |
| 5.3.1 Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme . . . . .                       | 69        |
| 5.3.2 Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen . . . . .                     | 71        |
| 5.3.3 Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme . . . . . | 73        |
| 5.4 Integralsätze . . . . .   | 74        |
| 5.4.1 der Gaußsche Integralsatz . . . . .   | 74        |
| 5.4.1.1 Der Satz . . . . .  | 74        |
| 5.4.1.2 Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz . . . . .                        | 75        |
| 5.4.2 Der Greensche Satz in der Ebene . . . . .                                     | 76        |
| 5.4.3 Der Integralsatz von Stokes . . . . .   | 77        |
| <b>6 Die Diracsche Delta-Funktion</b>   | <b>79</b> |
| 6.1 Motivation und Einführung . . . . .   | 79        |
| 6.2 Definition . . . . .  | 80        |
| 6.3 Darstellungen der Delta-Funktion . . . . .                                      | 80        |
| 6.3.1 Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen . . . . .                        | 80        |
| 6.3.2 Darstellung als Integral . . . . .  | 82        |
| 6.4 Rechenregeln mit der Delta-Funktion . . . . .                                   | 82        |
| 6.5 Verallgemeinerung für höhere ( $d$ ) Dimensionen . . . . .                      | 83        |
| <b>7 Die Fouriertransformation</b>  | <b>85</b> |
| 7.1 Diskrete Fouriertransformation . . . . .  | 86        |
| 7.1.1 Definition . . . . .  | 86        |
| 7.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation . . . . .                   | 87        |
| 7.2 Fourierintegral . . . . .   | 88        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 7.2.1    | Definition . . . . .  | 88         |
| 7.2.2    | Eigenschaften und Rechenregeln . . . . .                          | 89         |
| 7.2.3    | Paare von Fourier-Transformierten . . . . .                       | 90         |
| 7.2.4    | Anwendungsbeispiel . . . . .                                      | 92         |
| 7.3      | Fourierreihe . . . . .  | 93         |
| 7.3.1    | Definition . . . . .  | 93         |
| 7.3.2    | Darstellung in trigonometrischen Funktionen . . . . .             | 94         |
| <b>8</b> | <b>Partielle Differentialgleichungen</b>                          | <b>95</b>  |
| 8.1      | Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik . . . . .  | 95         |
| 8.1.1    | Elliptischer Typ . . . . .  | 96         |
| 8.1.2    | Hyperbolischer Typ . . . . .                                      | 96         |
| 8.1.3    | Parabolischer Typ . . . . .                                       | 97         |
| 8.2      | Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen . . . . .  | 97         |
| 8.2.1    | Laplace-Gleichung . . . . .                                       | 98         |
| 8.2.1.1  | Numerische Lösung . . . . .                                       | 98         |
| 8.2.1.2  | Lösung mit Separation der Variablen . . . . .                     | 98         |
| 8.2.2    | Wellengleichung . . . . .   | 100        |
| 8.2.2.1  | Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation . . . . .      | 100        |
| 8.2.2.2  | Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz . . . . . | 101        |
| 8.2.3    | Diffusionsgleichung . . . . .                                     | 102        |
| 8.2.3.1  | Separationsansatz und asymptotisches Verhalten . . . . .          | 102        |
| 8.2.3.2  | Propagatordarstellung . . . . .                                   | 103        |
| 8.2.4    | Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion . . . . .              | 103        |
| <b>9</b> | <b>Orthogonale Funktionen</b>                                     | <b>105</b> |
| 9.1      | Allgemeiner Rahmen . . . . .                                      | 105        |
| 9.1.1    | Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme . . . . .              | 105        |
| 9.1.2    | Das Sturm-Liouville-Problem . . . . .                             | 106        |
| 9.1.3    | Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen . . . . .               | 107        |
| 9.2      | Legendre-Polynome . . . . .                                       | 108        |
| 9.2.1    | Die einfache Legendresche Differentialgleichung . . . . .         | 108        |
| 9.2.2    | Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome . . . . .            | 109        |
| 9.2.3    | Zugeordnete Legendre-Polynome . . . . .                           | 110        |
| 9.2.4    | Kugelflächenfunktionen . . . . .                                  | 111        |
| 9.3      | Die Besselsche Differentialgleichung . . . . .                    | 113        |

# Mathematische Rechenmethoden 1



**Zutaten** zu einer mathematischen Formulierung physikalischer Sachverhalte:

- Zahlen (2, -3.5,  $\pi$ )
- Einheiten (m, km, s, EUR)
- Zeichen für

Physikalische Größen

Manipulationen und Verknüpfungen

Im Einzelnen:

**Einfache mathematische Zeichen:**

+, -, ·, /  
 =, ≠, ≡  
 <, >, ≤, ≥  
 ≈, ~, ∝  
 ≪, ≫  
 ∞

**Logische Zeichen:**

∈, ∃, ∉  
 ⊂, ⊃, ⊆, ⊇  
 ∃, ∃!  
 ∀  
 ⇐, ⇒, ⇔  
 :=

**Kompliziertere Zeichen:**

$\sum$ : Summenzeichen  
 $\prod$ : Produktzeichen  
 $n!$ : Fakultät  
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ : Binomialkoeffizient



# Kapitel 1

## Komplexe Zahlen

### 1.1 Einleitung

Bekannte Zahlenklassen:

Natürliche Zahlen  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$

↓ Lösbarkeit von  $a + x = b \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$ .

Ganze Zahlen  $\mathbb{Z}$

↓ Lösbarkeit von  $ax = b \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$ .

Rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$

↓ Ganzer Zahlenstrahl

Reelle Zahlen  $\mathbb{R}$

↓ Lösbarkeit beliebiger Polynomgleichungen:

$$\sum_{j=0}^n a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

Komplexe Zahlen  $\mathbb{C}$

Es genügt, eine einzige neue Zahl einzuführen: Die imaginäre Zahl  $i = \sqrt{-1}$ .  
Damit wird *jede* Polynomgleichung lösbar (Satz von Abel), und jedes Polynom kann in Linearfaktoren zerlegt werden (Fundamentalsatz der Algebra):

$$\sum_{j=0}^n a_j x^j = a_n (x - x_1) (x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad (1.1)$$

Allgemeine Darstellung komplexer Zahlen:  $z = x + iy$  ( $x, y, \in \mathbb{R}$ ).

Graphische Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene:

$$z = |z|(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) \text{ (Polardarstellung).}$$

NB: Vergleichsrelationen, z.B.  $z_1 < z_2$  werden unsinnig.

## 1.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

### 1.2.1 Rechnen mit der imaginären Einheit

$$i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = -i, i^4 = 1, \dots$$

Inverses von  $i$ : Aus  $(-i) * i = 1$  folgt  $1/i = -i$ .

Allgemein:  $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, \dots$  für  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 1.2.2 Charakterisierung allgemeiner komplexer Zahlen:

(siehe oben)  $z = x + iy = |z|e^{i\phi}$  mit  $(x, y, |z|, \phi) \in \mathbb{R}$ . Dann ist:

$$x = \Re(z) \text{ (Realteil)}$$

$$y = \Im(z) \text{ (Imaginärteil)}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (Betrag)}$$

$$\phi = \text{Arg}(z) = \arctan y/x \text{ (Argument)}$$

NB:  $\phi$  nicht eindeutig, mit  $\phi$  ist auch  $\phi + 2\pi n$  ein Argument  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

### 1.2.3 Euler-Formel

Erweiterung der Exponentialfunktion auf komplexe Zahlen:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi) \tag{1.2}$$

Begründung: Kapitel 3.3 (Potenzreihen).

Es gelten die üblichen Regeln für Potenzen, z.B.  $e^{i(\phi_1 + \phi_2)} = e^{i\phi_1} \cdot e^{i\phi_2}$

Speziell:  $e^{i\pi/2} = i, e^{i\pi} = i^2 = -1, e^{2\pi i} = i^4 = 1$

Damit folgt für die Polardarstellung komplexer Zahlen:  $z = |z|e^{i\phi}$ .

### 1.2.4 Rechenregeln

Addition, Multiplikation wie gewohnt (mit  $i^2 = -1$ ).

Beispiel: Mit  $z = x + iy, w = u + iv$  ist

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

$$z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

### 1.2.5 Spezielle Transformationen

- Betrag, Argument, Realteil, Imaginärteil siehe oben.
- Komplexkonjugiertes:  $z = x + iy \Rightarrow z^* = x - iy$ .  
In Polarkoordinaten:  $z = |z|e^{i\phi} \Rightarrow z^* = |z|e^{-i\phi}$ .  
Es gilt:  $(z + w)^* = z^* + w^*, (zw)^* = z^*w^*, z \cdot z^* = |z|^2$ .

## 1.3 Funktionen von komplexen Variablen

### 1.3.1 Potenzen

Mit  $z = x + iy = |z|e^{i\phi}$  folgt:

$$\begin{aligned} z^n &= (x + iy)^n = |z|^n (\cos \phi + i \sin \phi)^n \\ &= |z|^n e^{in\phi} = |z|^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)) \end{aligned}$$

Also hat  $z^n$  den Betrag  $|z|^n$  und das Argument  $n\phi$ .

NB: Liefert nebenbei Formeln für  $\cos(n\phi)$  und  $\sin(n\phi)$ .

### 1.3.2 Wurzeln

Analog zu Potenzen:  $\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\phi/n}$ . Wegen Mehrdeutigkeit von  $\phi$  (modulo  $2\pi$ ) sind Wurzeln mehrdeutig: Es gibt  $n$  unterschiedliche  $n$ te Wurzeln.

Konkret:

**Einheitswurzeln** : Wurzeln der Eins

$$\sqrt[n]{1} = \{e^0 = 1, e^{2\pi/ni}, e^{4\pi/ni}, e^{6\pi/ni}, \dots\}.$$

Teilen in der komplexen Ebene den Einheitskreis in  $n$  gleichgroße "Torstenstücke".

**Allgemein** :  $z = |z|e^{i\phi}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\phi/n} * \{e^0 = 1, e^{2\pi/ni}, e^{4\pi/ni}, e^{6\pi/ni}, \dots\}.$$

Vergleich mit reellen Zahlen: Bei den reellen Zahlen existiert Konvention, dass die Wurzel einer Zahl positiv ist ( $\sqrt{4} = 2$  und nicht  $(-2)$ ). Für komplexe Zahlen gibt es keine solche Konvention.

### 1.3.3 Exponentialfunktion

Über Eulerformel:  $e^z = e^{(x + iy)} = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

### 1.3.4 Logarithmus

Im folgenden immer: Natürlicher Logarithmus (zur Basis  $e$ ).

Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion:  $w = \ln z \Rightarrow z = e^w$ .

Mit  $z = e^{i\phi}$  folgt für  $w = \ln(|z|) + i\phi$ .

NB: Mehrdeutig, da  $\phi$  mehrdeutig (modulo  $2\pi$ ).

### 1.3.5 Trigonometrische Funktionen

Aus Umkehrung der Euler-Formel (Gleichung (1.2))

Zunächst reelle  $\phi$ : Aus  $e^{\pm i\phi} = \cos \phi \pm i \sin \phi$  folgt

$$\cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \quad \sin \phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \quad (1.3)$$

Erweiterung auf komplexe Zahlen:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Zusammenhang mit hyperbolischen Funktionen

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad (1.4)$$

NB: Daraus folgt u.a.  $\cos z = \cosh iz$ ,  $\sin z = -i \sinh iz$ .

# Kapitel 2

## Lineare Algebra

### 2.1 Vektoren und Vektorräume

#### 2.1.1 Begriffsklärung

**Mathematischer Vektor** Element eines Vektorraums (siehe Abschnitt 2.1.3)

**Physikalischer Vektor** Gerichtete Strecke mit Anfangs- und Endpunkt, z.B. Ort  $\vec{r}$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}$ , Kraft  $\vec{F}$ .

Notation:  $\vec{a}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\underline{a}$ ,  $\dots$

Charakterisierung: Durch Betrag (Länge der Strecke) und Richtung (Einheitsvektor  $\vec{e}_a$ ).

Gegensatz: **Skalar** (z.B. Temperatur, Druck)

#### 2.1.2 Koordinatensysteme und Koordinatendarstellung

Im allgemeinen legt man zur quantitativen Beschreibung von Vektoren im Raum ein Koordinatensystem fest. Dann wird Vektor durch Satz von  $n$  Zahlen dargestellt. ( $n = 3$  im Raum,  $n = 2$  in der Ebene etc.) Diese Zahlen heißen Koordinaten und hängen vom Koordinatensystem ab.

$\implies$  Alternative Definition eines physikalischen **Vektors**:

Größe, charakterisiert durch  $n$  Zahlen ( $n$ : Dimension des Raums), die sich bei Drehung des Koordinatensystems in bestimmter Weise transformieren. (wie konkret, kommt später).

Alternative Definition eines physikalischen **Skalars**:

Größe, charakterisiert durch eine Zahl, die vom Koordinatensystem unabhängig ist.

### 2.1.3 Elementares Rechnen mit Vektoren, Begriff des Vektorraums

**Addition :**

Graphisch: Hänge Pfeile aneinander

$$\text{Koordinaten: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Rechengesetze: Vektoren mit Addition bilden "Abelsche Gruppe"

- Abgeschlossen:  $\vec{a} + \vec{b}$  ist wieder ein Vektor
- Assoziativ:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .
- Es gibt eine Null  $\vec{0}$  mit:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$
- Inverses:  $\forall \vec{a} \quad \exists (-\vec{a}) : \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ .
- Kommutativ:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

**Multiplikation mit einem Skalar :** (i.e., einer Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .)

Graphisch: Streckung/Stauchung um Faktor  $\lambda$

$$\text{Koordinaten: } \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}.$$

Rechengesetze:

- Kommutativ:  $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$
- Assoziativ:  $\beta(\alpha \vec{a}) = (\beta \alpha) \vec{a}$
- Distributivgesetze:  $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$ ,  $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b}$ .

Bemerkung: Die Menge der Skalare  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  für sich genommen bildet einen sogenannten Körper (hier nicht weiter ausgeführt: Mathematische Struktur). Eine Menge von Objekten, auf der eine Addition und eine Skalarmultiplikation mit den obigen Eigenschaften definiert ist, bezeichnet man als linearen Vektorraum über dem Körper der Skalare.

$\implies$  Mathematische Definition eines Vektors: Element eines Vektorraums

Der mathematische Begriff des Vektors ist allgemeiner als der physikalische Begriff. Beispielsweise bildet die Menge der Funktionen  $f(x)$  auch einen Vektorraum.

### 2.1.4 Lineare Abhängigkeit

**Definition:** Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  heißen linear unabhängig, falls aus  $\sum \alpha_i \vec{a}_i = \vec{0}$  folgt  $\alpha_i = 0 \quad \forall i$ .

Anderenfalls sind die Vektoren linear abhängig.

**Anschaulich:**

Zwei Vektoren linear abhängig  $\Rightarrow$  parallel.

Drei Vektoren linear abhängig  $\Rightarrow$  komplanar (in einer Ebene) .

NB: Zwei linear unabhängige Vektoren spannen Ebene auf.

Drei linear unabhängige Vektoren spannen Raum auf.

In drei Dimensionen sind maximal drei Vektoren linear unabhängig.

(Mathematisch: Die "Dimension" ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum.)

**2.2 Skalarprodukt (inneres Produkt)****2.2.1 Definition**

**Skalarprodukt** von zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos(\phi) \quad (\text{Skalar}) \quad (2.1)$$

wobei  $\phi$  : Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

**2.2.2 Rechenregeln**

(i) Kommutativ:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(ii) Homogen:  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(iii) Distributivgesetz:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ .

(iv)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$

Bemerkung: Einen Vektorraum mit einem Skalarprodukt, das die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllt, nennt man unitär.

**2.2.3 Koordinatendarstellung und Kronecker-Symbol**

Ab jetzt sollen unsere Koordinatensysteme rechtwinklige Koordinatenachsen haben, die ein "Rechtssystem" bilden (Rechte-Hand Regel).  $\vec{e}_i$  seien die Einheitsvektoren entlang der Koordinatenachse  $i$ ,  $(a_1, a_2, a_3)$  die Koordinaten.

$\rightarrow \vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$ . Es gilt  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} =: \delta_{ij}$

Definiert Kronecker-Symbol: 
$$\delta_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

• **Skalarprodukt in Koordinatendarstellung:**  $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$ ;  $\vec{b} = \sum_j b_j \vec{e}_j$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{ij} a_i b_j \delta_{ij}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i}$

- **Anwendung:** Koordinaten eines Vektors  $\vec{a}$  in einem beliebigen (rechtwinkligen) Koordinatensystem  $\{\vec{e}_i\}$

Projektion von  $\vec{a}$  auf die Achsen (Einheitsvektoren)  $\vec{e}_i$ :  $a'_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \vec{a} = \sum_i a'_i \vec{e}_i = \sum_i (\vec{a} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i.$$

Gilt für alle Vektoren  $\vec{a}$  und rechtwinklige Koordinatensysteme.

## 2.3 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

### 2.3.1 Definition

**Vektorprodukt** von zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  ist ein Vektor mit Betrag  $|\vec{c}| = ab \sin \phi$  ( $\phi$ : Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ).

Richtung:  $\vec{c}$  senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ ,

wobei Vorzeichen so gewählt, dass  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  Rechtssystem ist.

Geometrisch:  $|\vec{c}|$  ist die Fläche des von  $\vec{a}, \vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.

Physikalisches Beispiel: Drehimpuls  $\vec{r} \times \vec{p}$ .

### 2.3.2 Rechengesetze

(i) Antikommutativ:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(ii) Homogen:  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ .

(iii) Distributivgesetz:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(zur Herleitung siehe z.B. Nolting Bd. 1)

NB: Aus (i) und (iii) folgt auch  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(iv) Jacobi-Identität  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$   
(vorläufig ohne Herleitung).

Bemerkung: Einen Vektorraum mit einem äußeren Produkt, das die Eigenschaften (i)-(iv) erfüllt, nennt man eine Lie Algebra.

### 2.3.3 Koordinatendarstellung und "Epsilon-Tensor"

Das Koordinatensystem sei wieder ein rechtwinkliges Rechtssystem, mit Einheitsvektoren  $\vec{e}_i$  entlang den Koordinatenachsen.

$$\Rightarrow \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \quad (\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0 \quad \forall i).$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3$$

Definiert Epsilon-Tensor oder Levi-Civita-Symbol:

$$\epsilon_{ijk} := (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \begin{cases} 1 : & (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 : & (ijk) = (213), (321), (132) \\ 0 : & \text{sonst} \end{cases}$$

(bzw. "total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe").

### 2.3. VEKTORPRODUKT (ÄUSSERES PRODUKT, KREUZPRODUKT) 19

- **Vektorprodukt in Koordinatendarstellung:**  $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i; \quad \vec{b} = \sum_j b_j \vec{e}_j$   
 $\Rightarrow \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)$   
 $\Rightarrow c_k = \vec{c} \cdot \vec{e}_k = [\vec{a} \times \vec{b}]_k = \sum_{ij} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \cdot \vec{e}_k = \sum_{ij} a_i b_j \epsilon_{ijk}$

$$\Rightarrow \boxed{[\vec{a} \times \vec{b}]_k = \sum_{ij} a_i b_j \epsilon_{ijk}}$$

$$\text{Konkret: } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

- **Rechenregeln mit dem Epsilon-Tensor:** Für später nützlich

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_m \epsilon_{klm} \epsilon_{pqm} &= \delta_{kp} \delta_{lq} - \delta_{kq} \delta_{lp} \\ \sum_{lm} \epsilon_{klm} \epsilon_{plm} &= 2\delta_{kp} \end{aligned}}$$

(Herleitungen: Buchhaltung, argumentieren, ...)

#### 2.3.4 Höhere Vektorprodukte

**Spatprodukt:**  $\boxed{(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}$ .

Geometrische Interpretation:

Volumen eines von  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  aufgespannten Parallelepipeds.

Vorzeichen: +, falls  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  Rechtssystem, – für Linkssystem.

Koordinatenschreibweise:  $\boxed{(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k}$ .

**Doppeltes Vektorprodukt:**  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

”Entwicklungssatz”:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

( Herleitung am schnellsten über den Epsilon-Tensor:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_k &= \sum_{ij} \epsilon_{ijk} a_i \sum_{lm} \epsilon_{lmj} b_l c_m \\ &= \sum_{ilm} \sum_j \epsilon_{kij} \epsilon_{lmj} a_i b_l c_m \\ &= \sum_{ilm} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) a_i b_l c_m \\ &= \sum_m a_m b_k c_m - \sum_l a_l b_l c_k = b_k(\vec{a} \cdot \vec{c} - c_k(\vec{a} \cdot \vec{b})) \end{aligned}$$

**Weitere Beziehungen:**

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (\text{Lagrange-Identität})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{c}\vec{d}\vec{a})\vec{b} - (\vec{c}\vec{d}\vec{b})\vec{a} = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$$

## 2.4 Matrizen

### 2.4.1 Beispiele von Matrizen

Matrizen: Neben Vektoren weitere nützliche Konstrukte, mit denen sich Sachverhalte kurz und präzise ausdrücken lassen. Bedeutung unter anderem für

- Lineare Gleichungssysteme
- Beschreibung von Drehungen im Raum
- Darstellung bestimmter physikalischer Größen

Das soll im Folgenden kurz illustriert werden.

#### Lineare Gleichungssysteme

Beispiel: 
$$\begin{array}{rclcl} 3x & + & 7y & - & 2z & = & 2 \\ -2x & + & y & & & = & 1 \end{array} :$$

Charakterisiert durch "Koeffizientenmatrix"  $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

und "Spaltenvektor"  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Eigenschaften des Gleichungssystems werden im Wesentlichen von der Koeffizientenmatrix bestimmt.

"Matrix" hier: Zahlenschema aus  $m \times n$  Zahlen  $a_{ij}$  ( $m$  Zeilen,  $n$  Spalten)

Darstellung des Gleichungssystems in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Drehungen

Gegeben physikalischer Vektor  $\vec{a}$ , zwei rechtwinklige Koordinatensysteme  $\Sigma, \Sigma'$  mit Basisvektoren  $\{\vec{e}_i\}, \{\vec{e}'_i\}$  (Einheitsvektoren entlang Achsen  $i$ ).

Darstellung von  $\vec{a}$  im Koordinatensystem  $\Sigma$ :  $\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i$  mit  $a_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)$ .

Darstellung von  $\vec{a}$  im Koordinatensystem  $\Sigma'$ :  $\vec{a} = \sum_i a'_i \vec{e}'_i$  mit  $a'_i = (\vec{a}' \cdot \vec{e}'_i)$ .

$\Rightarrow$  Einfache Regel für die Umrechnung von Koordinaten  $\{a_i\} \rightarrow \{a'_i\}$ :

$$a'_i = (\vec{a} \cdot \vec{e}'_i) = \left( \sum_j a_j \vec{e}_j \right) \cdot \vec{e}'_i = \sum_j (\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j) a_j =: \sum_j D_{ij} a_j \quad (2.2)$$

Definiert Drehmatrix  $D = (D_{ij})$  mit  $D_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$ .

Dann folgt  $a'_i = \sum_j D_{ij} a_j$  bzw. in Matrixschreibweise:  $a' = Da$ .

Dies gilt für alle physikalischen Vektoren  $\vec{a}$ . Drehung des Koordinatensystems wird durch das Zahlenfeld  $D$  vollständig bestimmt.

Konkret z.B. Ebene:  $D = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$

Verallgemeinerung: Allgemeine affine Koordinatentransformation zwischen Koordinatensystemen, die nicht unbedingt rechtwinklig sind: Beschrieben durch allgemeine invertierbare  $3 \times 3$ -Matrix.

**Bemerkung:** Mit der Einführung der Drehmatrizen wird die Konkretisierung des Begriffs ”**physikalischer Vektor**” möglich: Ein physikalischer Vektor ist eine Größe, charakterisiert durch drei Zahlen  $\{v_i\}$  (im dreidimensionalen Raum – zwei Zahlen in der Ebene), die sich unter Drehung des Koordinatensystems in folgender Weise transformieren:

$$\{v_i\} \rightarrow \{v'_i\} \text{ mit } v'_i = \sum_j D_{ij} v_j.$$

### Physikalische Tensoren

Beispiel: Trägheitsmoment und Trägheitstensor

**Trägheitsmoment  $\theta$**  Verknüpft Drehimpuls mit Winkelgeschwindigkeit  
Z.B. symmetrischer Kreisel, der sich um Symmetrieachse dreht. Symmetrieachse sei die  $z$ -Achse.

Winkelgeschwindigkeit:  $\omega = d\phi/dt$ .

Drehimpuls: Vektor  $\vec{L}$  mit Betrag  $L = \theta\omega$  und Richtung  $z$

$\theta$  ist das Drehmoment und charakterisiert den Kreisel

$$(\text{Konkret: } \theta = \int d^3r \rho(\vec{r})(x^2 + y^2))$$

Bedeutung des Drehimpulses: Physikalische *Erhaltungsgröße*.

### Verallgemeinerung: Trägheitstensor **I**

Frage: Beliebige Drehachse? Asymmetrischer Kreisel?

→ Drehimpuls nicht unbedingt parallel zur Drehachse.

Aber: Immer noch linearer Zusammenhang.

Führe vektorielle Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  ein.

Betrag:  $\omega$ , Richtung: Drehachse.

$$\text{Dann gilt: } \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \text{ bzw.: } \vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

mit **I**:  $3 \times 3$ -Matrix, die eine *physikalische Eigenschaft* des Kreisels beschreibt. (Konkret:  $I_{ij} = \int d^3r \rho(\vec{r})(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$ )

⇒ Definition eines ”**physikalischen Tensors**” ähnlich der Definition des physikalischen Vektors: Größe, charakterisiert durch  $3 \times 3$ -Matrix  $\{t_{ij}\}$ , die sich unter Drehung des Koordinatensystems in folgender Weise transformieren:

$$\{t_{ij}\} \rightarrow \{t'_{ij}\} \text{ mit } t'_{ij} = \sum_{kl} D_{ik} D_{jl} t_{kl}.$$

(Strenggenommen Tensor zweiter Stufe. Tensoren höherer Stufe: Selbes Prinzip, nur mehr Indizes.)

### 2.4.2 Elementare Begriffe

#### 1) Definition einer Matrix

Eine  $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema mit  $m$  Zeilen und  $n$

$$\text{Spalten: } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad (a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}).$$

Zwei Matrizen gelten als gleich, wenn jeder Eintrag  $a_{ij}$  gleich ist.

#### 2) Spezielle Matrizen

- Nullmatrix:  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$

- Quadratische  $n \times n$ -Matrizen

- Symmetrische Matrix:  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$
- Antisymmetrische Matrix:  $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$
- Diagonalmatrix:  $a_{ij} = \delta_{ij} a_i$
- Einheitsmatrix:  $E = \mathbb{1} = \delta_{ij}$

- Vektoren:

Spaltenvektor:  $n \times 1$ -Matrix

Zeilenvektor:  $1 \times n$ -Matrix

→ Koordinatendarstellungen von Vektoren sind spezielle Formen von Matrizen.

#### 3) Rang einer Matrix

$m \times n$ -Matrix kann man sich zusammengesetzt denken aus  $m$  Zeilenvektoren oder  $n$  Spaltenvektoren.

Zeilenrang: Maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren

Spaltenrang: Maximale Zahl linear unabhängiger Spaltenvektoren

Es gilt: Spaltenrang = Zeilenrang.

### 2.4.3 Rechnen mit Matrizen

#### 1) Addition : Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ , gleiche Zahl von Zeilen/Spalten.

$$C = (c_{ij}), C = A + B \text{ bedeutet: } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j$$

#### 2) Multiplikation mit Skalar : Sei $\lambda$ Skalar

$$C = \lambda A \text{ bedeutet: } c_{ij} = \lambda a_{ij} \forall i, j.$$

Bemerkung: Matrizen mit Addition und Skalarmultiplikation bilden wieder Vektorraum über dem Körper der Skalare ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ).

#### 3) Transposition

$$C = A^T \text{ bedeutet: } c_{ij} = a_{ji}$$

**4) Matrixmultiplikation** : Sei  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ ,Anzahl Spalten von  $A =$  Anzahl Zeilen von  $B$  $C = AB$  bedeutet:  $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$ .

Eigenschaften der Matrixmultiplikation

- Assoziativ:  $A(BC) = (AB)C$
- Neutrales Element:  $\mathbf{1}$  erfüllt  $A\mathbf{1} = \mathbf{1}A \forall A$
- Nicht kommutativ: Im allgemeinen ist  $AB \neq BA$ .
- Matrix  $A$  kann Inverses haben (siehe 5), muss aber nicht.

**5) Matrixinversion**  $A$  sei eine  $m \times n$ -Matrix: $n \times m$ -Matrix  $(A^{-1})$  ist "Links inverses" von  $A$ , wenn  $(A^{-1})A = \mathbf{1}$ .

(Definition der "Rechtsinversen": Analog)

**Es gilt:** (Leicht zu zeigen)

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Für  $n = m$ :  $AA^{-1} = \mathbf{1}$ (d.h.  $A^{-1}$  ist dann auch Rechts inverses).**Praktische Berechnung:** Lösung eines Satzes von linearen Gleichungssystemen.**Beispiel:** Gegeben  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Gesucht  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 

mit  $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Entspricht zwei linearen Gleichungssystemen:

(\*)  $1x_{11} + 3x_{12} = 1$        $1x_{21} + 3x_{22} = 0$

(\*\*)  $2x_{11} + 1x_{12} = 0$        $2x_{21} + 1x_{22} = 1$

Selbe Koeffizienten, nur rechten Seiten sind verschieden

→ Dieselben Transformationen führen zum Ziel.

**Lösungsverfahren** (für  $n \times n$ -Matrizen).

Schreibe Koeffizientenmatrix (für linke Seite) und Einheitsmatrix (für rechte Seiten) nebeneinander auf. Führe dann die Zeilentransformationen aus, die die Gleichungssysteme lösen.

→ Linke Matrix (Koeffizientenmatrix) wird zur Einheitsmatrix, rechte Matrix wird zur gesuchten inversen Matrix.

$$\text{Konkret: } \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(**) \rightarrow (**)-3(*)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{(**) \rightarrow (**)/5} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{(*) \rightarrow (*)-3(**)} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Ergebnis:}} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(Alternativen: Cramers Regel, siehe nächstes Kapitel, wird aber für  $n > 2$  impraktikabel. Weitere numerische Verfahren, z.B. LU-Zerlegung, siehe Numerikliteratur).

6) **Spur** : Für  $n \times n$  Matrizen  $A$  ist  $\text{Sp}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Es gilt:  $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$

(leicht zu sehen, wenn man es explizit hinschreibt).

$\rightarrow \text{Sp}(A_1 \cdots A_{n-1} A_n) = \text{Sp}(A_n A_1 \cdots A_{n-1})$ :

Matrizen in der Spur dürfen zyklisch vertauscht werden.

7) **Determinante** : Siehe nächstes Kapitel.

#### 2.4.4 Determinanten

1) **Definition**: Betrachte  $n \times n$  Matrix  $A = (a_{ij})$

$$\det(A) := \sum_P (-1)^P a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n} \quad (2.3)$$

Hier ist:  $(P_1 \cdots P_n)$ : Permutationen von  $(1 \cdots n)$

$\sum_P$ : Summe über alle Permutationen

$(-1)^P$ :  $\begin{cases} 1 & , \text{ falls Permutation gerade} \\ -1 & , \text{ falls Permutation ungerade} \end{cases}$

wobei - 'gerade' Permutation: lässt sich durch gerade Anzahl paarweiser Vertauschungen (Transpositionen) realisieren.

- 'ungerade' Permutation: ungerade Anzahl Transpositionen

Es gilt: Zuordnung Permutation  $\leftrightarrow$  gerade/ungerade ist eindeutig.

**Notation**:  $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

**Konkret**:  $2 \times 2$ :  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ .

$3 \times 3$ :  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$

$\rightarrow$  Spatprodukt:  $(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \sum \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

entspricht genau dem von  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  aufgespannten Volumen.

**Geometrische Interpretation**:  $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$  ( $\vec{a}_i$  Spaltenvektoren)

Dann ist  $|\det(A)|$  genau das von  $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$  aufgespannte  $n$ -dimensionale Volumen im  $n$ -dimensionalen Raum.

Daraus folgt z.B.  $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_i$  linear abhängig  $\Leftrightarrow \text{Rang } A < n$ .

## 2) Rechenregeln

- **Transposition** :  $\det(A^T) = \det(A)$ .

$$\begin{aligned} \text{(Begründung: } \det(A^T) &= \sum_P (-1)^P a_{P_1 1} \cdots a_{P_n n} = \sum_P (-1)^P a_{1 P_1^{-1}} \cdots a_{n P_n^{-1}} \\ &= \sum_{\hat{P}} (-1)^{\hat{P}} a_{1 \hat{P}_1^{-1}} \cdots a_{n \hat{P}_n^{-1}} \text{ mit } \hat{P} = P^{-1}, \\ \text{letzter Schritt folgt aus } &(-1)^P = (-1)^{P^{-1}}.) \end{aligned}$$

- **Addition** einer Zeile/Spalte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Spalte analog.

(Begründung: Faktoren  $(a_{ij} + b_{ij})$  in Gl. (2.3) ausmultiplizieren.)

- **Multiplikation** einer Zeile/Spalte mit einer Zahl  $\alpha$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(Begründung: Faktor  $\alpha$  in Gl. (2.3) vor die Summe ziehen.)

Folgerung  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ .

- **Vertauschung** zweier Zeilen/Spalten ändert Vorzeichen.

(Begründung bei Spaltenvertauschung  $i \leftrightarrow j$ : Entspricht in Gl. (2.3) dem Ersetzen der Permutationen  $P$  durch  $P' = T_{ij}P$ , wobei  $T_{ij}$  die Transposition ( $i \leftrightarrow j$ ) ist. Falls  $P$  gerade, ist  $P'$  ungerade und umgekehrt.)

- Sind zwei Zeilen/Spalten gleich, folgt  $\det(A) = 0$ .

(Begründung: Vertauschung ändert  $A$  nicht, aber Vorzeichen von  $\det(A)$ .)

→ Wenn ein Vielfaches einer Zeile/Spalte auf eine andere addiert wird, ändert sich Determinante nicht.

- **Determinanten-Multiplikationssatz** :

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

(ohne Begründung: siehe Mathematik-Vorlesung)

- **Algebraisches Komplement** :  $A^{(ij)}$  sei die Matrix, die aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht.  
Algebraisches Komplement:  $U_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A^{(ij)})$ .

- **Determinanten-Entwicklungssatz** :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_i a_{ij} U_{ij} && \text{Entwicklung nach Zeile } i \\ &= \sum_j a_{ij} U_{ij} && \text{Entwicklung nach Spalte } j \end{aligned}$$

(ohne Begründung: siehe Mathematik-Vorlesung)

- Andererseits:  $\sum_k a_{ik} U_{jk} = 0$ ,  $\sum_k a_{ki} U_{kj} = 0$  für  $i \neq k$ .

(Begründung: Definiere Matrix  $\bar{A}$ , die bis auf  $j$ -te Zeile identisch ist mit  $A$ , nur  $j$ -te Zeile durch  $i$ -te Zeile ersetzt. Dann ist  $\det(\bar{A}) = 0$ . Erste Behauptung (Zeile) folgt aus Entwicklungssatz:  $\det(\bar{A}) = \sum_k \bar{a}_{jk} U_{jk} = \sum_k a_{ik} U_{jk}$ . Zweite Behauptung analog.)

### 3) Folgerungen und Anwendungen

- **Inverses** einer  $n \times n$ -Matrix:  
Voraussetzung:  $\det(A) \neq 0$   
Dann lässt sich  $A$  invertieren und  $[A^{-1}]_{ij} = U_{ji}/\det(A)$ .  
( $[A^{-1}]_{ij}$ : Eintrag in der  $i$ -ten Zeile,  $j$ -ten Spalte der Matrix  $A^{-1}$ ).

- **Lineare Gleichungssysteme** Allgemeine Form:  $A\underline{x} = \underline{b}$

mit Koeffizientenmatrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,

und Spaltenvektoren  $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ .

#### Lösbarkeit

- $A\underline{x} = \underline{b}$  lösbar  $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \underline{b})$ .  
(denn: Schreibe  $A = (\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_n)$  mit  $\underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ .  
 $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \sum_i \underline{a}_i x_i = \underline{b} \Rightarrow \underline{b}$  ist Linearkombination der  $\underline{a}_i$ .)
- Lösung ist eindeutig  $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n$ .  
(denn:  $\text{Rang}(A) = n \Rightarrow$  alle  $\underline{a}_i$  linear unabhängig.  
Aus  $\sum_i \underline{a}_i x_i = \underline{b} = \sum_i \underline{a}_i \lambda_i$  folgt  $x_i = \lambda_i \quad \forall i$ )

#### Lösung für $n \times n$ -Systeme

Gleichungssystem  $A\underline{x} = \underline{b}$  allgemein lösbar (für alle  $\underline{b}$ ),

wenn  $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$  invertierbar.

Dann ist  $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$ .

#### Cramersche Regel:

Definiere  $A^{(k)}$ : Matrix wie  $A$ ,  $k$ -te Spalte ersetzt durch  $\underline{b}$ .

Dann ist Lösung von  $A\underline{x} = \underline{b}$ :  $x_k = \det(A^{(k)})/\det(A)$ .

(folgt nach Einsetzen von  $[A^{-1}]_{ij} = U_{ji}/\det(A)$  in  $x_k = [A^{-1}\underline{b}]_k$ ).

### 2.4.5 Drehungen und Drehmatrizen

Erinnerung (2.4.1): Koordinaten eines Vektors  $\vec{a}$  ändern sich bei Drehung des Koordinatensystems  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  gemäß  $a' = Da$  mit  $D = (D_{ij})$ ,  $D_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j$ .

Im Folgenden: Vertiefung der Diskussion von Drehmatrizen.

#### 1) Charakteristika von Drehmatrizen

- **Orthonormal** :  $D^{-1} = D^T$  bzw.  $D^T D = D D^T = \mathbb{1}$

$$\text{(Begründung: } [D^T D]_{ik} = \sum_j D_{ij}^T D_{jk} = \sum_j D_{ji} D_{jk} = \sum_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j)(\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k) = \vec{e}_i \cdot (\sum_j \vec{e}'_j (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_k)) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik} \forall \vec{a}\text{)}$$

Folgerung für die Struktur von Drehmatrizen:

Spaltenvektoren  $v_i$  in  $D = (v_1, v_2, v_3)$  stehen senkrecht aufeinander und  $|v_i| = 1$ .

- **Determinante** :  $\det(D) = 1$ .

(Begründung:  $\det D = \pm 1$  folgt aus  $D^T D = \mathbb{1}$ . Vorzeichen + folgt daraus, dass  $\Sigma, \Sigma'$  beides Rechtssysteme sind  $\rightarrow$  lassen sich kontinuierlich ineinander überführen.)

Konkret:  $D$  parametrisierbar durch drei Winkel,  $D(\phi, \theta, \xi)$  mit  $D(0, 0, 0) = \mathbb{1} \Rightarrow \det(D(0, 0, 0)) = 1$ . Drehung  $D$  sind stetige Funktionen dieser Winkel, damit ist auch  $\det(D(\phi, \theta, \xi))$  stetig und springt nicht einfach von +1 nach -1 um.)

Bemerkung: Es gibt auch Transformationen  $T$  mit  $T^T T = \mathbb{1}$  und  $\det(T) = -1$ , z.B. Spiegelung am Ursprung,  $T = -\mathbb{1}$ . In diesem Fall geht Rechtssystem in Linkssystem über.

#### 2) Wirkung von Drehungen auf physikalische Größen (teilweise Wdh.)

**physikalischer Skalar**  $\Phi$ : Invariant unter Drehung,  $\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi$ .

**physikalischer Vektor**  $v$ :  $v \rightarrow v' = Dv$ .

**physikalischer Tensor 2. Stufe**  $t$ :  $t \rightarrow t' = DtD^T$ .

Kann nun auch begründet werden aus Transformationsverhalten physikalischer Vektoren: Tensor angewandt auf Vektor gibt Vektor (z.B. Trägheitstensor:  $I\vec{\omega} = \vec{L}$ .)

$$\Rightarrow (tv) \rightarrow (tv)' = D(tv) = DtD^T v'$$

**Verallgemeinerung** für Tensoren  $n$ -ter Stufe leichter in Indexschreibweise:  $t_{ijk\dots} \rightarrow t'_{ijk\dots} = \sum_{i'j'k'\dots} D_{i'i'} D_{j'j'} D_{k'k'} \dots t_{i'j'k'\dots}$ .

Speziell **Invarianten**: Aus Tensoren abgeleitete Skalare.

**Vektoren** : Betrag

**Tensoren 2. Stufe** : Spur und Determinante

(jeweils nicht schwer zu zeigen).

### 3) Einordnung der Drehmatrizen, Drehgruppe

Klassifizierung reeller Matrizen

- (i) **Invertierbare  $n \times n$ -Matrizen** bilden Gruppe  $GL(n, \mathbb{R})$
- (ii) Matrizen  $U \in GL(n, \mathbb{R})$  mit  $U^{-1} = U^T$  bilden Gruppe:  
**Orthogonale Gruppe  $O(n)$**
- (iii) Matrizen  $D \in O(n)$  mit  $\det(D) = +1$  bilden Gruppe:  
**Spezielle orthogonale Gruppe  $SO(n)$ .**

NB: Ähnliche Strukturen gibt es auch bei den komplexen Matrizen:

Matrizen  $U$  mit  $U^{-1} = U^*T$  bilden **unitäre Gruppe  $U(n)$ .**

Matrizen  $U \in U(n)$  mit  $\det(U) = 1$  bilden **spezielle unitäre Gruppe  $SU(n)$ .** Spielen wichtige Rolle in der Elementarteilchenphysik.

#### 2.4.6 Das Eigenwertproblem

**Beispiel:** Trägheitstensor  $I$  des Kreisels verknüpft Drehimpuls  $\vec{L}$  mit Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ :  $\vec{L} = I\vec{\omega}$ . Es gibt offensichtlich eine Drehachse, für die gilt  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  (die Symmetrieachse). Für diese gilt  $I\vec{\omega} = \theta\vec{\omega}$ .

Das Trägheitsmoment  $\theta$  ist ein Beispiel für einen Eigenwert

#### 1) Eigenwerte und Eigenvektoren

Allgemein: Gegeben  $n \times n$ -Matrix  $M$

Einen Vektor  $v \neq 0$  mit  $Mv = \lambda v$  ( $\lambda$ : Zahl) nennt man **Eigenvektor**. Der zugehörige Wert  $\lambda$  heißt **Eigenwert**. Die Gleichung  $Mv = \lambda v$  ist eine **Eigenwertgleichung**.

Eigenwertgleichungen spielen eine wichtige Rolle in allen Bereichen der Physik.

#### 2) Bestimmung von Eigenwerten: Charakteristisches Polynom

Forme Eigenwertgleichung  $Mv = \lambda v$  um zu  $(M - \lambda \mathbb{1})v = 0$  ( $v \neq 0$ ).

$\Rightarrow (M - \lambda \mathbb{1})$  ist nicht invertierbar.  $\Rightarrow \det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$ .

Folgerung:

Definiere **charakteristisches Polynom**  $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \mathbb{1})$  (Polynom vom Grad  $n$ ). Eigenwerte von  $M$  können dadurch bestimmt werden, dass man die Nullstellen  $\lambda_i$  von  $\chi_M(\lambda)$  ermittelt.

Den zu einem Eigenwert  $\lambda_i$  zugehörigen **Eigenvektor**  $v_i$  erhält man dann durch Lösung des Gleichungssystems  $(M - \lambda_i \mathbb{1})v_i = 0$ .

### 3) Eigenvektoren und Eigenräume

- Es gilt: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.

Begründung: Die Behauptung gelte für  $(k-1)$  Eigenvektoren zu verschiedenen  $(k-1)$  Eigenwerten  $\lambda_j$ . Der  $k$ -te Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_k$ , sei linear abhängig:  $v_k = \sum_{j=1}^{k-1} c_j v_j$ .  
 Dann folgt einerseits  $Mv_k = M \sum c_j v_j = \sum c_j Mv_j = \sum c_j \lambda_j v_j$   
 und andererseits  $Mv_k = \lambda_k v_k = \lambda_k \sum c_j v_j = \sum c_j \lambda_k v_j$ ,  
 Also zusammen  $\sum c_j (\lambda_j - \lambda_k) v_j = 0$ . Da die  $v_j$  (für  $j < k$ ) linear unabhängig sind, folgt  $c_j = 0 \forall j$  oder  $\lambda_k = \lambda_j$  für mindestens ein  $j$ .

- Ist  $M$  symmetrisch, dann stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander.

Begründung: Sei  $v_j$  Spaltenvektor,  $v_j^T$  der zugehörige Zeilenvektor.  
 Mit  $Mv_j = \lambda_j v_j$  folgt  $v_j^T M^T = v_j^T \lambda_j$ . Weiterhin  $v_j^T v_k = \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$  (Skalarprodukt). Damit ist einerseits  $v_k^T Mv_j = v_k^T \lambda_j v_j = \vec{v}_k \cdot \vec{v}_j \lambda_j$  und andererseits  $v_k^T M^T v_j = \lambda_k \vec{v}_j \cdot \vec{v}_k$ , also zusammen  $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k (\lambda_j - \lambda_k) = 0$ .  
 Damit ist entweder  $\lambda_j = \lambda_k$  oder  $\vec{v}_j \cdot \vec{v}_k = 0$  (d.h.,  $\vec{v}_j \perp \vec{v}_k$ .)

- Ist  $\lambda_j$  ein vielfacher Eigenwert, d.h. vielfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, dann kann es mehrere linear unabhängige Eigenvektoren zu  $\lambda_j$  geben. Mit  $v_j^{(1)}$  und  $v_j^{(2)}$  ist auch jede Linearkombination  $c_1 v_j^{(1)} + c_2 v_j^{(2)}$  wieder Eigenvektor. Die Gesamtheit aller Eigenvektoren bildet also wieder einen Vektorraum, den "Eigenraum" des Eigenwerts. Dabei ist die Dimension des Eigenraums maximal die Vielfachheit des Eigenwerts (z.B. doppelter Eigenwert: – Eigenraum kann maximal eine Hyperfläche sein).

### 4) Diagonalisierung

#### Allgemein

Eine  $n \times n$ -Matrix  $M$  habe  $n$  verschiedene linear unabhängige Eigenvektoren  $v_j$  zu Eigenwerten  $\lambda_j$  (gilt z.B. sicher dann, wenn sie  $n$  verschiedene Eigenwerte hat).

Konstruiere Matrix  $V = (v_1, \dots, v_n)$  aus den Spaltenvektoren  $v_j$ . Invertierbar, da die  $v_j$  linear unabhängig ( $\det(V) \neq 0$ ).

$$\text{Es gilt: } MV = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n) = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} =: V\Lambda.$$

$$\Rightarrow \boxed{V^{-1}MV = \Lambda} \text{ mit } \Lambda: \text{ Diagonalmatrix}$$

Transformationen  $M \rightarrow V^{-1}MV$  heißen **Ähnlichkeitstransformation**. Falls es eine Ähnlichkeitstransformation gibt, die  $M$  diagonal macht, heißt  $M$  **diagonalisierbar**.

### Speziell symmetrische Matrizen

Siehe **3**): Vektoren  $v_j$  stehen senkrecht aufeinander, können natürlich auch normiert werden ( $|v_j| = 1$ ).

→  $V$  is orthonormal, entspricht einer Drehmatrix, ggf. gekoppelt mit Spiegelung (falls  $\det(D) = -1$ ).

$$\rightarrow \boxed{\Lambda = V^T M V} \text{ bzw. } \boxed{M = V \Lambda V^T}.$$

$M$  geht aus  $\Lambda$  durch Drehung hervor.

**Spektralsatz** : Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar.

→ Für symmetrische Tensoren (wie z.B. der Trägheitstensor) läßt sich ein rechtwinkliges Koordinatensystem finden, in dem die  $(x, y, z)$ -Achsen Eigenvektoren sind.

(”Hauptachsen” und ”Hauptachsentransformation”)

### 2.4.7 Funktionen von Matrizen

Zum Abschluss: Mit  $n \times n$ -Matrizen kann man im Prinzip fast so hantieren wie mit Zahlen. Man muss nur darauf achten, dass sie nicht kommutieren (i.A.  $AB \neq BA$ ). Insbesondere kann man Funktionen von Matrizen bilden.

- Potenzen: Klar ( $M^n$ , ggf.  $M^{-n}$ , falls  $M$  invertierbar).
- Allgemein (siehe Kapitel 3) lassen sich die meisten Funktionen durch Potenzreihen darstellen:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$   
 ⇒ Verallgemeinerung auf Matrizen:  $f(M) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M^k$ .
- Damit läßt sich für diagonalisierbare Matrizen  $M$  noch eine weitere Konstruktionsvorschrift motivieren:

$$\text{Sei } M = V \Lambda V^{-1} \text{ und } f(M) = \sum c_k M^k = \sum c_k (V \Lambda V^{-1})^k = V (\sum c_k \Lambda^k) V^{-1}.$$

$$\text{Mit } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ folgt } \Lambda^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow f(M) = V \left( \sum c_k \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \right) V^{-1} = V \left( \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \right) V^{-1}.$$

Diese Vorschrift läßt sich auch unabhängig von der Potenzreihendarstellung von  $f(x)$  anwenden.

# Kapitel 3

## Analysis

### Stetigkeit

Vorab: Eine Funktion  $f(x)$  heißt stetig bei  $x = x_0$ , wenn

$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \forall x$  mit  $|x - x_0| < \delta$ .

oder: Der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Anschaulich: Funktion macht keine Sprünge.

### 3.1 Differentialrechnung

(Sollte größtenteils aus der Schule schon bekannt sein.)

#### 3.1.1 Die Ableitung

##### 1) Differentialquotient

Gegeben Funktion  $f(x)$  einer reellen oder komplexen Variablen  $x$ . Der Differentialquotient

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heißt Ableitung nach  $x$ .

Alternative Schreibweisen:  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x_0} = f'(x_0)$ .

Speziell für Ableitung nach der Zeit  $t$ :  $\left. \frac{df}{dt} \right|_{t_0} = \dot{f}(t_0)$ .

NB: Die Notation  $\frac{df}{dx}$  heißt Leibniz-Schreibweise:

## 2) Alternative Sichtweise: Differential

Betrachte Funktion  $f(x)$  am Punkt  $x_0$ . Schätze  $f(x_0 + \Delta x)$  ab.

→ Zuwachs  $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \text{Rest}$ .

Der Rest verschwindet (auch relativ zum Zuwachs), wenn  $\Delta x$  sehr klein wird. Im Grenzwert  $\Delta x \rightarrow 0$  schreibt man

$$\boxed{f(x_0 + dx) = f(x_0) + df(x) \Big|_{x_0}} \text{ mit } \boxed{df(x) \Big|_{x_0} = f'(x_0) dx}.$$

NB: Sieht formal aus wie 'kürzen' ( $\frac{df}{dx} dx = df$ ).

Kürzen darf man bei Differentialquotienten natürlich eigentlich nicht. Ist trotzdem beliebte Praxis bei Physikern. Hintergrund ist genau dieses Denken in Differentialen, also:  $df$  entspricht einem Zuwachs von  $f$ , also einer echten, wenn auch sehr kleinen Zahl.

## 3) Differenzierbarkeit

Allgemein muß Grenzwert  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$  nicht existieren. Gegenbeispiel ist z.B. die Funktion  $f(x) = |x|$  bei  $x_0 = 0$ . Wenn der Grenzwert existiert, dann heißt die Funktion differenzierbar am Ort  $x_0$ .

## 4) Verallgemeinerung: Funktionen mehrerer Variablen

Gegeben sei z.B. eine Funktion von zwei Variablen  $f(x, y)$ .

Man kann ohne weiteres nach einer der Variablen ableiten (und die andere dabei festhalten). Das nennt man dann partielle Ableitung

### Notation

$$\text{Ableitung nach } x: \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0}$$

$$\text{Ableitung nach } y: \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0}$$

Geschwungene Zeichen  $\partial$  sagen aus: Achtung, hier gibt es noch weitere Variablen.  $\partial f$  ist kein Differential. Physiker dürfen nicht ohne weiteres kürzen !!! (Alle anderen sowieso nicht.)

Betrachte nun zugehöriges Differential – Zuwachs von  $f(x, y)$ , wenn man  $x$  und  $y$  von  $(x_0, y_0)$  um einen infinitesimalen Vektor  $(dx, dy)$  verschiebt:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df \text{ mit } \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}.$$

Hier sind  $dx$  und  $dy$  Differentiale, aber es kann nicht mehr einfach nach ihnen gekürzt werden.

Abgesehen von dieser Subtilität ist die partielle Ableitung nichts grundsätzlich anderes als eine "normale" Ableitung.

**5) Verallgemeinerung: Höhere Ableitungen**

Gegeben Funktion  $f(x)$

Ableitung  $f'(x)$ : Neue Funktion, kann man evtl. wieder ableiten

$$\rightarrow \text{Zweite Ableitung } f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

(Beispiel: Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung)

$$\text{Allgemein } n\text{te Ableitung: } f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$$

$$\text{Notation: } f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x).$$

**6) Mittelwertsatz der Differentialrechnung**

Zum Abschluss ein nützlicher Satz für reelle Funktionen:

Ist  $f(x)$  stetig im Intervall  $[a, b]$  und differenzierbar in  $]a, b[$ , dann folgt:

Es existiert ein Wert  $x_0 \in ]a, b[$ , so dass  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$ .

**3.1.2 Einige elementare Ableitungen**

(aus direkter Auswertung des Differentialquotienten).

**1) Potenzen:**

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

**2) Exponentialfunktion:**

$$f(x) = \exp(x) \Rightarrow f'(x) = \exp(x)$$

**3) Trigonometrische Funktionen:**

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

**3.1.3 Differentiationsregeln****1) Linearität**

$$f(x) = a g(x) + b h(x) \Rightarrow f'(x) = a g'(x) + b h'(x).$$

**2) Produktregel**

$$f(x) = g(x) h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x).$$

**3) Inversenregel**

$$f(x) = 1/g(x) \Rightarrow f'(x) = -g'(x)/g(x)^2$$

**4) Quotientenregel**

$$f(x) = g(x)/h(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) h(x) - g(x) h'(x)}{h(x)^2}$$

**5) Kettenregel**

$$f(x) = f(g(x)) \Rightarrow f'(x) = f'(g) g'(x).$$

$$\text{Leibniz-Schreibweise: } \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}.$$

Wieder ein Fall von "kürzen".

### 7) Umkehrfunktionsregel

Sei  $y = f(x)$  differenzierbar und umkehrbar  $\rightarrow x = g(y)$ .

Dann ist  $g(y)$  differenzierbar und  $g'(y) = 1/f'(x) \Big|_{x=g(y)}$ .

Leibniz-Schreibweise:  $f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow g'(y) = \frac{dx}{dy} = 1/\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1/f'(x)$ .

$\rightarrow$  Wieder so ähnlich wie "Kürzen".

Mit Hilfe der Differentiationsregeln können aus den elementaren Ableitungen von Abschnitt 3.1.2 die Ableitungen fast aller übrigen Funktionen berechnet werden.

### 3.1.4 Zusammenstellung einiger wichtiger Ableitungen

| $f(x)$             | $f'(x)$               | Einschränkungen                              |
|--------------------|-----------------------|--|
| const.             | 0                     |  |
| $x^\alpha$         | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $\alpha \in \mathbb{R}$                      |
| $\exp(x)$          | $\exp(x)$             |  |
| $\ln(x)$           | $1/ x $               | $x \neq 0$                                   |
| $r^x$              | $r^x \ln(r)$          | $0 < r \in \mathbb{R}$                       |
| ${}_b \log( x )$   | $1/(x \ln(b))$        | $0 < b \in \mathbb{R}, x \neq 0, b \neq 1$   |
| $\sin(x)$          | $\cos(x)$             |  |
| $\cos(x)$          | $-\sin(x)$            |  |
| $\tan(x)$          | $1/\cos^2(x)$         | $x \neq (z + 1/2)\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$ |
| $\cot(x)$          | $-1/\sin^2(x)$        | $x \neq z\pi$ für $z \in \mathbb{Z}$         |
| $\arcsin(x)$       | $1/\sqrt{1-x^2}$      | $-\pi/2 < \arcsin(x) < \pi/2,  x  < 1$       |
| $\arccos(x)$       | $-1/\sqrt{1-x^2}$     | $0 < \arccos(x) < \pi,  x  < 1$              |
| $\arctan(x)$       | $1/(1+x^2)$           | $-\pi/2 < \arctan(x) < \pi/2$                |
| $\text{arccot}(x)$ | $-1/(1+x^2)$          | $0 < \text{arccot}(x) < \pi$                 |
| $\sinh(x)$         | $\cosh(x)$            |  |
| $\cosh(x)$         | $\sinh(x)$            |  |
| $\tanh(x)$         | $1/\cosh^2(x)$        |  |
| $\text{coth}(x)$   | $-1/\sinh^2(x)$       |  |
| $\text{arsinh}(x)$ | $1/\sqrt{1+x^2}$      |  |
| $\text{arcosh}(x)$ | $1/\sqrt{x^2-1}$      | $0 < \text{arcosh}(x), x > 1$                |
| $\text{artanh}(x)$ | $1/(1-x^2)$           | $ x  < 1$                                    |
| $\text{arcoth}(x)$ | $-1/(x^2-1)$          | $ x  > 1$                                    |

### 3.1.5 Extremwertaufgaben

Wichtige Anwendung von Ableitungen:

Bestimmung der Extrema (d.h. Maxima oder Minima) einer Funktion.

Gegeben: Mehrdimensionale Funktion  $f(x_1 \dots x_n)$ .

Gesucht: Extrema dieser Funktion in kompaktem ( $n$ -dimensionalem) Gebiet  $\Omega$ .

NB: Die Extrema können in dem Gebiet liegen oder auf dessen Rand. Diese Fälle müssen separat behandelt werden. Weiterhin könnte es auch sein, dass noch eine Nebenbedingung erfüllt sein muss (z.B. Maximierung der Funktion auf dem Rand).

#### 1) Extrema im Inneren des Gebietes

**Lokalisierung** ohne Nebenbedingungen: Am Extremum muß Differential  $df$  in alle Richtungen verschwinden.

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \forall x_i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i$$

Damit ist noch nicht klar, ob das Extremum ein Maximum oder Minimum ist.

**Klassifizierung** anhand der zweiten Ableitungen

$$\rightarrow \text{Hesse Matrix } H = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Satz von Schwarz: Bei mehrfach differenzierbaren Funktionen kann man partielle Ableitungen vertauschen  $\Rightarrow H$  ist symmetrisch.

Daraus folgt (Abschnitt 2.4.6):  $H$  ist diagonalisierbar.

Extrema können nach den Eigenwerten von  $H$  klassifiziert werden (d.h. nach dem Zuwachs von  $d^2 f$  in Richtung der Hauptachsen).

$H$  positiv definit  $\leftrightarrow$  alle Eigenwerte positiv  $\Rightarrow$  Minimum

$H$  negativ definit  $\leftrightarrow$  alle Eigenwerte negativ  $\Rightarrow$  Maximum

$H$  indefinit  $\leftrightarrow$  negative und positive Eigenwerte  $\Rightarrow$  Sattelpunkt

**NB:** Wenn  $H$  positiv oder negativ semidefinit ist (Eigenwerte  $\lambda_i \geq 0$ , aber Eigenwerte Null sind auch dabei), dann ist keine Aussage über die Natur des Extremums möglich. Höhere Ableitungen müssen einbezogen werden.

**2) Extrema am Rand** Wenn die Funktion  $f(x_1 \dots x_n)$  am Rand minimal oder maximal wird, verschwindet das Differential  $df$  am Minimum/Maximum nicht unbedingt für alle Richtung  $dx_i$ . Es muss dann nur für Richtungen entlang des Randes verschwinden. Falls der Rand singuläre Punkte hat (z.B. bei eindimensionalen Funktionen  $f(x)$ , oder falls die Oberfläche des Gebiets  $\Omega$  Kanten und Ecken hat), muss  $df$  überhaupt nicht verschwinden. In diesem Fall muß das Verhalten der Funktion am Rand separat ausgewertet werden und mit den im Inneren ermittelten Extrema (falls vorhanden) verglichen werden.

NB: Die Beschränkung auf den "Rand" stellt eine Nebenbedingung im Sinne des nächsten Abschnitts dar.

### 3) Umgang mit Nebenbedingungen

**Fragestellung** Maximiere/Minimiere  $f(x_1, \dots, x_n)$  unter den Nebenbedingungen  $g_\alpha(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

Verschiedene Lösungsansätze.

**Elimination von Variablen** : Nutze die Gleichungen  $g_\alpha \equiv 0$ , um Variablen zu eliminieren.

$\Rightarrow$  Naheliegend, aber leider oft mühsam.

**Lagrange Parameter** : Im allgemeinen eleganter.

**Vorüberlegung:** Nebenbedingungen  $g_\alpha \equiv 0$  definieren Hyperfläche.

Für infinitesimale Vektoren  $(d\tilde{x}_1, \dots, d\tilde{x}_n)$  in dieser Hyperfläche gilt:  $dg_\alpha = \sum_i \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} d\tilde{x}_i = 0 \quad \forall \alpha$

**Rezept:**

- Definiere  $I(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha(x_1, \dots, x_n)$

- Finde Extrema von  $I$ .

$\Rightarrow$  Schar von Lösungen  $x_i(\lambda_i)$  mit  $dI = 0 \quad \forall i$ .

$$(dI = \sum_i dx_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i} \right\})$$

- Bestimme  $\lambda_\alpha$  so, daß die Nebenbedingungen erfüllt sind.

$\Rightarrow dg_\alpha = 0$  und  $g_\alpha = 0$ .

NB:  $\lambda_\alpha$  wird im Allgemeinen wieder von  $(x_1, \dots, x_n)$  abhängen.

**Ergebnis** :

Nach erfolgreicher Ausführung dieses Programms ist  $dg_\alpha \equiv 0$  und  $df = dI = 0$  für Verschiebungen innerhalb der durch die Randbedingungen definierten Hyperfläche.

**Beispiele** : siehe Vorlesung oder Literatur, z.B. Lang/Pucker.

## 3.2 Integralrechnung

### 3.2.1 Das Riemannsche Integral

Gegeben reelle Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$ . Aufgabenstellung: Berechnung der Fläche  $F$  unter der Kurve  $f(x)$  (ggf. mit negativen Beiträgen für  $f(x) < 0$ ).

#### 1) Konstruktion des Integrals

- Zerlege Intervall  $[a, b]$  in Teilintervalle der Breite  $\Delta x = (b - a)/n$ .  
→ Teilintervalle  $\nu$ :  $[x_{\nu-1}, x_\nu]$  mit  $x_\nu - x_{\nu-1} = \Delta x$ .
- Lege in jedem Teilintervall  $x$ -Werte  $\xi_\nu$  fest, so dass:  
 $x = \xi_\nu^{(o)}$ : Wert, an dem  $f(x)$  maximal wird.  
 $x = \xi_\nu^{(u)}$ : Wert, an dem  $f(x)$  minimal wird.
- Berechne  $S_n = \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) \Delta x$  jeweils für  $\xi_\nu^{(o)}$  und  $\xi_\nu^{(u)}$ .  
→ liefert Obersumme  $S_n^{(o)}$  und Untersumme  $S_n^{(u)}$  mit  $S_n^{(u)} < F < S_n^{(o)}$   $\forall n$  (wobei  $F$ : gesuchte Fläche).
- Bilde Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ .  
 $f(x)$  heißt Riemann-integrierbar, falls die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(o)}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)}$  existieren und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(o)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)}$ .  
Dann ist  $F = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(o,u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(o,u)}) \Delta x$ .

Notation:  $F = \int_a^b f(x) dx$ .

#### 2) Integrierbarkeit

Es gilt: Falls  $f(x)$  auf  $[a, b]$  stückweise stetig ist (d.h. stetig auf endlich vielen Teilintervallen) und beschränkt, dann ist  $f(x)$  integrierbar.

#### 3) Eigenschaften des Integrals

**Linearität:**  $\int_a^b \{Af(x) + Bg(x)\} dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx$ .

**Intervall-Addition:**  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ .

#### Ungleichungen:

(i) Wenn  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$

Dann folgt  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

(ii) Dreiecksungleichung:  $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

(iii) Wenn  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$  Dann folgt:  $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$

**Umkehrung**  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ . (Dann sind in dem Ausdruck  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu^{(o,u)}) \Delta x$  die Größen  $\Delta x = x_\nu - x_{\nu-1}$  negativ.)

#### 4) Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist  $f(x)$  stetig in  $[a, b]$ , so existiert ein  $\bar{\xi} \in [a, b]$  mit  $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\bar{\xi})$ .

### 3.2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zwei Teile (jeweils ohne Beweis)

1) Gegeben eine stetige Funktion  $f(x)$ . Definiere  $F_{x_0}(y) = \int_{x_0}^y f(x) dx$ .

Dann gilt:  $\frac{d}{dy} F_{x_0}(y) = f(y)$ .

2) Gegeben eine differenzierbare Funktion  $f(x)$

Dann gilt:  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) =: f(x) \Big|_a^b$ .

**Fazit:** Um das Integral  $\int f(x) dx$  zu berechnen, muss man die Stammfunktion von  $f(x)$  kennen, d.h. die Funktion  $F(x)$  mit  $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ .

Dann ist  $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$ .

NB: Stammfunktion ist natürlich nicht eindeutig. Mit  $F(x)$  ist auch  $F(x) + c$  Stammfunktion zu  $f(x)$  für jede beliebige Konstante  $c$ . Aber: an  $F(x) \Big|_a^b$  ändert das nichts.

Bemerkung: Wegen des Hauptsatzes kann man Integrale auch dazu benutzen, Stammfunktionen zu ermitteln (über  $F(y) = \int^y f(x) dx$ ).

Deshalb unterscheidet man zwischen

**unbestimmten** Integralen:  $\int f(x) dx$ .

→ keine expliziten Integrationsgrenzen angeben.

Es wird nur allgemein nach Stammfunktion gesucht.

**bestimmten** Integralen  $\int_a^b f(x) dx$ .

→ explizite Integrationsgrenzen.

Gesucht wird konkreter Wert eines Integrals.

### 3.2.3 Integrationsmethoden

Vorab: Es gibt leider kein Patentrezept, ein Integral zu knacken.

#### 1) Differentiationstabelle rückwärts lesen

bzw. Stammfunktion erraten.

#### 2) Lineare Zerlegung

Ausnutzen von  $\int \{Af(x) + Bg(x)\} dx = A \int f(x) dx + B \int g(x) dx$ .

Beispiel: Partialbruchzerlegung

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \int_0^1 \frac{1}{x+2} = \ln(x+1)|_0^1 - \ln(x+2)|_0^1 = \ln(4/3).$$

#### 3) Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel)

Voraussetzung:  $f(x)$ ,  $g(x)$  differenzierbar.

Dann gilt:  $\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$ .

#### 4) Substitution (Umkehrung der Kettenregel)

Idee: Austausch der Integrationsvariablen  $x \rightarrow y$  in  $\int f(x) dx$ .

Voraussetzung:  $x \leftrightarrow y$  hängen in umkehrbarer und stetig differenzierbarer Weise voneinander ab.

( $x = g(y)$ ,  $y = g^{-1}(x)$ ,  $\frac{dx}{dy} = g'(y)$  ist stetig).

Dann gilt:  $\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \int_{g^{-1}(x_a)}^{g^{-1}(x_b)} g'(y) f(g(y)) dy = \int_{y_a}^{y_b} \frac{dx}{dy} f(x(y)) dy$ .

#### 5) Integralfunktionen

Bei manchen Funktionen läßt sich das Integral nicht durch bekannte Funktionen ausdrücken.

→ Definiert neue Funktion

**Beispiele:**

- Error-Funktion:  $\text{Erf}(y) = \int_0^y \exp(-x^2) dx$ .
- Elliptische Integrale:  $F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi$ ,  
 $E(k, \phi) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)} d\psi$ .
- Integralsinus:  $\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx$ .
- Integralcosinus:  $\text{Ci}(y) = -\int_y^\infty \frac{\cos(x)}{x} dx$ .
- Integraleponentialfunktion:  $\text{Ei}(y) = -\int_{-\infty}^y \frac{\exp(x)}{x} dx$ .
- Integrallogarithmus:  $\text{Li}(y) = -\int_0^y \frac{1}{\ln(x)} dx$ .

#### 6) Hilfsmittel

**Formelsammlungen, Integraltafeln** , z.B.

- Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik
- Abramowitz, Stegun, Handbook of Mathematical Functions
- Gradshteyn, Ryzhik, Tables of Integrals, Series, and Products

**Symbolische Programme** , z.B. MATHEMATICA, MAPLE

### 3.2.4 Uneigentliche Integrale

Bis jetzt: Einschränkungen für das Integral

1. Intervallgrenzen endlich
2. Integrand  $f(x)$  beschränkt

Manchmal kann man Integrale im Grenzwert auch ausrechnen, wenn Einschränkungen nicht zutreffen  $\rightarrow$  "Uneigentliche Integrale".

#### 1) Uneigentliche Integrale erster Art: Integrationsgrenze unendlich

##### Definition:

Obere Grenze:  $\int_a^\infty dx f(x) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x)$

Untere Grenze:  $\int_{-\infty}^b dx f(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b dx f(x)$

Beide Grenzen:  $\int_{-\infty}^\infty dx f(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b dx f(x)$

**Cauchy-Hauptwert**  $P \int_{-\infty}^\infty dx f(x) := \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a dx f(x)$

Falls  $\int_{-\infty}^\infty dx f(x)$  nicht existiert, existiert manchmal wenigstens der Hauptwert  $P \int_{-\infty}^\infty dx f(x)$ .

Beispiel: Integral  $\int_{-\infty}^\infty dx \frac{x}{1+x^2}$  existiert nicht, aber der Hauptwert existiert ( $P \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x}{1+x^2} = 0$ ).

##### Vergleichskriterien

Kriterien, mit denen man prüfen kann, ob ein Integral überhaupt konvergiert.

##### a) Absolute Konvergenz

Falls  $\int_a^\infty dx |f(x)|$  konvergiert, konvergiert auch  $\int_a^\infty dx f(x)$ .

##### b) Konvergente Majorante

$|f(x)| \leq M(x) \quad \forall x$  und  $\int dx M(x)$  konvergiert.

Dann konvergiert  $\int dx |f(x)| \leq \int dx M(x)$ , und damit auch  $\int dx f(x)$ .

##### c) Divergente Minorante

$f(x) \geq m(x) \geq 0 \quad \forall x$  und  $\int dx m(x)$  divergiert.

Dann divergiert auch  $\int dx f(x)$ .

##### Beispiele

- $\int_a^\infty dx x^{-\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^\infty = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$  für  $\alpha > 1$ , sonst divergent.
- $\int_0^\infty dx e^{-x} = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$

#### 2) Uneigentliche Integrale zweiter Art: Integrand singulär

z.B. unbeschränkt an einem Punkt  $x_0$ .

##### Definition

Singularität an der unteren Grenze:  $\int_{x_0}^{b > x_0} dx f(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\eta}^b dx f(x)$ .

Singularität an der oberen Grenze:  $\int_{a < x_0}^{x_0} dx f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x)$ .

Intervall  $[a, b]$  schließt Singularität ein:

$$\int_a^b dx f(x) = \lim_{\substack{\eta \rightarrow 0^+ \\ \epsilon \rightarrow 0^+}} \left[ \int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x) + \int_{x_0+\eta}^b dx f(x) \right]$$

**Cauchyscher Hauptwert:**

$$P \int_a^b dx f(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[ \int_a^{x_0-\epsilon} dx f(x) + \int_{x_0+\epsilon}^b dx f(x) \right]$$

Beispiel:  $\int_{-b}^b dx \frac{1}{x}$  existiert nicht, aber  $P \int_{-b}^b dx \frac{1}{x} = 0$  existiert.

**Vergleichskriterien**

Analog den uneigentlichen Integralen erster Art.

- Falls  $\int dx |f(x)|$  konvergiert, dann auch  $\int dx f(x)$ .
- Majorantenkriterium/Minorantenkriterium analog

**Beispiel**

- $\int_0^b dx x^{-\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_0^b = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$  für  $\alpha < 1$ , sonst divergent.

**3) Wichtige uneigentliche Integrale**

**Gaußintegral:**  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$  (Herleitung siehe 3.2.5).

**Gamma-Funktion:**  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1}$  ( $x > 0$ )

- $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} = 1$  (s. unter 1)
- $\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^x = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{x-1} = x \Gamma(x)$ .  
 $\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$  für  $n \in \mathbb{N}$ ;  $\Gamma(x)$  interpoliert Fakultät.
- Weiterer spezieller Wert:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} dx x^{-1/2} e^{-x} \stackrel{(y=\sqrt{x})}{=} \int_0^{\infty} dy e^{-y^2} = \sqrt{\pi}.$$

**Beta-Funktion:**  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$  ( $x > 0, y > 0$ )

Es gilt:  $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$

**Elliptische Integrale:**

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi = \int_0^{\sin \phi} dx \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \sin^2(\psi)} d\psi = \int_0^{\sin \phi} dx \sqrt{\frac{1-k^2 x^2}{1-x^2}},$$

**Vollständige elliptische Integrale:**  $K = F(k, \pi/2)$ ,  $E = E(k, \pi/2)$ .

**3.2.5 Mehrfachintegrale**

Mit den vorher behandelten Methoden kann man auch komplizierte Probleme lösen, z.B. verschachtelte Integrale.

Wichtige Anwendung: Berechnung von Volumina

**1) Beispiele****(i) Fläche eines Kreises** des Radius  $R$ 

Integriere über infinitesimale Flächenelemente  $dA = dx dy$ .

$$A = \iint_{\text{Kreis}} dA = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2-x^2}$$

$$\stackrel{\substack{x'=x/R \\ (\text{Symmetrie})}}{=} 2R^2 \int_{-1}^1 dx' \sqrt{1-x'^2} \stackrel{\text{Bronstein}}{=} R^2 (x' \sqrt{1-x'^2} + \arcsin(x')) \Big|_{-1}^1$$

$$= \pi R^2.$$

**(ii) Volumen einer Kugel** des Radius  $R$ Integriere über infinitesimale Volumenelemente  $dV = dx dy dz$ .

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{\text{Kugel}} dV = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \\
&\stackrel{\substack{\text{(Reskaliere } x,y,z) \\ \text{Symmetrie}}}{=} 8R^3 \int_0^1 dx' \int_0^{\sqrt{1-x'^2}} dy' \int_0^{\sqrt{1-x'^2-y'^2}} dz' \\
&= 8R^3 \int_0^1 dx' \int_0^{\sqrt{1-x'^2}} dy' \sqrt{(1-x'^2)-y'^2} \\
&\stackrel{(\tilde{y}=y'/\sqrt{1-x'^2})}{=} 8R^3 \int_0^1 dx' (1-x'^2) \int_0^1 d\tilde{y} \sqrt{1-\tilde{y}^2} \stackrel{\text{Bronstein}}{=} \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

**(iii) Volumen unter einer Gaussglocke**

$$\iint_{\infty} dA e^{-x^2-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right]^2 = \pi.$$

**2) Wechsel der Integrationsvariablen, Jacobi-Determinante**Ausgangspunkt: Variablen  $x_1 \cdots x_n$ , $n$ -dimensionales Volumenelement  $dV = dx_1 \cdots dx_n$ .Ziel: Neue Variablen  $\xi_1 \cdots \xi_n$ , Integral über  $d\xi_1 \cdots d\xi_n$ .Neues Volumenelement  $dV'$  aufgespannt durch die Vektoren  $(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_j}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \xi_j}) d\xi_j$ .→ Insgesamt gegeben durch die Determinante der Matrix  $J = (\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j})$ 

$$\Rightarrow dV' = d\xi_1 \cdots d\xi_n |\det(J)|$$

$$\text{bzw. } \int dx_1 \cdots dx_n f(\{x_j\}) = \int d\xi_1 \cdots d\xi_n |\det(J)| f(\{\xi_j\}).$$

Die Matrix  $J$  heißt Jacobi-Matrix. Die Determinante  $\det(J)$  heißt Jacobi-Determinante oder Funktionaldeterminante. Sie wird auch manchmal notiert als  $J = \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(\xi_1, \dots, \xi_n)}$ .**3) Anwendung: sphärische Koordinaten**• **Zwei Dimensionen: Polarkoordinaten**  $(r, \phi)$ Übergang von kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  zu Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  mit  $x = r \cos(\phi)$ ,  $y = r \sin(\phi)$ , wobei  $r \geq 0$  und  $\phi \in [0, 2\pi[$ .

$$\text{Jacobi-Matrix: } J = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) \end{pmatrix}, \text{ mit } \det(J) = r$$

 $dx, dy$  entspricht der infinitesimalen Fläche  $dA = dx dy$ . $dr, d\phi$  entspricht der infinitesimalen Fläche

$$dA' = dr d\phi |\det(J)| = r dr d\phi.$$

**Anwendungsbeispiele:**

$$\text{(i) Kreisfläche: } A = \iint_{\text{Kreis}} dA = \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\phi = \pi R^2.$$

**(ii) Volumen unter Gaussglocke:**

$$\iint_{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = \pi.$$

- **Drei Dimensionen: Zylinderkoordinaten**  $(r, \phi, z)$

$$x = r \cos(\phi), y = r \sin(\phi), z = z \text{ mit } r > 0, \phi \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Jacobi-Determinante: } |\det(J)| = r.$$

$$dx, dy, dz \text{ entspricht dem infinitesimalen Volumen } dV = dx dy dz.$$

$$dr, d\phi, dz \text{ entspricht dem infinitesimalen Volumen } dV' = r dr d\phi dz.$$

- **Drei Dimensionen: Kugelkoordinaten**  $(r, \theta, \phi)$ .

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi), y = r \sin(\theta) \sin(\phi), z = r \cos(\theta)$$

$$\text{mit } r > 0, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi[.$$

$$\text{Jacobi-Matrix: } J = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\phi) & r \cos(\theta) \cos(\phi) & -r \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \sin(\theta) \sin(\phi) & r \cos(\theta) \sin(\phi) & -r \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\det(J)| = r^2 \sin(\theta).$$

$$dx, dy, dz \text{ entspricht infinitesimalem Volumen } dV = dx dy dz.$$

$$dr, d\theta, d\phi \text{ entspricht infinitesimalem Volumen } dV' = r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\phi.$$

**Beispiel** Volumen einer Kugel des Radius  $R$ :

$$V = \iiint_{\text{Kugel}} dV = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

### 3.2.6 Kurven- und Oberflächenintegrale

Bis jetzt: Integrationen über  $d$ -dimensionale Gebiete in  $d$ -dimensionale Räumen ('Volumina'). Oft muss man jedoch über niederdimensionale Mannigfaltigkeiten integrieren, z.B. Flächen oder Linien im Raum.

Beispiele: Umfang eines Kreises oder Oberfläche einer Kugel.

#### 1) Kurvenintegrale

Gegeben Raumkurve  $C$ , irgendwie parametrisiert durch vektorwertige Funktion  $\vec{r}(s), s \in [s_0 : s_1]$ . (Parameter  $s$  ist im Prinzip beliebig, könnte z.B. die Zeit sein). Die Funktion  $\vec{r}(s)$  soll differenzierbar sein, d.h. jede Komponente  $r_i(s)$  ist differenzierbar  $\rightarrow$  **glatte** Kurve.

- **Häufige Fragestellung: Bogenlänge** der Kurve  $C$ .

Infinitesimales Längenelement auf Kurvenstück zu  $ds$ :

$$dl = |d\vec{r}| = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}} = ds \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2}$$

$$\Rightarrow L = \int_C dl = \int_{s_0}^{s_1} ds \sqrt{\left(\frac{d\vec{r}}{ds}\right)^2}$$

(NB: Notation für *geschlossene* Kurven auch oft  $\oint dl$ )

- **Beispiele**

- **Umfang eines Kreises: 1. Weg** Direkt über  $x^2 + y^2 = R^2$

Berechne zunächst Bogenlänge  $U_{1/4}$  des Viertelkreises im oberen rechten Quadranten ( $x > 0, y > 0$ ).

$$\text{Parametrisiere direkt mit } x: y(x) = \sqrt{R^2 - x^2} (x \in [0 : R])$$

$$\vec{r}(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right) \Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 - (x/R)^2}}.$$

Umfang des Viertelkreises:

$$U_{1/4} = \int_0^R dx \left| \frac{d\vec{r}}{dx} \right| \stackrel{(x' = x/R)}{=} R \int_0^1 dx' \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}}$$

$$= R \arcsin(x') \Big|_0^1 = R\pi/2.$$

→ Umfang Vollkreis  $U = 4U_{1/4} = 2\pi R$ .

- **Umfang eines Kreises, 2. Weg:** Über Polarkoordinaten  
Parametrisierung mit  $\phi$ :  $\vec{r}(\phi) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \end{pmatrix}$ ,  $\phi \in [0 : 2\pi]$ .

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = R \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = R \Rightarrow U = \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = 2\pi R.$$

- **Umfang einer Ellipse**

Ellipsengleichung  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ; Sei  $b > a$ .

→ Einheitskreis, gestreckt um  $(a, b)$  in Richtung  $(x, y)$ .

→ Parametrisierung in Polarkoordinaten:  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ b \sin \phi \end{pmatrix} = \vec{r}(\phi)$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = \sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} = b \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}$$

mit  $e = \sqrt{1 - a^2/b^2}$ : Exzentrizität.

$$\Rightarrow U = \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = b \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} = bE(e, 2\pi).$$

- **Allgemeiner: Wegintegral** einer Funktion von  $\vec{r}$  entlang Kurve  $C$ .

- **Skalare Funktion**  $f(\vec{r})$  (Kurvenintegral erster Art)

$$\int_C dl f(\vec{r}) = \int_{s_0}^{s_1} ds \sqrt{\left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2} f(\vec{r})$$

- **Vektorielle Funktion**  $\vec{f}(\vec{r})$  (Kurvenintegral zweiter Art)

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_{s_0}^{s_1} ds \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

Beispiel: Berechnung der physikalischen Arbeit (Kraft mal Weg).

Gefragt ist nach der Arbeit  $W$ , die entlang eines bestimmten

Weges  $\vec{r}(t)$  verrichtet wird. Im allgemeinen hängt die Kraft vom

Ort ab:  $\vec{F}(\vec{r}) \Rightarrow W = \int d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ .

## 2) Flächenintegrale

Gegeben (krumme) Fläche  $O$  im Raum.

Auch irgendwie parametrisiert, diesmal zwei Variablen nötig:  $\vec{r}(u, v)$ .

- **Häufige Fragestellung: Flächeninhalt**  $A$

Infinitesimales Flächenelement  $dA$ :

Aufgespannt durch die beiden Vektoren  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$ ,  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$ .

⇒ Definiere Vektor  $d\vec{A} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv$

steht lokal senkrecht auf der Fläche  $O$ ,

Betrag ist Flächeninhalt des Flächenelements:  $dA = |d\vec{A}|$

$$\Rightarrow A = \int_O dA = \int du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|.$$

- **Beispiel:** Oberfläche einer Kugel vom Radius  $R$ .

Parametrisiere mit Kugelkoordinaten  $(\theta, \phi)$ :

$$\vec{r}(\theta, \phi) = R(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = R(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R(-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = R^2 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = R \sin \theta \vec{r}$$

$$\Rightarrow A = R^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -R^2 2\pi \cos \theta \Big|_0^\pi = 4\pi R^2.$$

- **Allgemeiner: Oberflächenintegral** einer Funktion von  $\vec{r}$  auf einer Fläche  $O$ .

- **Skalare Funktion**  $f(\vec{r})$  (skalares Oberflächenintegral)

$$\int_O dA f(\vec{r}) = \int du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| f(\vec{r}).$$

- **Vektorielle Funktion**  $\vec{f}(\vec{r})$  (vektorielles Oberflächenintegral)

$$\int_O d\vec{A} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int du dv \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \vec{f}(\vec{r}).$$

Beispiel: Berechnung des (elektrischen) Stroms  $I$  durch Draht.

Lokale Stromdichte ist  $\vec{j}(\vec{r})$ . Strom fließt durch Querschnittsfläche  $O$  des Drahtes. Nur der Anteil senkrecht zur Fläche trägt zum Strom bei. (Dabei ist es egal, wie die Fläche  $O$  genau gelegt wird)  $\Rightarrow dI = \vec{j} \cdot d\vec{A} \Rightarrow I = \int_O \vec{j} \cdot d\vec{A}$ .

### 3.3 Potenzreihen

Potenzreihen: Alternative Darstellung unendlich oft differenzierbarer Funktionen. Für praktische Berechnungen enorm wichtig in vielen Bereichen der Physik, vor allem, weil damit gute Näherungsausdrücke für diese Funktionen motiviert werden können.

#### 3.3.1 Folgen und Reihen

##### 1) Folgen

**Formale Definition:** Eine Folge ist eine unendliche Menge von durchnummerierten Zahlen  $(a_1, a_2, \dots) \equiv (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . bzw. eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  oder  $\mathbb{N}_0$  in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

**Beispiele:**

- (a)  $(0, 1, 2, 3, \dots)$   $(a_n) = n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )
- (b)  $(1, -1, 1, \dots)$   $(a_n) = (-1)^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ )
- (c)  $(1, 1/2, 1/3, \dots)$   $(a_n) = 1/n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ): Harmonische Folge
- (d)  $(1, q, q^2, \dots)$   $(a_n) = q^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ): Geometrische Folge
- (e)  $(1, 1, 1/2, 1/6, \dots)$   $(a_n) = 1/n!$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ )
- (f)  $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$   $(a_n = a_{n-1} + a_{n-2})$ : Fibonacci-Folge

**Charakterisierung von Folgen:**

**Beschränktheit:**  $(a_n)$  beschränkt  $\Leftrightarrow \exists B : |a_n| \leq B \forall n \in \mathbb{N}$

**Monotonie:**  $(a_n)$  monoton steigend  $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_n)$  streng monoton steigend  $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

Analog (streng) monoton fallend

**Konvergenz:**  $(a_n)$  konvergent, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  existiert.

Alternativ **Cauchy-Kriterium** (äquivalent)

$(a_n)$  konvergent  $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N : |a_n - a_m| < \epsilon \forall n, m > N$

**Wichtige Sätze:**

- Jede konvergente Folge ist beschränkt
- Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.

## 2) Reihen

**Definition:** Gegeben Folge  $(a_k)$ . Zugehörige **Reihe** ist die Folge  $(S_n)$  mit  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  bzw.  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ .

**Notation:**  $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bzw.  $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

NB: Damit ist noch nichts darüber ausgesagt, ob die Reihe überhaupt einen Grenzwert  $S$  hat, d.h. ob die Folge  $S_n$  konvergiert!

**Konvergenzkriterien für Reihen**

(für Beweise siehe z.B. Vorlesung 'Mathematik für Physiker')

**Nullfolgenkriterium** : Für konvergente Reihen gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ . Umgekehrt sind Reihen mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$  sicher divergent.

**Leibnizkriterium** für **alternierende** Reihen (d.h. Reihen, bei denen sich die Vorzeichen aufeinanderfolgender Glieder  $a_k$  abwechseln): Alternierende Reihen sind konvergent, wenn  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$  und  $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ .

Beweisskizze: OBdA starte die Reihe mit  $a_0 > 0$ . Betrachte Partialsummen  $S_{2n}$  und  $S_{2n+1}$  mit geraden und ungeraden Indizes. Die Folge der  $S_{2n}$  ist positiv und monoton fallend, die der  $S_{2n+1}$  negativ und monoton steigend. Da beide Folgen beschränkt sind, haben sie einen Grenzwert. Weiterhin ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$ , deshalb sind die beiden Grenzwerte identisch.

**Absolute Konvergenz:** Falls  $S_0 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert, konvergiert auch  $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ . Die Reihe  $S$  heißt dann absolut konvergent. Konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind, heißen **bedingt konvergent**.

**Majorantenkriterium:** Falls  $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$  konvergiert und  $|a_k| < m_k$  für fast alle Glieder  $a_k$  (bis auf endlich viele), dann ist Reihe  $S$  absolut konvergent.

**Quotientenkriterium:** Betrachte Grenzwert  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ . Falls dieser Grenzwert existiert und  $\rho < 1$ , ist die Reihe absolut konvergent, falls  $\rho > 1$ , divergiert sie. Für  $\rho = 1$  ist keine Aussage möglich.

Beweisskizze: Abschätzung der Koeffizienten durch  $a_k \sim C\rho^k$  und der gesamten Reihe durch geometrische Reihe  $C \sum_k \rho^k$ .

**Wurzelkriterium:** Betrachte Grenzwert  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ . Falls dieser Grenzwert existiert und  $\rho < 1$ , ist die Reihe absolut konvergent, falls  $\rho > 1$ , divergiert sie. Für  $\rho = 1$  ist keine Aussage möglich.

Beweisskizze: Abschätzung der Koeffizienten durch  $a_k \sim \rho^k$  und der gesamten Reihe durch geometrische Reihe  $\sum_k \rho^k$ .

**Beispiele:**

- (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} k$  divergiert.  
 (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$  hat keinen Grenzwert.  
 (c)  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  divergiert.  
 (aber  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$  konvergiert ( $\rightarrow \ln(2)$ ).)  
 (d)  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ : Geometrische Reihe  
 Hier kann man Teilsummen berechnen:  $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$   
 $\Rightarrow$  Divergiert für  $q \geq 1$ , konvergiert für  $q < 1$ .  
 Für  $q < 1$  ist  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$   
 (e)  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k!$  konvergiert ( $\rightarrow e$ ).

**Eigenschaften von Reihen:**

**Umsortierung** der Terme ist für *absolut konvergente* Reihen erlaubt und ändert den Grenzwert nicht. Für *bedingt konvergente* Reihen gilt das **Riemannsches Theorem**: Man kann die Terme so umsortieren, dass die Reihe divergiert oder gegen einen beliebigen Grenzwert strebt.

**Addition** von Reihen, **Multiplikation** mit Skalar: Zwei konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert oder subtrahiert werden, und eine Reihe darf (gliedweise) mit einem Skalar multipliziert werden. Das Ergebnis ist wieder konvergent.

**3.3.2 Potenzreihen****1) Definition:**

Darstellung von Funktionen als unendliche Reihen:  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  (geometrische Reihe)

**2) Konvergenz:**

Frage: Wann konvergiert eine Potenzreihe?

**Konvergenzradius:** (ohne Beweis)

Es gibt einen Konvergenzradius  $R$ , so dass gilt:

- Für  $|x| < R$ : Die Reihe konvergiert absolut.
- Für  $|x| > R$ : Die Reihe konvergiert nicht.
- Für  $|x| = R$ : Die Reihe konvergiert oder divergiert.

NB: Sofern die Reihe konvergiert, ist sie bei  $|x| = R$  auch stetig (**Abelscher Grenzwertsatz**).

**Kriterien** zur Berechnung des Konvergenzradius

Ergeben sich aus Kriterien für die Konvergenz von Reihen:

- **Quotientenkriterium**  $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ .
- **Wurzelkriterium**  $\frac{1}{R} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ .

(sofern Grenzwerte existieren).

**Beispiele:**

- Geometrische Reihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow R = 1$ .
- $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \Rightarrow R = 1$ .
- $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \Rightarrow R = \infty$ .

**Fehlerabschätzung:** Wann kann man eine Reihe abbrechen?

Sei  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Betrachte Restglied  $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k$ .

**Lagrangesche Abschätzung:**  $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \max_{|t| < |x|} |f'(t)|$ .

**Praktische Abschätzung:**

Falls  $|a_{k+1}| < |a_k|$  für  $k > n$  und  $|x| < 1$ ,

folgt  $|R_n(x)| \leq a_{n+1} \frac{x^{n+1}}{1-x}$ .

(Abschätzung mittels geometrischer Reihe)

**3) Rechnen mit Potenzreihen**

- **Addieren, Subtrahieren** : Gliedweise

$$\sum a_k x^k \pm \sum b_k x^k = \sum (a_k \pm b_k) x^k$$

- **Multiplizieren** : Nur bei *absolut konvergenten* Reihen erlaubt. Dann wird ausmultipliziert wie bei Polynomen. Ebenso kann man dividieren, sofern nicht durch Null geteilt wird. (I.A. wird sich dabei der Konvergenzradius ändern).

- **Substitution** : *Absolut konvergente* Reihen können ineinander substituiert werden. (I.A. wird sich der Konvergenzradius ändern).

- **Differentiation und Integration** : Gliedweise.

$$f(x) = \sum a_k x^k \rightarrow f'(x) = \sum_k a_k k x^{k-1} \text{ etc.}$$

**4) Eindeutigkeit**

Wenn  $\sum a_k x^k \equiv \sum b_k x^k$  auf einem Intervall um  $x = 0$ , dann ist  $a_k = b_k \forall k$ .

$\Rightarrow$  erlaubt **Koeffizientenvergleich**.

Äquivalent:  $\sum c_k x^k \equiv 0$  auf einem Intervall  $\Rightarrow c_k = 0 \forall k$ .

Folgt letztlich daraus, dass alle Ableitungen Null sind.

NB: Interpretation innerhalb der **linearen Algebra**:

Potenzreihen bilden unendlichdimensionalen Vektorraum,

Funktionen  $x^k$  bilden linear unabhängige Basis.

**3.3.3 Taylor-Entwicklung**

Methode, Potenzreihen für Funktionen zu konstruieren. Funktioniert für sehr viele Funktionen  $f(x)$ .

**1) Taylor-Entwicklung um  $x = 0$  (MacLaurin-Reihe)**

Funktion  $f(x)$  sei unendlich oft differenzierbar.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k && \Rightarrow a_0 = f(0) \\ f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k k x^{k-1} && \Rightarrow a_1 = f'(0). \\ f''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} && \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(0). \\ &\vdots && \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1) \cdots (k-n+1) x^{k-n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

$$\Rightarrow \text{Taylor-Reihe } \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}.$$

## 2) Taylor-Entwicklung um beliebigen Punkt $x_0$

Nachteile der MacLaurin-Reihe bei großen  $x$ :

- Für große  $x$  muss man immer mehr Terme mitnehmen, um eine gute numerische Genauigkeit zu erzielen
- Eventuell konvergiert die Reihe gar nicht mehr.

Ausweg: Bilde Taylor-Reihe um anderen Punkt  $x_0$ .

Schreibe  $f(x) = f(x_0 + h) = g(h)$ , entwickle  $g(h)$

$$\Rightarrow \text{Taylor-Reihe } \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}.$$

## 2) Beispiele von MacLaurin-Reihen

**Geometrische Reihe**  $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow a_k = f^{(k)}(0)/k! = 1$ .

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

**Exponentialfunktion**  $f(x) = \exp(x) \Rightarrow a_k = f^{(k)}(0)/k! = 1/k!$ .

$$f(x) = \exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$$

**Trigonometrische Funktionen**

$$f(x) = \sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$f(x) = \cos(x) = 1 - x^2/2! + x^4/4! + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

NB: Vergleich der Potenzreihen von  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  und  $\exp(x)$  liefert endlich den Beweis für den Eulerschen Satz ( $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ ).

**Logarithmus:** Entwicklung von  $\ln(x)$  nicht möglich ( $\ln(0)$  divergiert)!

Stattdessen Entwicklung von  $\ln(1+x)$ .

$$f(x) = \ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k/k$$

NB: Bezug zur harmonischen Reihe:  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}/k = \ln(2)$ .

**Potenzen**  $f(x) = x^\alpha$ .

Für beliebige  $\alpha$  ist Entwicklung nicht möglich, da  $f(x)$  i.A. nicht beliebig oft differenzierbar  $\rightarrow$  Entwicklung von  $(x+1)^\alpha$ .

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$\text{mit } \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Speziell  $\alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow$  Potenzreihe bricht ab.

$$\text{Man erhält bekannte Formel } (1+x)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k.$$

## 4) Gültigkeit der Taylor-Entwicklung:

**Wann** kann man Taylor-Reihen bilden?

Notwendig: Unendlich oft differenzierbar bei  $x_0$ .

Achtung: Diese Bedingung ist nicht hinreichend.

Berühmtes Gegenbeispiel  $f(x) = \exp(-1/x^2)$ .

Bei  $x = 0$  unendlich oft differenzierbar, aber  $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$ .

$\Rightarrow$  Taylorreihe wäre identisch Null.

**Wo** ist Taylor-Reihe gültig?

Antwort: Natürlich innerhalb des Konvergenzradius.

Achtung: Nicht notwendig deckungsgleich mit dem Definitionsbereich der ursprünglichen Funktion  $f(x)$

Beispiel:  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  ist definiert im zusammenhängenden Gebiet  $x \in ]-\infty, 1[$ , aber Taylorreihe  $\sum x^k$  konvergiert nicht mehr ab  $x \leq -1$ .

### 5) Taylor-Reihen in mehreren Variablen

Beispiel: Funktion von zwei Variablen  $f(x, y)$ , entwickelt um  $(x_0, y_0)$ .

Potenzreihe:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) \\ &\quad + a_{20}(x - x_0)^2 + a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + a_{02}(y - y_0)^2 \\ &= \sum_{i,j} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j \end{aligned}$$

Koeffizienten  $a_{ij}$  sind wieder eindeutig.

Ergeben sich als **partielle Ableitungen**:  $a_{00} = f(x_0, y_0)$ ,

$$a_{10} = \frac{\partial}{\partial x} f|_{(x_0, y_0)}, \quad a_{01} = \frac{\partial}{\partial y} f|_{(x_0, y_0)},$$

$$a_{20} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f|_{(x_0, y_0)}, \quad a_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f|_{(x_0, y_0)}, \quad a_{02} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f|_{(x_0, y_0)}, \text{ etc.}$$

$$\Rightarrow \text{Taylor-Reihe: } f(x, y) = \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!} [(x-x_0) \frac{\partial}{\partial x}]^i [(y-y_0) \frac{\partial}{\partial y}]^j f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}$$

Kann mit  $(a + b)^n = \sum_i \frac{n!}{i!(n-i)!} a^i b^{n-i}$  umgeschrieben werden als

$$f(x, y) = \sum_n \frac{1}{n!} [(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y}]^n f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}$$

**Verallgemeinerung** für Funktion  $f(x_1, \dots, x_M)$  von  $M$  Variablen  $x_j$

Entwicklung um  $(a_1, \dots, a_M)$

$$f(x_1, \dots, x_M) = \sum_n \frac{1}{n!} \left[ \sum_{j=1}^M (x_j - a_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^n f(x_1, \dots, x_M) \Big|_{(a_1, \dots, a_M)}$$

### 3.3.4 Analytische Funktionen

Alle bisherigen Aussagen für Potenzreihen  $f(x) = \sum_k a_k x^k$  gelten sowohl für reelle als auch für komplexe Variablen  $x$ . Hier nun: Spezielle Eigenschaften *komplexer* differenzierbarer Funktionen  $f(z)$  ( $z, f(z) \in \mathbb{C}$ ).

#### 1) Definitionen

##### Analytische Funktion

Eine komplexe Funktion  $f(z)$  heißt **analytisch bei**  $z = a$ , wenn  $f(z)$  für alle Punkte innerhalb eines (möglicherweise kleinen) Kreis um  $z = a$  **differenzierbar** ist, d.h. der Grenzwert  $\frac{df}{dz} = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz}$  existiert und ist eindeutig für alle möglichen Richtungen von  $dz$  in der komplexen Ebene.

Eine Funktion  $f(z)$  heißt **analytisch in einem (offenen) Gebiet**, wenn  $f(z)$  bei jedem Punkt in diesem Gebiet analytisch ist.

**Reguläre und singuläre Punkte** : Sei eine komplexe Funktion  $f(z)$ .

**Reguläre Punkte** von  $f(z)$  sind Punkte, wo  $f(z)$  analytisch ist.

**Singuläre Punkte** oder **Singularitäten** sind Punkte, an denen  $f(z)$  nicht analytisch ist.

Falls  $f(z)$  bei  $z = a$  singulär ist, aber rund um  $a$  analytisch, dann ist  $a$  eine **isolierte Singularität**.

Ein **Pol** ist eine isolierte Singularität, bei der die reziproke Funktion  $g(z) = 1/f(z)$  eine Nullstelle hat. An einem **Pol nter Ordnung** hat  $1/f(z)$  eine  $n$ -fache Nullstelle.

##### Beispiele:

Die Funktion  $f(z) = z^2$  ist analytisch.

Die Funktion  $f(z) = |z|^2$  ist nicht analytisch.

(Nicht differenzierbar im Komplexen:

In Polardarstellung sei  $z = |z|e^{i\phi}$ ,  $dz = |dz|e^{i\psi}$ .

Dann ist  $\lim_{dz \rightarrow 0} \frac{f(z+dz) - f(z)}{dz} = 2|z| \cos(\phi - \psi)e^{-i\psi}$  *nicht* eindeutig:

Hängt von  $\psi$  ab.)

Die Funktion  $f(z) = 1/z^2$  hat einen zweifachen Pol bei  $z = 0$  und ist ansonsten analytisch.

#### 2) Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Sei  $z = x + iy$  und  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ . Es gilt:

**Cauchy-Riemann-Relationen** Wenn  $f(z)$  analytisch ist, dann gilt

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$$

(Beweisskizze:  $df = du + idv$ ;  $dz = dx + idy$ .

$$\Rightarrow df = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + i \frac{\partial v}{\partial x} dx + i \frac{\partial v}{\partial y} dy \stackrel{!}{=} \frac{df}{dz} dz = \frac{df}{dz} (dx + idy),$$

wobei  $\frac{df}{dz}$  eindeutig sein soll.  $\Rightarrow (\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}) \stackrel{!}{=} (-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y})$ .

Rest folgt aus Vergleich von Real- und Imaginärteil.)

**Umgekehrt** gilt: Falls die  $u$  und  $v$  stetig und stetig differenzierbar sind und ihre partiellen Ableitungen die Cauchy-Riemann-Relationen erfüllen, ist  $f(z) = u + iv$  analytisch.

(Beweisskizze: Eindeutigkeit der Ableitung läßt sich zumindest für

Grenzwerte  $dz \rightarrow 0$  entlang gerader Pfade von  $dz$  zeigen.

Schreibe  $dz = dx + idy = |dz|e^{i\phi} \rightarrow dx = |dz| \cos \phi, dy = |dz| \sin \phi$ .

$$df = |dz| \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \phi + i \frac{\partial v}{\partial x} \cos \phi + i \frac{\partial v}{\partial y} \sin \phi \right]$$

$$= |dz| (\cos \phi + i \sin \phi) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right], \text{ wegen Cauchy-Riemann-Relation.}$$

Damit ist  $\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$  eindeutig.)

**NB:** Daraus folgt unmittelbar, dass für analytische  $f = u + iv$  die Funktionen  $u$  und  $v$  im Analytizitätsgebiet die sogenannte **Laplace-Gleichung** erfüllen:  $\Delta u = 0, \Delta v = 0$  mit  $\Delta g(x, y) := \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ .

( $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ . Herleitung für  $v$  analog.)

**Beispiele:**

$$f(z) = z^2 =: u(x, y) + iv(x, y) \text{ mit } u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \text{analytisch!}$$

$$f(z) = |z|^2 =: u(x, y) + iv(x, y) \text{ mit } u = x^2 + y^2, v \equiv 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{nicht analytisch!}$$

### 3) Zusammenhang mit Potenzreihen

Grund dafür, dieses Kapitel 3.3.4 in 3.3 aufzunehmen.

**Theorem:** (ohne Beweisskizze): Eine Funktion  $f(z)$ , die in einem Gebiet analytisch ist (also *mindestens einmal* differenzierbar), ist damit automatisch *unendlich oft* differenzierbar und kann in jedem Punkt  $a$  des Gebietes in eine Taylorreihe entwickelt werden. Der *Konvergenzradius* der resultierenden Potenzreihe ist durch den Abstand zum nächsten singulären Punkt in der komplexen Ebene gegeben.

(Beispiel:  $f(z) = \ln(1+z)$  hat Singularität bei  $z = -1$ . Deshalb hat die MacLaurin-Reihe von  $f(z)$  den Konvergenzradius  $R = 1$ .)

**NB: Analytische Fortsetzung** - Innerhalb eines zusammenhängenden Gebiets kann der Konvergenzbereich bzw. u.U. auch der Definitionsbereich einer Funktion  $f(z)$  erweitert werden, indem man die Taylorreihe um  $z = a$  dazu nutzt, eine neue Taylorreihe um einen geeigneten Punkt  $b$  zu konstruieren.

(Beispiel: Man kann die MacLaurin-Reihe von  $f(z) = \ln(1+z)$  dazu nutzen, eine Taylorreihe um  $z = 0.9$  zu konstruieren. Die neue Potenzreihe hat den Konvergenzradius  $R = 1.9$  und konvergiert daher in einem größeren Bereich als die ursprüngliche Reihe.

Durch sukzessive analytische Fortsetzungen über die komplexe Ebene kann man den Definitionsbereich von  $f(z)$  auch so erweitern, dass die Funktion für reelle  $z < -1$  definiert ist. Das Ergebnis ist allerdings nicht eindeutig und hängt davon ab, ob über die obere oder untere Halbebene von  $\mathbb{C}$  analytisch fortgesetzt wurde.)

## 4) Hexereien mit analytischen Funktionen

Analytische Funktionen haben eine Reihe erstaunlicher Eigenschaften. (Gegenstand des Gebietes der *Funktionentheorie*)

**Cauchyscher Integralsatz:** Wenn  $f(z)$  auf einer 'einfachen' geschlossenen Kurve  $C$  und in dem darin eingeschlossenen Gebiet  $G$  analytisch ist, dann gilt:  $\oint_C dz f(z) = 0$ .

Dabei ist eine 'einfache' Kurve eine Kurve, die sich nicht selbst kreuzt, und das Integral  $\int_C dz f(z)$  ist als *Kurvenintegral* analog Abschnitt 3.2.6 definiert: Die Kurve  $C$  sei durch eine Funktion  $z(s)$  mit irgendeinem Parameter  $s$  parametrisiert ( $s \in [s_0, s_1]$ ). Dann ist  $\int_C dz f(z) = \int_{s_0}^{s_1} ds \frac{dz}{ds} f(z(s))$

(Beweisskizze: Betrachte Einfachheitshalber konvexes Gebiet (anderenfalls Zerlegung in konvexe Teilgebiete). Betrachte in  $\oint_C dz f(z) = \oint_C (dx + idy)f(z)$ . zunächst den Term  $\oint dx f(z)$ . Weg  $C$  kann in oberen und unteren Teilweg  $y_u(x)$  und  $y_o(x)$  zerlegt werden.  $\oint dx f(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (f(x, y_u(x)) - f(x, y_o(x))) dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_o(x)}^{y_u(x)} dy \frac{\partial f}{\partial y} = - \iint_G dA \frac{\partial f}{\partial y}$ . Analog  $\oint_C dy f(z) = \iint_G dA \frac{\partial f}{\partial x}$ . Zusammen  $\oint (dx + idy)f = - \iint_G dA (\frac{\partial f}{\partial y} - i \frac{\partial f}{\partial x}) = - \iint_G dA (\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}) = 0$  wegen Cauchy-Riemann Relationen)

Folgerung: Integrationswege können (bei gleichbleibendem Anfangs- und Endpunkt) in der komplexen Ebene beliebig verschoben werden, solange beim Verschieben keine singulären Punkte überstrichen werden. (Altes und neues Kurvenintegral unterscheiden sich um eine geschlossene Kurve, die nach dem Cauchyschen Integralsatz keinen Beitrag liefert.

Beispiel: Berechnung des Integrals  $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} e^{ikx}$ .

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-ik/2)^2} e^{-k^2/4} = e^{-k^2/4} \int_{-(\infty-ik/2)}^{\infty-ik/2} dy e^{-y^2}$$

$$\stackrel{\text{Cauchy}}{=} e^{-k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = e^{-k^2/4} \sqrt{\pi}.$$

**Cauchysche Integralgleichung :** Sei eine einfache geschlossene Kurve  $C$ , die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Wenn  $f(z)$  auf  $C$  und dem von  $C$  eingeschlossenen Gebiet  $G$  analytisch ist, dann gilt für Punkte  $w$  in dem Gebiet  $G$ :  $\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w)$ .

(Beweisskizze: Ziehe Integrationskurve so weit zusammen (Cauchyscher Integralsatz!), bis sie nur einen Kreis von infinitesimalem Radius  $\epsilon$  um den Pol  $z = w$  ist. Parametrisiere sie mit  $\phi \in [0 : 2\pi]$ :  $z(\phi) = w + \epsilon e^{i\phi}$ .  $\rightarrow \oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{dz}{d\phi} \frac{f(z)}{z-w} = \int_0^{2\pi} d\phi (i\epsilon e^{i\phi} \frac{f(w)}{\epsilon e^{i\phi}} = f(w) i \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi i f(w)$ .

**Residuensatz** Folgt direkt aus dem Cauchyschen Integralsatz.

Sei eine einfache geschlossene Kurve  $C$ , die gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die Funktion  $f(z)$  sei auf  $C$  analytisch und innerhalb des von  $C$  umschlossenen Gebietes  $G$  ebenfalls bis auf endlich viele isolierte Singularitäten  $z_j$ .

Definiere **Residuum**:  $\text{Res}[f(z); z_j] = \oint_{\Gamma_i} d\zeta f(\zeta)$ , wobei die Kurve  $\Gamma_i$  in der komplexen Ebene einen Kreis  $z = z_i$  mit infinitesimalem Radius beschreibt, der *gegen den Uhrzeigersinn* durchlaufen wird.

Dann ist  $\oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}[f(z); z_j]$

(d.h. die Beiträge einzelner Singularitäten addieren sich auf).

Anwendung: Berechnung bestimmter Integrale, z.B.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2}$

Funktion  $f(z) = 1/(1+z^2)$  hat Pole bei  $z = \pm i$ . Die zugehörigen Residuen sind  $\text{Res}[f(z), i] = 1/2i$ ,  $\text{Res}[f(z), -i] = -1/2i$ . Wähle als Integrationsgebiet Kurve, die obere Halbebene umschließt (reelle Achse kombiniert mit Halbkreis mit Radius  $R \rightarrow \infty$ ). Oberer Halbkreis trägt nicht bei  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$ .

### 5) Laurent-Reihen : Verallgemeinerung der Taylor-Reihe

**Taylor-Reihe**: Entwicklung von  $f(z)$  nach Potenzen  $(z-z_0)^n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Konvergenzgebiet kreisförmig (schließt  $z_0$  ein).

**Laurent-Reihe**: Entwicklung von  $f(z)$  nach  $(z-z_0)^k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Konvergenzgebiet kreisringförmig (schließt  $z_0$  nicht notwendig ein).

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n / (z-z_0)^n.$$

$$\text{mit } a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}.$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z) (z-z_0)^{n-1},$$

wobei  $C$  eine beliebige geschlossene Kurve im Konvergenzgebiet (Kreisring) ist, die  $z_0$  umschließt.

(Herleitung der Formeln für  $a_n$  und  $b_n$ :

Zeige zunächst, dass  $\oint dz (z-z_0)^k = \delta_{k,-1} 2\pi i$  für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$k = -1$ : Cauchysche Integralgleichung.

$k \geq 0$ : Cauchyscher Integralsatz ( $f(z) = (z-z_0)^k$  ist analytisch).

$k < -1$ : Ziehe Integrationskurve auf Kreis mit Radius  $\epsilon$  um  $z_0$  zusammen.

Parametrisiere  $z(\phi) = z_0 + \epsilon e^{i\phi}$ .

Berechne  $\oint dz (z-z_0)^k = i\epsilon^{k+1} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(k+1)\phi} = 0$  für  $k \neq -1$ .

Setze dann Laurentreihe für  $f(z)$  in Gleichungen für  $a_n$  und  $b_n$  ein und überzeuge Dich von deren Richtigkeit.)

# Kapitel 4

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Typische Gleichungen der Physik: Gleichungen, in denen Funktionen und deren Ableitungen vorkommen (d.h. Aussagen über Beziehungen zwischen Funktionen und deren Ableitungen).

Typische Fragestellung: Lösung solcher Gleichungen finden.

### Beispiele

|   |   |
|---|---|
| (i) Kräftefreie Bewegung (1 Dimension: $x(t)$ ) | $\ddot{x} = 0$  |
| (ii) Bewegung im Schwerfeld                     | $\ddot{x} = -g$   |
| (iii) Bewegung mit Reibung                      | $\ddot{x} = -\eta x$  |
| (iv) Bewegung mit Reibung im Schwerfeld         | $\ddot{x} = -\eta x - g$  |
| (v) Schwingungsgleichung                        | $\ddot{x} = -\omega^2 x$  |
| (vi) Radioaktiver Zerfall: Teilchenzahl $N(t)$  | $\dot{N} = -kN$   |
| (vii) Pendel, Winkel $\phi(t)$                  | $\ddot{\phi} = -\omega^2 \sin(\phi)$  |
| (viii) Wellengleichung $y(x, t)$                | $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ |

### Charakterisierung/Klassifizierung

- **Gewöhnliche** Differentialgleichung: Eine Variable ((i)-(vii))  
↔ **Partielle** Differentialgleichung: Mehrere Variablen ((viii))
- **Ordnung** der Differentialgleichung: Höchste vorkommende Ableitung  
((vi): erste Ordnung; alle anderen Beispiele: zweite Ordnung)
- **Lineare** Differentialgleichung: Funktion und Ableitungen tauchen nur linear auf. (Alle Beispiele außer (vii))
- Besonders einfacher Spezialfall der linearen Differentialgleichung:  
Konstante Koeffizienten:  $a + by(x) + cy'(x) + dy''(x) + \dots = 0$ .

Hier nun im Folgenden: Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 4.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

### Problemstellung :

Differentialgleichung:  $y'(x) = f(x, y)$

Anfangsbedingung:  $y(x_0) = y_0$  mit Definitionsbereich  $(x, y) \in D$ .

### Satz von Picard :

Falls  $f(x, y)$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$  stetig, ist die Lösung eindeutig.  
(hinreichende Bedingung).

Beispiel: Gleichung  $y' = x\sqrt{y}$  mit  $y(0) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}, y \geq 0$ )

Lösungen:  $y \equiv 0$  und  $y = x^4/16$  nicht eindeutig.

Hintergrund:  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$  nicht stetig bei  $y = 0$ .

Falls Definitionsbereich so eingeschränkt wird, dass  $\frac{\partial f}{\partial y}$  stetig (z.B.  $y > 0$ ), wird die Lösung eindeutig.

Nun: Diskutiere Lösungsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung.  
Es gibt kein allgemeines Lösungsverfahren, aber gute Verfahren für viele wichtige Spezialfälle.

### 4.1.1 Separable Differentialgleichungen

Funktion  $f(x, y) = a(x)b(y)$  faktorisiert.

Lösungsverfahren:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)b(y) \Rightarrow \frac{dy}{b(y)} = dx a(x) \Rightarrow \int_{y_0}^y dy'/b(y') = \int_{x_0}^x dx' a(x')$$

→ Lösung durch Integration, gibt implizite Gleichung  $y \leftrightarrow x$ .

Beispiele:

- $y'(x) = a(x) \Rightarrow y = \int_{x_0}^x dx' a(x') + y_0$  (einfaches Integral)
- $y'(x) = -\lambda y \rightarrow \frac{dy}{y} = -\lambda dx \rightarrow \ln\left(\frac{dy}{dy_0}\right) = -\lambda(x - x_0)$   
 $\Rightarrow y = y_0 e^{-\lambda(x-x_0)}$
- $y'(x) = \alpha \frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{y} = \alpha \frac{dx}{x} \rightarrow \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$   
 $\Rightarrow y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha$

### 4.1.2 Lineare Differentialgleichungen

Funktion  $f(x, y)$  linear in  $y$ :  $f(x, y) = a(x)y + b(x)$

**Homogener Fall** :  $b(x) = 0$

→ separable Gleichung:  $\frac{dy}{y} = a(x) dx \Rightarrow y = \alpha \exp\left(\int_{x_0}^x dx' a(x')\right)$

Allgemeine Lösung:  $y = \alpha e^{A(x)}$

$A(x)$ : Stammfunktion zu  $a(x)$  ( $A'(x) = a$ )

$\alpha$ : beliebig → Eindimensionale Schar von Lösungen

Tatsächliche Lösung wird durch Anfangsbedingung festgelegt

( $\alpha = y_0 e^{-A(x_0)}$ ).

**Inhomogener Fall** :  $b(x) \neq 0$ 

Vorab: Kennt man eine Lösung  $y_I$  von  $y' = ay + b$ , so kann man daraus durch Addition der Lösungen  $y_H$  des zugehörigen homogenen Gleichungssystems ( $y'_H = ay_H$ ) eine Schar von Lösungen konstruieren.

(Mit  $y'_I = ay_I + b$  gilt für beliebige  $y = y_I + \alpha y_H$ :

$$y' = y'_I + \alpha y'_H = ay_I + b + \alpha ay'_H = ay + b)$$

Man braucht also nur eine Lösung zu finden.

## 1. Verfahren: Raten

(zum Beispiel  $a, b = \text{const.} \Rightarrow y_I \equiv -b/a$  ist eine Lösung).

## 2., systematisches Verfahren: "Variation der Konstanten"

Ansatz:  $y(x) = \alpha(x) e^{A(x)}$

$$\rightarrow y' = e^A(\alpha A' + \alpha') \stackrel{!}{=} ay + b = A' \alpha e^A + b$$

$$\rightarrow \alpha' = b e^{-A} \Rightarrow \text{Einfache Integration } \alpha(x) = \int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')}.$$

$$\Rightarrow \text{Spezielle inhomogene Lösung: } y_I(x) = e^{A(x)} \int dx' b(x') e^{-A(x')}$$

$\Rightarrow$  Allgemein: (mit Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$ )

$$y(x) = e^{A(x)} \left[ \int_{x_0}^x dx' b(x') e^{-A(x')} + C \right]$$

mit  $C = y_0 e^{-A(x_0)}$ .

**Beispiele**

1)  $y' = 2\frac{y}{x} + \frac{1}{x^3} =: ay + b$  mit  $a = \frac{2}{x}, b = \frac{1}{x^3}$ .

Homogene Lösung:  $y_H = \alpha e^A$  mit  $A = 2 \int \frac{dx'}{x'} = 2 \ln x$  ( $e^A = x^2$ )

Inhomogene Lösung:  $y_I = e^A \int \frac{dx'}{x'^3} e^{-A(x')} = x^2 \int \frac{dx'}{x'^5} = -\frac{1}{4x^2}$

Allgemein:  $y = -\frac{1}{4x^2} + Cx^2$

2)  $\ddot{x} = -\eta \dot{x} - g$  mit  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0 = 0$

- Setze  $\dot{x} = v \rightarrow$  gewöhnliche Differentialgleichung  $\dot{v} = -\eta v - g$
- Homogene Lösung:  $v = \alpha e^{-\eta t}$
- Inhomogene Lösung: Diesmal mit Raten  $\rightarrow v_I = -g/\eta$

$\rightarrow$  Allgemeine Lösung:  $v = -\frac{g}{\eta} + \alpha e^{-\eta t}$

Anfangsbedingung  $v(0) = 0 \Rightarrow v(t) = \frac{g}{\eta}(e^{-\eta t} - 1)$

- Schließlich noch aufintegrieren:  $x(t) = \int_0^t dt' v(t')$

$$x(t) = -\frac{g}{\eta} t + \frac{g}{\eta^2}(1 - e^{-\eta t})$$

( $\frac{g}{\eta}$ : Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell erreicht).

## 4.2 Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung

### 4.2.1 Allgemeine Vorbemerkungen

#### 4.2.1.1 Charakterisierung

- 1) Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Allgemeine Form:  $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$

bzw. Vektorschreibweise  $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  mit  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ .

Allgemeine Lösung hat die Form  $\mathbf{y} = \mathbf{F}(x, C_1, \dots, C_n)$ , wobei  $(C_1, \dots, C_n)$  freie Konstanten.  $\Rightarrow n$ -dimensionale Schar von Lösungen.

Konkrete Lösung (konkreten Werte von  $C_i$ ) wird durch die Anfangsbedingungen  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$  festgelegt.

Hinreichende Bedingung für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (bei vorgegebenen Anfangsbedingungen):  $\mathbf{f}(x)$  stetig und  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  stetig.

- 2) Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung

Form:  $y^{(n)}(x) = \tilde{f}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

Reduktion auf ein  $n$ -dimensionales System von Differentialgleichungen erster Ordnung durch Definition  $y_1(x) = y(x), \dots, y_n(x) = y^{(n-1)}(x)$ .

$$\Rightarrow \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \text{ mit } \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ \tilde{f}(x, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

Analog zu oben gilt dann: Allgemeine Lösung hat die Form  $y = \tilde{F}(x, C_1, \dots, C_n)$  mit freien Integrationskonstanten  $C_i$ .

- **Fazit:** Beide Probleme (Systeme von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung) sind im Prinzip äquivalent.

Man erhält eine  $n$ -dimensionale Schar von Lösungen.

### 4.2.1.2 Lineare Differentialgleichungssysteme

Gemäß 4.2.1.1 genügt es, Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zu betrachten.

Form:  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$  mit  $\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))$ :  $n \times n$ -Matrix

Wieder Unterscheidung: **Homogener** Fall und **Inhomogener** Fall

#### 1) Allgemeine Aussagen zum homogenen Fall: ( $b(x) = 0$ )

- **Lösbarkeit** für beliebige Anfangsbedingungen, falls  $a_{ij}(x)$  stetig in Intervall  $x$  (s.o., hinreichende Bedingung).
- **Superpositionsprinzip**: Mit  $(\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(k)})$  ist auch jede Linearkombination  $\mathbf{y} = \sum \alpha_k \mathbf{y}^{(k)}$  Lösung des homogenen Systems.
- **Lineare Unabhängigkeit**: Lösungen  $(\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(k)})$  heißen linear unabhängig, falls aus  $\sum \alpha_k \mathbf{y}^{(k)}(x) \equiv 0$  auf dem Intervall  $x$  automatisch folgt  $\alpha_k = 0 \forall k$ .  
NB: Falls  $a_{ik}(x)$  stetig, hat das Differentialgleichungssystem genau  $n$  linear unabhängige Lösungen.
- **Fundamentalsystem**: Satz von  $n$  linear unabhängiger Lsg.  $\mathbf{y}^{(k)}$   
**Fundamentalmatrix**:  $Y(x) = (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)})$   
**Wronski-Determinante**:  $W(x) = \det(Y(x))$

#### 2) Allgemeine Aussagen zum inhomogenen Fall:

Betrachte  $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ . Lösungsverfahren analog dem eindimensionalen Fall

- Finde zuerst Schar der Lösungen zum zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystem  $\mathbf{y}'_H = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}_H$   
 $\Rightarrow n$  unabhängige Lösungen  $\mathbf{y}_H = \sum_k \alpha_k \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{y}_H(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$
- Finde dann eine Lösung der inhomogenen Gleichung,  
z.B. durch Variation der Konstanten  
 $\rightarrow$  Ansatz  $\mathbf{y}_I = \sum_k \alpha_k(x) \mathbf{y}^{(k)}(x)$
- Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung:  $\mathbf{y} = \mathbf{y}_I + \mathbf{y}_H(x, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ .

### 4.2.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Betrachte nun speziell den linearen Fall mit Koeffizienten  $a_{ij}(x) \equiv \text{const.}$ . Hier ist es nun doch bequemer, Differentialgleichungen höherer Ordnung und Differentialgleichungssysteme gesondert zu diskutieren.

#### 4.2.2.1 Differentialgleichungen höherer Ordnung

##### 1) Homogener Fall

**Form:**  $y^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$

→ Umschreiben  $y^{(n)} - \sum a_k y^{(k)} = [(\frac{d}{dx})^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (\frac{d}{dx})^k] y = 0.$

Faktorisierere:  $[\prod_{k=0}^n (\frac{d}{dx} - \lambda_k)] y = 0.$

NB: laut Fundamentalsatz der Algebra läßt sich das Polynom  $n$ -ter Ordnung  $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$  gemäß  $P(x) = \prod (x - \lambda_k)$  mit reellen oder komplexen Nullstellen  $\lambda_k$  faktorisieren.

- **Einfache reelle Nullstelle**  $\lambda_k$

→ liefert Lösung  $y_k$  mit  $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y_k = 0 \Rightarrow y_k = e^{\lambda_k x}.$

- **Einfache komplexe Nullstelle**  $\lambda_k = p_k + iq_k$

Dann ist  $\lambda_k^* = p_k - iq_k$  auch Nullstelle.  $(P(\lambda_k^*)) = (P(\lambda_k))^* = 0$

Konstruiere reelle Lösungen aus  $y_k = e^{(p_k + iq_k)x}$ ,  $y_k^* = e^{(p_k - iq_k)x}$  :

$$y_{k,1} = e^{p_k x} \cos(q_k x), y_{k,2} = e^{p_k x} \sin(q_k x)$$

- **Mehrfache Nullstelle**  $\lambda_k$ , z.B.  $r$ -fache Nullstelle

→ Konstruiere  $r$  unabhängige zugehörige Lösungen

1. Lösung:  $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y = 0 \Rightarrow y_{k,1} = e^{\lambda_k x}$

2. Lösung:  $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)^2 y = 0$  wird auch erfüllt durch  $(\frac{d}{dx} - \lambda_k)y = y_{k,1}$   
 $\Rightarrow y = (x + c)e^{\lambda_k x} =: cy_{k,1} + y_{k,2}$  mit  $y_{k,2} = xe^{\lambda_k x}$

...

$r$ -te Lösung:  $y_{k,r} = x^{r-1} e^{\lambda_k x}$

**Fazit:** Man erhält  $n$  unabhängige Lösungen  $y_{k,r}(x)$ ,  
Bilden Fundamentalsystem.

**Allgemeine Lösung:**  $y(x) = \sum_k \sum_{r=1}^{n_k} c_{k,r} x^{r-1} e^{\lambda_k x}$ ,  
wobei  $n_k$ : Vielfachheit der  $k$ -ten Nullstelle  $\lambda_k$ .

##### 2) Inhomogener Fall

Form:  $y^{(n)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b(x)$

Verfahren wie Kapitel 4.1.2.

- Finde eine spezielle Lösung  $y_I$ .

- Addiere Schar von homogenen Lösungen darauf.

Partikuläre Lösung z.B. wieder über Variation der Konstanten,

d.h. Ansatz  $y_I = \sum_k \sum_r c_{kr}(x) e^{\lambda_k x} x^{r-1}.$

**3) Beispiel:** Getriebene SchwingungGleichung:  $\ddot{x} + \omega^2 x = f \cos(\Omega t)$ 

- Homogener Fall:  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \rightarrow (\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)x = (\frac{d}{dt} + i\omega)(\frac{d}{dt} - i\omega)x = 0$   
 Polynom  $P(D) = (D + i\omega)(D - i\omega)$  hat Nullstellen  $\pm i\omega$   
 $\rightarrow$  Homogene Lösungen  $x_1(t) = \cos(\omega t)$ ,  $x_2(t) = \sin(\omega t)$   
 Allgemein:  $x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ .
- Inhomogener Fall, suche nach spezieller Lösung  $x_I(t)$ :  
 Rate:  $x_I(t)$  folgt treibender Kraft:  $x_I(t) = A \cos(\Omega t)$ .  
 $\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = A(-\Omega^2 + \omega^2) \cos(\Omega t) \stackrel{!}{=} f \cos(\Omega t)$   
 $\Rightarrow$  Lösung  $A = f/(\omega^2 - \Omega^2)$   
 NB: Bei  $\omega = \pm\Omega$ : Resonanz, Amplitude  $A$  divergiert!
- Allgemeine Lösung:  $x(t) = \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) + a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ .

**4.2.2.2 Differentialgleichungssysteme**

Diskutiere nur homogenen Fall.

**Form** :  $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{A} \mathbf{y}(x)$  mit  $\mathbf{A} \equiv \text{const.}$ **Ansatz:**  $\mathbf{y}^{(j)} = e^{\lambda_j x} \mathbf{u}^{(j)}$  $\rightarrow \lambda_j \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x} = \mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x} \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} = \lambda_j \mathbf{u}^{(j)}$ : Eigenwertgleichung!Charakteristisches Polynom:  $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \stackrel{!}{=} 0$ . $\rightarrow n$  Nullstellen, reell oder komplex, können auch aufeinanderfallen.**Reelle Eigenwerte**  $\lambda_j$ , Eigenvektor  $\mathbf{u}^{(j)} \rightarrow \mathbf{y}^{(j)}(x) = \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x}$ .**Komplexe Eigenwerte** : Mit  $(\lambda_j, \mathbf{u}^{(j)})$  sind auch  $(\lambda_j^*, \mathbf{u}^{(j)*})$  Eigenwert und Eigenvektor. (Check durch Einsetzen). $\rightarrow$  Setze aus  $\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{u}^{(j)} e^{\lambda_j x}$  und  $\mathbf{y}^{(j)*} = \mathbf{u}^{(j)*} e^{\lambda_j^* x}$  reelle und imaginäre Lösungen zusammen.**Entartete Eigenwerte**  $\lambda_j$  ( $r$ -fach entartet)Falls es  $r$  unabhängige zugehörige Eigenvektoren gibt (d.h. Dimension des Eigenraums zu  $\lambda_j$  ist  $r$ ), liefert das  $r$  unabhängige Lösungen  $\mathbf{y}^{(j)}$ .Falls die Dimension des Eigenraums kleiner als  $r$  ist, müssen zusätzliche Lösungen konstruiert werden. Sei  $\lambda_j$  z.B. zweifach entartet, es gibt aber nur einen linear unabhängigen Eigenvektor  $\mathbf{u}^{(j)}$ .Ansatz:  $\mathbf{y}^{(j,1)} = e^{\lambda_j x} \mathbf{u}^{(j)}$ ,  $\mathbf{y}^{(j,2)} = e^{\lambda_j x} (\mathbf{u}^{(j)} x + \mathbf{v})$ .Einsetzen:  $e^{\lambda_j x} (\lambda_j \mathbf{v} + \mathbf{u}^{(j)} + \lambda_j x \mathbf{u}^{(j)}) \stackrel{!}{=} \mathbf{A} \mathbf{y}^{(j,2)} = e^{\lambda_j x} (x \mathbf{A} \mathbf{u}^{(j)} + \mathbf{A} \mathbf{v})$   
 $\Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{1}) \mathbf{v} = \mathbf{u}^{(j)}$ .Diese Gleichung hat eine Lösung  $\mathbf{v}$  (ohne Beweis). $\Rightarrow$  Man erhält zwei linear unabhängige Lösungen  $\mathbf{y}^{(j,1/2)}$ .

Höhere Entartungen: Analoges Verfahren.

Allgemein erhält man  $r$  linear unabhängige Lösungen  $\mathbf{y}^{(j,\nu)}$ . Jede der  $n$  Komponenten von  $\mathbf{y}^{(j,\nu)}$  ist ein Polynom vom Grad höchstens  $r$ .



# Mathematische Rechenmethoden 2



# Kapitel 5

## Vektoranalysis

### 5.1 Vorbemerkungen und Erinnerung

#### 5.1.1 Physikalische Skalare, Vektoren und Tensoren

(Erinnerung an 2.4.1)

In der Physik werden physikalische Größen durch ihr *Transformationsverhalten* charakterisiert. Gegeben sei eine Drehung  $D$ , die ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Rechtssystem) in ein anderes überführt. ( $DD^T = 1$ ,  $\det(D) = 1$ ).

**Physikalischer Skalar :**

Einzelne Zahl, bleibt unverändert. (z.B. Temperatur)

**Physikalischer Vektor :** (in  $d$  Dimensionen)

Satz von  $d$  Zahlen  $v_i$  (Koeffizienten), die sich folgendermaßen transformieren:  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = D\vec{v}$  bzw.  $v_i \rightarrow v'_i = \sum_j D_{ij}v_j$ . (z.B. Geschwindigkeit, Kraft).

**Physikalischer Tensor :**

Verallgemeinerung für Matrizen oder noch höherdimensionale Objekte (z.B. Trägheitstensor). Allgemein **Tensorder Stufe:**

$$t_{i_1, i_2, \dots, i_n} \text{ mit } t_{i_1, \dots, i_n} \rightarrow \sum_{j_1, \dots, j_n} D_{i_1 j_1} D_{i_2 j_2} \dots D_{i_n j_n} t_{j_1, \dots, j_n}.$$

**Bemerkungen:**

\* Wir haben uns hier absichtlich auf *Drehungen* mit  $\det(D) = 1$  beschränkt. Bei *Spiegelungen* mit  $\det(D) = -1$  ist das Verhalten nicht einheitlich!

z.B. Punktspiegelung am Ursprung dreht das Vorzeichen von Ort  $\vec{r}$  und Impuls  $\vec{p}$  um. Aber: Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  ändert Vorzeichen nicht. Solche Vektoren heißen auch **Pseudovektoren**.

\* In der Relativitätstheorie wird als 4. Dimension die *Zeit* hinzugenommen. Drehung  $\rightarrow$  Lorentztransformation. Man spricht dann von **Viererskalaren, Vierervektoren, Vierertensoren**.

### 5.1.2 Felder

Felder sind *räumlich variable* Skalare, Vektoren oder Tensoren, also Funktionen vom Ort.

**Skalarfeld**  $\Phi(\vec{r})$  (z.B. Temperaturfeld, Potential)

Transformationsverhalten unter Drehung  $D$ :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = D\vec{r}$$

$$\Phi(\vec{r}) \rightarrow \Phi'(\vec{r}') = \Phi\left(\underbrace{\vec{r}}_{\substack{\text{alte} \\ \text{Koordinaten}}}\right) = \Phi\left(D^{-1} \underbrace{\vec{r}'}_{\substack{\text{neue} \\ \text{Koordinaten}}}\right)$$

**Vektorfeld**  $\vec{v}(\vec{r})$  (z.B. Geschwindigkeitsfeld, elektrisches Feld)

Transformationsverhalten unter Drehung  $D$ :

$$\vec{v}(\vec{r}) \rightarrow \vec{v}'(\vec{r}') = D\vec{v}(D^{-1}\vec{r}')$$

usw. (**Tensorfelder** etc.)

### 5.1.3 Kurvenintegral bzw. Linienintegral

Erinnerung an 3.2.6: **Wegintegral** eines Feldes (einer Funktion von  $\vec{r}$ ) entlang einer Kurve  $C$

**Raumkurve**  $C$  : Charakterisiert über geeignete *Parametrisierung*:

$$C : \vec{r}(s), s \in [s_0 : s_1] \quad (s: \text{Laufparameter, } \vec{r}(s) \text{ differenzierbar}).$$

\* **Kurvenintegral erster Art** :

Wegintegral über *skalares Feld*  $\Phi(\vec{r})$

$$\int_C dl \Phi(\vec{r}) := \int_{s_0}^{s_1} ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| \Phi(\vec{r})$$

$$\text{Beispiel: } \Phi(\vec{r}) \equiv 1 \quad \Rightarrow \text{Bogenlänge } L = \int_{s_0}^{s_1} ds \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| =: \int_C dl$$

\* **Kurvenintegral zweiter Art** :

Wegintegral über *Vektorfeld*  $\vec{v}(\vec{r})$

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) := \int_{s_0}^{s_1} ds \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

Beispiel: Physikalische Arbeit, wenn man einen "punktförmigen" Körper entlang eines bestimmten Weges bewegt:

$$\text{Auf Körper wirkt Kraft } \vec{f}(\vec{r}) \Rightarrow dW = d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}); W = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}).$$

### 5.1.4 Flächenintegral

Erinnerung an 3.2.6: **Oberflächenintegral** eines Feldes auf einer Fläche  $O$ .

**Fläche**  $O$  : Parametrisiert durch *zwei* Variablen  $(u, v)$ :  $\vec{r}(u, v)$

\* **Skalares Oberflächenintegral** :

Oberflächenintegral über *skalares Feld*  $\Phi(\vec{r})$

$$\int_O dA \Phi(\vec{r}) := \int du dv \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}_{\text{Flächenelement}} \Phi(\vec{r})$$

Beispiel:  $\Phi(\vec{r}) \equiv 1 \Rightarrow$  Oberfläche  $\int_O dA = \int du dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$

\* **Vektoriell**es Oberflächenintegral :

Oberflächenintegral über Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{r})$

$$\int_O d\vec{A} \cdot \vec{v}(\vec{r}) := \int du dv \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

Beispiel: Berechnung eines *Flusses*  $\vec{J}$  aus *Flussdichte*  $\vec{j}(\vec{r})$

$$\vec{J} = \int_O d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r}) \text{ (unabhängig von der genauen Wahl der Oberfläche).}$$

## 5.2 Der Nabla-Operator

In diesem Abschnitt wird ein wichtiges Symbol der Vektoranalysis eingeführt: Der Ableitungsvektor

$$\nabla \equiv \vec{\partial} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

oder allgemeiner, für Koordinatensystem in  $d$  Raumdimensionen mit 'orthonormierten' Basisvektoren  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$  (orthonormiert:  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ )

$$\nabla = \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^d \vec{e}_i \partial_{x_i}$$

Im Folgenden werden wir Anwendungen des Nabla-Operators diskutieren, zunächst für den einfachsten Fall der kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  (in 2 Dimensionen) bzw.  $(x, y, z)$  (in 3 Dimensionen).

### 5.2.1 Skalare Felder und Gradient

Gegeben skalares Feld  $\Phi(\vec{r})$ , z.B. Höhe  $h(x, y)$ . Dann ist:

- (i) **Gradient** :  $\nabla \Phi = \text{grad } \Phi$  ein Vektor in Richtung des **steilsten Anstieges** von  $\Phi$  mit dem Betrag  $|\nabla \Phi|$ : Wert der Steigung.
- (ii) **Richtungsableitung** :  $\vec{n} \cdot \nabla \Phi$  mit Einheitsvektor  $|\vec{n}| = 1$ : Ableitung in Richtung  $\vec{n}$ :  $\vec{n} \cdot \nabla \Phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Phi(\vec{r} + \epsilon \vec{n}) - \Phi(\vec{r}))$ .

Begründung:

Zunächst (ii): Ableitung in Richtung  $\vec{n}$  am Ort  $\vec{r}$ :

$$\frac{1}{\epsilon} \left( \Phi(\vec{r} + \epsilon \vec{n}) - \Phi(\vec{r}) \right) = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \epsilon n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \epsilon n_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \epsilon n_z \right) = \vec{e} \cdot \nabla \Phi.$$

Dann (i): Richtung, in der Ableitung maximal wird, ist  $\vec{n} \parallel \nabla \Phi$

Weitere Anwendung: **Totales Differential** der Funktion  $\Phi$

$$d\Phi = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i = (\nabla \Phi) \cdot d\vec{r}.$$

Folgerung: Betrachte Vektorfeld  $\vec{f}(\vec{r}) = \nabla \Phi$ :

Für beliebige Kurve  $C$  zwischen  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  gilt:

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = \int_C d\vec{r} \cdot (\nabla \Phi) = \int_1^2 d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

hängt *nicht* vom Weg ab.

Speziell:  $\oint d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) = 0$  für alle geschlossenen Kurven.

### 5.2.2 Vektorfelder: Divergenz und Rotation

Sei nun ein Vektorfeld  $\vec{v}(\vec{r})$ . Dann ist

$$(i) \quad \nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right): \text{Divergenz von } \vec{v}(\vec{r}).$$

$$(ii) \quad \nabla \times \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right): \text{Rotation von } \vec{v}(\vec{r}).$$

**Interpretation** : Etwas weniger offensichtlich als im Fall des Gradienten

(i) **Divergenz**: Feld "entsteht" oder "verschwindet".

Dazu:  $\vec{v}$  sei eine Flussdichte, betrachte infinitesimalen Quader mit Seitenlängen  $dx, dy, dz$ :

Nettoabfluss: (mit  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ : Position in der Mitte des Quaders.)

$$\begin{aligned} dF &= (dydz)(v_x(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) - v_x(x, \bar{y}, \bar{z})) \\ &\quad + (dzdx)(v_y(\bar{x}, y+dy, \bar{z}) - v_y(\bar{x}, y, \bar{z})) \\ &\quad + (dxdy)(v_z(\bar{x}, \bar{y}, z+dz) - v_z(\bar{x}, \bar{y}, z)) \\ &= (dxdydz)(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z) = dxdydz(\nabla \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

Falls  $\nabla \vec{v} = 0$ : Alles, was reinfließt, fließt auch wieder raus  $\rightarrow$  'quellenfrei'.

(ii) **Rotation**: Feld hat im Raum "Wirbel".

Dazu:  $\vec{v}$  sei ein Geschwindigkeitsfeld, betrachte infinitesimale Platte der Dicke  $dz$  in der  $(x, y)$ -Ebene mit Kantenlängen  $dx, dy$ .

Integriere um diese Kanten herum  $\Rightarrow$  Kreisstrom  $I_z$  um  $z$ -Achse

$$\begin{aligned} I_z &= dz \{ dx v_x(\bar{x}, y, \bar{z}) + dy v_y(x+dx, \bar{y}, \bar{z}) \\ &\quad - dx v_x(\bar{x}, y+dy, \bar{z}) - dy v_y(x, \bar{y}, \bar{z}) \} \\ &= dxdydz(-\partial_y v_x + \partial_x v_y) \end{aligned}$$

Analog:  $I_x = dxdydz(\partial_y v_z - \partial_z v_y)$

$$I_y = dxdydz(\partial_z v_x - \partial_x v_z)$$

$$\Rightarrow \vec{I} = dxdydz(\nabla \times \vec{v})$$

Falls  $\nabla \times \vec{v} = 0$ : Feld ist "wirbelfrei".

### 5.2.3 Der Laplace-Operator

Besonders häufig auftretende Konstruktion:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \nabla^2 \Phi = \partial_{xx} \Phi + \partial_{yy} \Phi + \partial_{zz} \Phi =: \Delta \Phi$$

Bedeutung des Operators  $\Delta = \nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ :

Linearer Differentialoperator mit hoher Symmetrie ( $\pm x, \pm y, \pm z$  gleichwertig, de facto sogar isotrop).

$\Rightarrow$  Taucht in vielen wichtigen physikalischen Gesetzen auf (Schrödingergleichung, Diffusionsgleichung, Wellengleichung, siehe Kapitel 8).

### 5.2.4 Wichtige Zusammenhänge

(a)  $\boxed{\text{Div rot } \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0}$  (falls  $\vec{v}$  zweimal differenzierbar)

$$\begin{aligned} \text{Rechnung: } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_i v_j \stackrel{\substack{\text{Vertausche} \\ \text{Ableitungen}}}{=} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_k v_j \\ &\stackrel{\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}}{=} - \sum_{ijk} \epsilon_{kji} \partial_i \partial_k v_j \stackrel{k \leftrightarrow i}{=} - \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_k \partial_i v_j \\ &= -\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ &\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

Folgerung: Für Felder  $\vec{v} = \nabla \times \vec{A}$  (Vektorpotential) gilt  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ .

Anwendung: Elektrodynamik, siehe Theorie 1

(b)  $\boxed{\text{Rot grad } \Phi = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0}$  (falls  $\Phi$  zweimal differenzierbar)

Rechnung: Analog (a)

Folgerung: Für **Potentialfelder**  $\vec{v} = \nabla \Phi$  gilt automatisch  $\nabla \times \vec{v} = 0$ .  
(Umgekehrt: Felder mit  $\nabla \times \vec{v}$  lassen sich im Allgemeinen als Potentialfelder schreiben. Mehr dazu in Theorie 1.)

(c) Anwendung von  $\nabla$  auf Produkte von Feldern.

Produktregel wie üblich, z.B.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\Phi \vec{v}) &= (\nabla \Phi) \cdot \vec{v} + \Phi \nabla \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\nabla \Phi) + \Phi (\nabla \cdot \vec{v}) \\ \nabla \times (\Phi \vec{v}) &= (\nabla \Phi) \times \vec{v} + \Phi \nabla \times \vec{v} = -\vec{v} \times (\nabla \Phi) + \Phi (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{w}) - \vec{w} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \\ \nabla \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} (\nabla \cdot \vec{w}) - \vec{w} (\nabla \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{w} \\ &\quad \text{mit } (\vec{v} \cdot \nabla) = (v_x \partial_x + v_y \partial_y + v_z \partial_z) \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \end{aligned}$$

## 5.3 Krummlinige Koordinaten

### 5.3.1 Allgemeine und orthogonale Koordinatensysteme

Kartesische Koordinatensysteme  $(x, y, z)$  bzw.  $(x_1, \dots, x_d)$  sind nur eine mögliche Form, den Raum zu parametrisieren.

Alternative, gern benutzte Koordinatensysteme, sind z.B.

$$2 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Polarkoordinaten} (r, \varphi) \quad \begin{pmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$3 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Zylinderkoordinaten} (\rho, \varphi, z) \quad \begin{pmatrix} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{pmatrix}$$

$$3 \text{ Dimensionen: } \mathbf{Kugelkoordinaten} (r, \theta, \varphi) \quad \begin{pmatrix} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{pmatrix}$$

Allgemeiner Formalismus:

(i) **Definiere** Koordinaten  $(u_1, \dots, u_d)$  (in  $d$  Dimensionen) durch Vektorfunktion  $\vec{r}(u_1, \dots, u_d) = (x_1(u_1, \dots, u_d), \dots, x_d(u_1, \dots, u_d))$ .

Bedingung: Vektoren  $\partial\vec{r}/\partial u_i$  sind linear unabhängig, das heisst

$$\begin{vmatrix} \partial x_1/\partial u_1 & \cdots & \partial x_1/\partial u_d \\ \vdots & & \vdots \\ \partial x_d/\partial u_1 & \cdots & \partial x_d/\partial u_d \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (Jacobi-Determinante).}$$

(ii) **Koordinatenlinien** Kurven  $\vec{r}(u_1, \dots, u_d)$ , die dadurch definiert sind, dass man alle  $u_i$  bis auf eines festhält.

(Beispiel: Kugelkoordinaten – Längen- und Breitengrade)

(iii) **Orthogonale Koordinaten** liegen dann vor, wenn die Koordinaten sich immer senkrecht schneiden  $\Leftrightarrow \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_j} = 0$  für  $i \neq j$ .

Alle oben als Beispiele genannten Koordinatensysteme sind orthogonal.

z.B. Polarkoordinaten  $\vec{r}(r, \phi) = r(\cos \phi, \sin \phi)$ :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial \varphi} = 0$$

Analog für Zylinder- und Kugelkoordinaten.

(iv) **Basissysteme** krummliniger Koordinaten

Basisvektoren parallel zu Koordinatenlinien  $\vec{b}_i \propto \partial\vec{r}/\partial u_i$ .

Variieren von Ort zu Ort.

Speziell orthogonale Koordinaten:

Man kann lokal normierte **Orthonormalbasis** definieren:

$$\vec{b}_i = \vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{mit } h_i = \left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i} \right|$$

**Konkret:** Gebräuchliche Koordinatensysteme

- Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h_r = 1, \quad h_\varphi = r$$

- Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h_r = 1, \quad h_\varphi = r \quad h_z = 1$$

- Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta$$

**(v) Volumenelement** (vgl. 3.2.5)

Über Jacobi-Determinante:

Volumenelement, das von  $(du_1, \dots, du_d)$  aufgespannt wird, entspricht  $dV = du_1 \dots du_d |\det(J)|$  mit der Jacobi-Matrix  $J_{ij} = (\partial x_i / \partial u_j)$ .

Speziell orthogonale Koordinaten:  $\partial \vec{r} / \partial u_i$  stehen senkrecht aufeinander  
 $\Rightarrow |\det J| = \prod_i \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| = |h_1 \dots h_d|$

z.B. Polarkoordinaten:  $dV = r \, dr \, d\varphi$

Zylinderkoordinaten  $dV = \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi$

Kugelkoordinaten  $dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

### 5.3.2 Darstellung in orthogonalen Koordinatensystemen

**Vektoren** :  $\vec{v} = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{v}) =: \sum_i \vec{e}_i v_i$

**Nabla-Operator** Analog:  $\nabla = \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \nabla)$

Erinnerung:  $\vec{e} \cdot \nabla f(\vec{r})$  ist Ableitung von  $f(\vec{r})$  in Richtung  $\vec{e}$ .

$$\Rightarrow \vec{e}_i \cdot \nabla f(\vec{r}) = \frac{\partial f}{\partial u_i} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla = \sum_i \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i}}$$

**Laplace-Operator** :

Kann im Einzelfall einfach durch Einsetzen berechnet werden.

Eleganter: Allgemeine Gleichung (in 3 Dimensionen)

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{1}{2} \sum_{ijk} (\epsilon_{ijk})^2 \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \frac{h_i h_j}{h_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \right)}$$

bzw. ausgeschrieben

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \right)}$$

Analog in 2 Dimensionen

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \right)}$$

(Rechnung dazu:

Berechne zuerst  $\nabla \cdot \vec{A}$  für beliebiges Vektorfeld  $\vec{A}$ .

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \vec{A} &= \nabla \cdot \sum_k \vec{e}_k A_k \quad \text{mit} \quad A_k := (\vec{e}_k \cdot \vec{A}) \\
 &| \quad \vec{e}_k = \frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \sum_{ijk} (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) A_k \\
 &| \quad \vec{e}_j = h_j \nabla u_j \quad (\text{da} \quad h_j \nabla u_j = h_j \sum_i \vec{e}_i \underbrace{\frac{1}{h_i} \frac{\partial u_j}{\partial u_i}}_{\delta_{ij}} = \vec{e}_i \nabla) \\
 &= \frac{1}{2} \nabla \cdot \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} (h_i (\nabla u_i) \times h_j (\nabla u_j)) A_k = \frac{1}{2} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \nabla (h_i h_j A_k ((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \left( \underbrace{(\nabla (h_i h_j A_k))}_{(\vec{e}_i/h_i) \times (\vec{e}_j/h_j)} \right) \underbrace{((\nabla u_i) \times (\nabla u_j))}_{\nabla u_j (\nabla \times \nabla u_i) - \nabla u_i (\nabla \times \nabla u_j = 0)} + h_i h_j A_k \nabla ((\nabla u_i) \times (\nabla u_j)) \\
 &| \quad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_l \epsilon_{ijl} \vec{e}_l \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl}}_{\epsilon_{ijk}^2 \delta_{kl}} \nabla (h_i h_j A_k) \frac{\vec{e}_l}{h_i h_j} = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 \frac{1}{h_i h_j} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \nabla (h_i h_j A_k)}_{\frac{1}{h_k} \frac{\partial}{\partial u_k} (h_i h_j A_k)} \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{1}{2} \sum_{ijk} (\epsilon_{ijk})^2 \frac{\partial}{\partial u_k} (h_i h_j A_k)
 \end{aligned}$$

Nun Laplace-Operator in drei Dimensionen:

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}^2 \frac{\partial}{\partial u_k} [\nabla \Phi]_k$$

$$\text{mit} \quad [\nabla \Phi]_k := \vec{e}_k \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \Phi}{\partial u_k}$$

Zwei Dimensionen: Benutze Formel für drei Dimensionen mit virtueller Koordinate  $z$ , von der nichts abhängt ( $\partial/\partial z = 0, h_z = 1$ .)

### 5.3.3 Zusammenstellung der Formeln für die wichtigsten Koordinatensysteme

- **2D Polarkoordinaten**

Definition:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$

Basisvektoren:  $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$

Normierungskonstanten:  $h_r = 1$ ,  $h_\varphi = r$

Nabla-Operator:  $\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Laplace-Operator:  $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

- **3D Zylinderkoordinaten**

Definition:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$

Basisvektoren:  $\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normierungskonstanten:  $h_\rho = 1$ ,  $h_\varphi = \rho$ ,  $h_z = 1$

Nabla-Operator:  $\nabla = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$

Laplace-Operator:  $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- **3D Kugelkoordinaten**

Definition:  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$

Basisvektoren:  $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

Normierungskonstanten:  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$ ,  $h_\varphi = r \sin \theta$

Nabla-Operator:  $\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Laplace-Operator:  $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$

## 5.4 Integralsätze

Erinnerung: Hauptsatz der Integralrechnung in einer Dimension:

$$\int_a^b dx F'(x) = F(b) - F(a)$$

Ziel dieses Kapitels: Verallgemeinerung(en) auf mehrere Dimensionen.

### 5.4.1 der Gaußsche Integralsatz

#### 5.4.1.1 Der Satz

**Satz** : Sei  $V$  ein räumliches Gebiet mit Oberfläche  $\partial V$ , die sich aus endlich vielen regulären orientierbaren Flächenstücken zusammensetzt. Sei  $\vec{F}$  ein auf einer Umgebung von  $V$  definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\int_V dV \nabla \cdot \vec{F} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F}}$$

Hier ist  $\int d\vec{A} \cdot \vec{F}$  das in den Abschnitten 3.2.6 und 5.1.4 eingeführte vektorielle Oberflächenintegral.

**Beweisskizze** :

1)  $V$  sei achsenparalleler Quader der Seitenlängen  $a_x, a_y, a_z$ .

Analysiere im Integral  $\int_V dV \nabla \cdot \vec{F} = \int_V dV (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z)$

zunächst den Beitrag von  $\partial_x F_x$ .

$$\begin{aligned} \leadsto \int_V dV \frac{\partial F_x}{\partial x} &= \underbrace{\int_0^{a_y} dy \int_0^{a_z} dz}_{=: \iint_{A_{yz}} dA} \left( \underbrace{\int_0^{a_x} dx \frac{\partial F}{\partial x}}_{F_x(a_x, y, z) - F_x(0, y, z)} \right) \\ &= \iint_{A_{yz}} dA \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{F}(a_x, y, z)}_{d\vec{A} \cdot \vec{F} \text{ auf Fläche } x = a_x} + \iint_{A_{yz}} dA \underbrace{(-\vec{e}_x) \cdot \vec{F}(0, y, z)}_{d\vec{A} \cdot \vec{F} \text{ auf Fläche } x = 0} \end{aligned}$$

Analog Beiträge von  $\partial_y F_y$  und  $\partial_z F_z$ .

Zusammen: Gaußscher Satz für Quader.

2)  $V$  sei nun beliebiges Gebiet. Setze es aus Quadern zusammen.

- Volumenintegrale (linke Seite) addieren sich einfach auf.
- Flächenintegrale (rechte Seite): Beiträge der "Zwischenwände" heben sich auf, da die Normalen entgegengesetzte Vorzeichen haben.
- Die Beiträge an den *Oberflächen* des Gebietes werden von den gestückelt zusammengesetzten Quaderoberflächen korrekt approximiert wegen  $d\vec{A} \cdot \vec{F} = \sum_i dA_i F_i$ .

**Bemerkung** :

Der Beweis läßt sich ohne weiteres für beliebige ( $d$ ) Dimensionen verallgemeinern. Dabei ist  $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_d)$  der  $d$ -dimensionale Nabla-Operator, und  $d\vec{A}$  das infinitesimale "Flächen"-Element, das auf der  $(d-1)$ -dimensionalen Oberfläche des Gebiets  $V$  senkrecht steht.

## Anwendungsbeispiele

## a) Kontinuitätsgleichung

Betrachte Massefeld der Dichte  $\rho(\vec{r}, t)$ , Geschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{r}, t)$ .

Für Masse im Volumen  $M_V$  gilt:

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V dV \rho(\vec{r}, t) = \int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Andererseits:  $\rho\vec{v}$  beschreibt Massenfluss, daher entspricht  $\frac{\partial M_V}{\partial t}$  einem Nettofluss von Masse durch Oberfläche  $\partial V$ .

$$\frac{\partial M_V}{\partial t} \stackrel{\substack{\text{Vorzeichen: } d\vec{A} \text{ zeigt} \\ \text{nach außen}}}{=} - \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\rho\vec{v}) \stackrel{\substack{\text{Gaußscher} \\ \text{Satz}}}{=} - \int_V dV \nabla \cdot (\rho\vec{v}).$$

Somit gilt  $\int_V dV \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) \right\}$  für beliebige Gebiete  $V$ .

⇒ Kontinuitätsgleichung:  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$  ("Massenerhaltung")

b) Feld einer Punktladung  $q$ 

Betrachte elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$  für  $r \neq 0$ .

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} \stackrel{\substack{\text{Kugelkoordinaten} \\ \text{Kugelfläche}}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \text{ für } r \neq 0.$$

Andererseits: Betrachte Kugel mit Radius  $R$ , die den Ursprung enthält:

$$\int_V dV \nabla \cdot \vec{E} = \int_{\partial V} \underbrace{d\vec{A}}_{\vec{e}_r \sin \theta \, d\theta \, d\varphi} \cdot \vec{E} = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \frac{q}{R^2} = 4\pi q$$

Somit:  $\nabla \cdot \vec{E}$  ist überall Null außer bei  $r = 0$ .

Aber: Integral über  $\nabla \cdot \vec{E}$  ist ungleich Null.

→ Diracsche Deltafunktion, siehe Kapitel 6.

## 5.4.1.2 Folgerungen aus dem Gaußschen Integralsatz

1) **Volumensatz** :  $\Rightarrow V = \frac{1}{3} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{r}$ .

Wähle  $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{r}$ . Benutze  $\nabla \vec{r} = 3$  (in 3 Dimensionen).

Es folgt:  $\int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{r} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_V dV (\nabla \vec{r}) = 3 \int_V dV = 3V$

2) Für Skalarfeld  $\Phi$ , das auf einer Umgebung von  $V$  definiert ist, gilt

$$\int_V dV \nabla \Phi = \int_{\partial V} d\vec{A} \Phi$$

(Denn: Betrachte beliebigen Vektor  $\vec{a} \neq 0 \rightarrow \nabla \cdot (\vec{a}\Phi) = \vec{a} \cdot (\nabla \Phi)$ .

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \int_V dV \nabla \Phi = \int_V dV \nabla \cdot (\vec{a}\Phi) \stackrel{\text{Gaußscher Satz}}{=} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (\vec{a}\Phi) = \vec{a} \cdot \int_{\partial V} d\vec{A} \Phi$$

Also:  $\vec{a} \cdot \left\{ \int_V dV \nabla \Phi - \int_{\partial V} d\vec{A} \Phi \right\} = 0$ . Da  $\vec{a}$  beliebig folgt Behauptung. )

3) Für Vektorfeld  $\vec{F}$ , das auf einer Umgebung von  $V$  definiert ist, gilt

$$\int_V dV \nabla \times \vec{F} = \int_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{F}$$

(Analog 2) mit  $\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{F})$ .)

#### 4) Integralsatz von Green

Seien  $u$  und  $v$  zweimal differenzierbare Funktionen auf einer Umgebung von  $V$ . Dann gilt

$$\int_V (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot (u\nabla v - v\nabla u)$$

(Denn:  $\nabla \cdot (u\nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v$

$\nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\Delta u$

→ Differenz:  $u\Delta v - v\Delta u = \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u)$ . Rest folgt aus Gaußschem Satz.

#### 5) Koordinatenunabhängige Interpretation der Divergenz

Sei  $\vec{r} \in V$  und  $K_R \subset V$  Kugel um  $\vec{r}$  mit Radius  $R$ .

Dann gilt für Vektorfelder  $\vec{F}(\vec{r})$ :

$$\begin{aligned} \int_{\partial K_R} d\vec{A} \cdot \vec{F} &\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{K_R} dV \nabla \cdot \vec{F} \stackrel{\text{Mittelwertsatz der Integral-}}{\underset{\text{rechnung mit } \vec{r}^* \in K_R}{=}} \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}^*) V(K_R) \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \underbrace{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{V(K_R)} \int_{\partial K_R} d\vec{A} \cdot \vec{F}}_{\text{Aus Volumeneinheit heraustretender Fluss}} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) &\text{ ist die Quelledichte von } \vec{F} \text{ im Punkt } \vec{r}. \end{aligned}$$

#### 5.4.2 Der Greensche Satz in der Ebene

**Satz:** Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet mit Rand  $\partial B$ , der aus endlich vielen stückweise glatten Kurven besteht. Diese seien so parametrisiert, dass  $\partial B$  entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Sei  $\vec{F}$  ein auf einer Umgebung von  $B$  definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\partial B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_B dx_1 dx_2 \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)}$$

**Beweisskizze :**

1) Betrachte zunächst *konvexe* Gebiete  $B$ .

Dann läßt sich  $\partial B$  aus zwei Funktionen  $f_u(x_1)$  und  $f_o(x_1)$  zusammensetzen, so dass für Punkte  $(x_1, x_2) \in B$  gilt:  $f_u(x_1) < x_2 < f_o(x_1)$ .

Für jedes  $F(x_1, x_2)$  auf  $B$  gilt dann (mit  $a = \min_{x_1}, b = \max_{x_1}$ ):

$$\begin{aligned} \int_B dx_1 dx_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} &= \int_a^b dx_1 \left( F(x_1, f_o(x_1)) - F(x_1, f_u(x_1)) \right) \\ &= - \underbrace{\int_b^a dx_1 F(x_1, f_o(x_1))}_{\text{Folge oberer Begrenzung}} - \underbrace{\int_a^b dx_1 F(x_1, f_u(x_1))}_{\text{Folge unterer Begrenzung}} \\ &= - \int_{\partial B} dx_1 F(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Analog zeigt man  $\int_B dx_1 dx_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} = \int_{\partial B} dx_2 F(x_1, x_2)$ .

Daraus folgt für beliebiges Funktionenpaar  $(F_1, F_2)$

$$\int_B dx_1 dx_2 \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) = \int_{\partial B} (dx_1 F_1 + dx_2 F_2).$$

- 2) Sei  $B$  nun ein beliebiges Gebiet mit stückweise glattem Rand. Kann aus konvexen Gebieten zusammengesetzt werden..
- Flächenintegrale (rechte Seite) summieren sich auf.
  - Linienintegrale (linke Seite): Beiträge der Trennungslinien im Inneren von  $B$  heben sich auf, da sie zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

**Folgerung: Flächensatz**

Mit  $\vec{F} = (-x_2, x_1)$  folgt aus dem Greenschen Satz

$$\underbrace{\int_B dx_1 dx_2}_{\text{Fläche von } B} = \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$$

Beispiel: Flächeninhalt einer Ellipse mit Halbachsen  $a$  und  $b$

Randkurve ist gegeben durch:  $\{(x_1, x_2) : (x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 = 1\}$ .

$\leadsto$  Parameterdarstellung  $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\Rightarrow dx_1 = -a \cos t dt, \quad dx_2 = b \sin t dt$$

$\leadsto$  Ellipsenfläche:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\partial B} (x_1 dx_1 - x_2 dx_2) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dt (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) = \pi ab.$$

### 5.4.3 Der Integralsatz von Stokes

**Satz:** Sei  $S$  eine zweiseitige stückweise reguläre Fläche mit (überschneidungsfreiem) geschlossenem Rand  $\partial S$ . Die Fläche sei orientiert und der Rand werde so durchlaufen, dass der Umlaufsinn mit der Flächennormalen auf  $S$  eine Rechtsschraube bildet. Sei weiterhin  $\vec{F}$  ein auf einer Umgebung von  $S$  definiertes stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\boxed{\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F})}$$

**Beweisskizze :**

- 1) Betrachte zunächst Flächen  $S$ , deren Projektion auf die  $(x_1, x_2)$ -Ebene umkehrbar eindeutig ist, d.h. sie lassen sich durch eine Funktion von  $(x_1, x_2)$  parametrisieren lassen:  $\vec{r}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ . Die Projektionsfläche von  $S$  auf die  $(x_1, x_2)$ -Ebene werde mit  $D$  bezeichnet und ihr Rand  $\partial D$ .

Das vektorielle Flächenelement (vgl. 3.2.6 bzw. 5.1.4) ist

$$d\vec{A} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right) dx_1 dx_2.$$

Somit folgt für das Flächenintegral (rechte Seite des Stokes-Satzes)

$$\int_S d\vec{A} \times \vec{F} = \int_D dx_1 dx_2 \left( -\frac{\partial f}{\partial x_1} \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_2} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \right)$$

Das vektorielle Linienelement auf  $\partial S$  (vgl. 3.2.6 bzw. 5.1.3) ist

$$d\vec{r} = (dx_1, dx_2, \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2).$$

Damit folgt für das Linienintegral (linke Seite des Stokes-Satzes)

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\partial S} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) \\ &= \int_{\partial D} \left( \underbrace{(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_1})}_{=: G_1(x_1, x_2)} dx_1 + \underbrace{(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_2})}_{=: G_2(x_1, x_2)} dx_2 \right) \end{aligned}$$

Für das Integral über  $\partial D$  gilt Greenscher Satz in der Ebene:

$$\int_{\partial D} (G_1(x_1, x_2) dx_1 + G_2(x_1, x_2) dx_2) = \int_D dx_1 dx_2 \left( \frac{\partial G_2}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_2} \right).$$

$$\text{mit } \frac{\partial}{\partial x_1} G_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} (F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x_2})$$

$$| \frac{\partial}{\partial x_1} F_i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} + \frac{\partial F_i}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad (i = 2, 3)$$

$$= \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

und analog

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in das Linienintegral gibt

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{F} &= \int_D dx_1 dx_2 \\ &\quad \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Das entspricht genau dem Flächenintegral.

- 2) Allgemeine Flächen  $S$  werden wieder stückweise aus Flächen zusammengesetzt, die sich wie in 1) umkehrbar eindeutig auf die  $(x_1, x_2)$ -Ebene, die  $(x_2, x_3)$ -Ebene oder die  $(x_1, x_3)$ -Ebene projizieren lassen.

### Folgerung: Koordinatenunabhängige Interpretation der Divergenz

Sei  $\vec{r} \in S$  und  $S_R \subset S$  die Fläche, die von Kugel um  $\vec{r}$  mit Radius  $R$  aus  $S$  ausgeschnitten wird. Sie habe die Oberfläche  $A(S_R)$  und Randkurve  $\partial S_R$ .

Dann gilt für Vektorfelder  $\vec{F}(\vec{r})$

$$\int_{\partial S_R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{S_R} d\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{F}) \stackrel{\text{Mittelwertsatz der Integralrechnung mit } \vec{r}^* \in S_R}{=} A_{S_R} (\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F})) \Big|_{\vec{r}=\vec{r}^*},$$

wobei  $\vec{n}(\vec{r})$  der lokale Normalenvektor ist ( $\vec{n} = d\vec{A}/dA$ ).

$$\Rightarrow (\vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F})) \Big|_{\vec{r}} = \underbrace{\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{A_{S_R}} \int_{\partial S_R} \vec{F} \cdot \vec{r}}_{\text{Zirkulation des Vektorfeldes (pro Flächeneinheit für Flächenstück senkrecht zu } \vec{n}}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \cdot (\nabla \times \vec{F}): \quad \text{Wirbelstärke von } \vec{F} \text{ um die Achse } \vec{n}.$$

# Kapitel 6

## Die Diracsche Delta-Funktion

### 6.1 Motivation und Einführung

Theoretische Physik:

Begriffe des "Massenpunktes" und der "Punktladung".

Dagegen: "Massendichte" und "Ladungsdichte"

Frage: Wie kann man diese beiden Konzepte verheiraten?

Heuristische Lösung: Eine Funktion  $\delta(x)$  mit den Eigenschaften

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0$$

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1 \quad \text{für alle } \epsilon > 0$$

(genauere Definition siehe 6.2)

$\leadsto$  Massenpunkt bei  $\vec{r}_0$  kann dann einfach durch Dichteverteilung  $\rho(\vec{r}, t) = m \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = m \delta(x - x_0)$  beschrieben werden.

Probleme:

- $\delta$ -Funktion ist eine ziemlich seltsame Funktion
- Integrierbarkeit? ( $\lim_{\text{Untersumme}} \neq \lim_{\text{Obersumme}}$ !)

Aber:

- Physiker ignorieren das!  
Funktion ist einfach "sehr scharf" gepeakt, d.h. so scharf, wie man es für die konkrete Anwendung braucht. (Peak schmaler als jede andere Längenskala im System).
- Mathematiker haben mittlerweile eine saubere Theorie der  $\delta$ -Funktion und ähnlicher Konstrukte konstruiert: Die Distributionentheorie.

Historie

- $\sim$  1920: Einführung der  $\delta$ -Funktion durch Dirac  
(im Kontext der Quantenmechanik)
- $\sim$  1950: U. Schwartz, Theorie der Distributionen  
(erhielt dafür die Fields-Medaille)

Heute wird  $\delta$ -Funktion in der Physik praktisch überall verwendet. Un-  
erlässlich zur Beschreibung physikalischer Sachverhalte, aber auch  
zur Behandlung mathematischer Probleme, z.B. Fouriertransformation  
(Kapitel 7), inhomogene Differentialgleichungen (Kapitel 8.2.4)  
u.v.a.

## 6.2 Definition

Zunächst in einer Dimension.

$\delta$ -Funktion muss offenbar gemeinsam mit Integral definiert werden.

### Formale Definition

$\delta$  definiert eine Abbildung

$$\begin{aligned} C_\infty &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &\longrightarrow \int_a^b dx f(x) \delta(x - x_0) := f(x_0) \quad \text{für } a < x_0 < b \end{aligned}$$

im Raum  $C_\infty$  der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$   
nach  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

Damit ist  $\delta(x)$  strenggenommen keine Funktion. Diese Subtilität kann in der  
Praxis aber in den allermeisten Fällen ignoriert werden. Als Physiker kann  
man sich unter  $\delta(x)$  eine "normale" Funktion mit einem Peak vorstellen, der so  
schmal und hoch ist, wie man es eben braucht.

## 6.3 Darstellungen der Delta-Funktion

### 6.3.1 Darstellung als Grenzwert glatter Funktionen

Ziel:

- Bessere Veranschaulichung
- Gleichungen für  $\delta$ -Funktion für praktische Anwendungen
- Umgekehrt: Aussagen über Grenzverhalten bestimmter Funktionen

Allgemeine Form:  $\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$  oder  $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x)$ ,  
wobei  $\delta_n(x)$  bzw.  $\delta_\epsilon(x)$  differenzierbare (glatte) Funktionen sind, typi-  
scherweise mit den Eigenschaften  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$  und  $\lim \delta_{n,\epsilon}(x) = 0$   
für  $x \neq 0$ .

Konkrete Darstellungen (Beweis von  $\int dx \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$  weiter unten).

$$(i) \quad \delta_\epsilon(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{1}{\epsilon} e^{-x^2/2\epsilon^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$(ii) \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

$$(iii) \quad \delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2}, \quad n \rightarrow \infty$$

$$(iv) \quad \delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \left( \frac{\sin nx}{nx} \right)^2, \quad n \rightarrow \infty$$

$$(v) \quad \delta_n(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin nx}{x} \right), \quad n \rightarrow \infty$$

Bemerkungen:

- (ii), (iii) mit Vorsicht zu benutzen, da  $\delta_{n,\epsilon}(x)$  als Funktion von  $x$  im Unendlichen sehr langsam abfällt.  
Daher ist z.B.  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\epsilon}(x) x^2 = \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{x^2 + \epsilon^2} \approx \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \rightarrow \infty$   
obwohl  $\int dx \delta(x) x^2 = 0$  sein sollte.  
Problem tritt nicht auf, wenn man Integrationsgrenzen endlich wählt.  
 $(\int_{-M}^M dx \delta_{\epsilon}(x) x^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{für} \quad \epsilon \ll M)$ .
- In Darstellung (v) verschwindet  $\delta_n(x)$  strenggenommen nicht für  $x \neq 0, n \rightarrow \infty$ . Aber: oszilliert so schnell, dass Beiträge zu Integralen verschwinden. Diese Darstellung ist in der Praxis besonders wichtig.

Beweise von  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{n,\epsilon}(x) = 1$  in den Darstellungen (i)–(v)

(i) folgt aus  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\tau^2} = \sqrt{\pi}$  (3.2.5) nach Substitution  $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\epsilon}$ .

(ii) folgt aus  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{1+\tau^2} = \pi$  (3.3.4) nach Substitution  $\tau = x/\epsilon$ .

(iii) Analog (ii) mit  $\epsilon = 1/n$ .

(v) Zeige zunächst  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} = \pi$ . Rest folgt nach Substitution  $\tau = \pi x$ .

Benutze dazu Theorie analytischer Funktionen (3.3.4).

Erinnerung: Falls  $f(z)$  analytisch innerhalb eines Gebietes  $G$  in der komplexen Ebene, das von einer Kurve  $C$  umschlossen wird, dann gilt:

$$\oint_C dz f(z) = 0 \quad (\text{Cauchyscher Integralsatz})$$

$$\oint_C dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w) \quad \text{für Punkte } w \in G$$

(Cauchysche Integralgleichung).

Dabei wird Kurve  $C$  in  $\oint_C$  gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Damit folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau - i\epsilon} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{e^{i\tau}}{\tau - i\epsilon} - \frac{e^{-i\tau}}{\tau - i\epsilon} \right)$$

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{i\tau}}{\tau - i\epsilon} = \oint_C dz \frac{e^{iz}}{z - i\epsilon} \quad \text{mit } C: \text{ Schlie\ss e Integrationsweg \u00fcber obere Halbebene in } \mathbb{C} \\ \text{Oberer Halbkreis tr\u00e4gt nicht bei, da } e^{i(i\infty)} = e^{-\infty} = 0. \\ = 2\pi i e^{i(i\epsilon)} = 2\pi i e^{-\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi i \\ \text{Cauchysche} \\ \text{Integralgleichung} \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-i\tau}}{\tau - i\epsilon} = - \oint_{C'} dz \frac{e^{-iz}}{z - i\epsilon} \quad \text{mit } C': \text{ Schlie\ss e Integrationsweg \u00fcber untere Halbebene in } \mathbb{C} \\ \text{Unterer Halbkreis tr\u00e4gt nicht bei, da } e^{-i(-i\infty)} = e^{-\infty} = 0. \\ = 0 \quad \text{da } \frac{e^{-iz}}{z - i\epsilon} \text{ analytisch innerhalb von } C' \\ \text{Cauchyscher} \quad \text{(einziger Pol } z_0 = i\epsilon \text{ liegt au\ss erhalb von } C') \\ \text{Integralsatz} \\ = \frac{1}{2i} 2\pi i = \pi \quad \checkmark. \end{array} \right.$$

(iv) Zeige  $\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 = \pi$ . Rest folgt nach Substitution  $\tau = n\pi$ .

$$\begin{aligned} \text{Betrachte } I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 \stackrel{\text{partielle}}{=} \left[ \tau \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau \frac{d}{d\tau} \left( \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 \right) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left( \frac{\sin \tau}{\tau} \right)^2 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau \cos \tau}{\tau} = 2I - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin(2\tau)}{\tau} \\ \Rightarrow I &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\sin(2\tau)}{\tau} \stackrel{\tau' = 2\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left( \frac{\sin \tau'}{\tau'} \right) = \pi \quad \text{nach (v)} \quad \checkmark \end{aligned}$$

### 6.3.2 Darstellung als Integral

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx}$$

(Begründung:

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{ix} e^{ikx} \right]_{k=-n}^n = \frac{1}{2\pi ix} (e^{inx} - e^{-inx}) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x}$$

entspricht Grenzwert (v) in 6.3.1.

$$\begin{aligned} \text{Alternativ: } \delta_\epsilon(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \epsilon|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dx e^{-\epsilon x} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon - ik} + \frac{1}{\epsilon + ik} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} \end{aligned}$$

entspricht Grenzwert (ii) in 6.3.1.)

## 6.4 Rechenregeln mit der Delta-Funktion

Zusammenstellung der wichtigsten Regeln

(i) •  $\int_a^b dx \delta(x - x_0) f(x) = \begin{cases} f(x_0) & : x_0 \in ]a, b[ \\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$   
für alle stetigen "Testfunktionen"  $f$  (laut Definition).

(ii) •  $\delta(x) = 0$  für  $x \neq 0$   
•  $x \cdot \delta(x) = 0$  (denn:  $\int dx x \delta(x) f(x) = 0 \quad \forall f(x)$ )  
•  $\delta(x - y) f(x) = \delta(x - y) f(y)$  (denn:  $\int dx \delta(x - y) f(x) = f(y) = \int dx \delta(x - y) f(y)$ )

(iii) •  $\delta(\phi(x)) = \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} \delta(x - x_i)$  (Beweis folgt am Ende des Abschnitts)  
•  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$  (Folgerung mit  $\phi(x) = ax$ .)

(iv) "Stammfunktion" :

$$\bullet \int_{-\infty}^x dx' \delta(x') = \theta(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 1/2 & : x = 0 \\ 0 & : x < 0 \end{cases} \quad \text{Heaviside-Funktion}$$

Umgekehrt:  $d\theta/dx = \delta(x)$ .

(v) "Ableitungen" :

$$\bullet \int_a^b dx \delta'(x - x_0) f(x) = \begin{cases} -f'(x_0) & : x_0 \in ]a, b[ \\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

für alle differenzierbaren Testfunktionen  $f$   
(denn:  $\delta_a^b f(x) \delta'(x - x_0) = \underbrace{[\delta(x - x_0) f(x)]_a^b}_0 - \int_a^b dx f'(x) \delta(x - x_0) = -f'(x_0)$ ).

$$\bullet \int_a^b dx \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0) & : x_0 \in ]a, b[ \\ 0 & : x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

für alle  $n$ -fach differenzierbaren Testfunktionen  $f$  (denn: analog)

(vi) Symmetrien :

$$\begin{aligned} \bullet \delta(-x) &= \delta(x): \quad \delta(x) \text{ ist gerade} && \text{(Folgerung aus (iii-b) mit } a = -1.) \\ \bullet \delta'(-x) &= -\delta'(x) && \text{(Kettenregel)} \\ \bullet \delta^{(n)}(-x) &= (-1)^n \delta^{(n)}(x) && \text{(Kettenregel)} \end{aligned}$$

Nachtrag: Beweis von (iii): 
$$\delta(\phi(x)) = \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} f(x_i) \delta(x - x_i)$$

Zerlege  $\phi(x)$  in monotone Teilstücke  $I_\alpha = [x_{\alpha-1}, x_\alpha]$ .

In jedem Teilstück ist  $\phi$  umkehrbar. Umkehrfunktion  $g_\alpha(\phi)$  ist definiert im Intervall zwischen  $\phi_{\alpha-1} := \phi(x_{\alpha-1})$  und  $\phi_\alpha := \phi(x_\alpha)$ .

⇒ Für stetige Testfunktionen  $f(x)$  gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\phi(x)) f(x) &= \sum_{\alpha} \int_{x_{\alpha-1}}^{x_{\alpha}} dx \delta(\phi(x)) f(x) \\ &\stackrel{\text{Substitution}}{=} \sum_{\alpha} \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_{\alpha}} d\phi \frac{1}{|\phi'(x)|_{x=g_{\alpha}(\phi)}} \delta(\phi) f(g_{\alpha}(\phi)). \end{aligned}$$

Nur Teilstücke, auf denen Nullstelle liegt, tragen zum Integral bei.

Jedes Teilstück hat maximal eine Nullstelle  $x_i$ .

Beitrag, falls  $\phi$  monoton steigt ( $\phi_{\alpha-1} < \phi_{\alpha}, \phi'(x) > 0$ )

$$\rightarrow \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_{\alpha}} \frac{d\phi}{\phi'(x)} \delta(\phi) f(g_{\alpha}(\phi)) = f(x_i) \frac{1}{\phi'(x_i)} \underset{\phi' > 0}{=} f(x_i)/|\phi'(x_i)|$$

Beitrag, falls  $\phi$  monoton fällt ( $\phi_{\alpha-1} > \phi_{\alpha}, \phi'(x) < 0$ )

$$\rightarrow \int_{\phi_{\alpha-1}}^{\phi_{\alpha}} d\phi \dots \stackrel{\substack{\text{Sortiere} \\ \text{Integrationsgrenzen}}}{=} = - \int_{\phi_{\alpha}}^{\phi_{\alpha-1}} d\phi \dots = - \frac{f(x_i)}{\phi'(x_i)} \underset{\phi' < 0}{=} f(x_i)/|\phi'(x_i)|.$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\phi(x)) f(x) &= \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} f(x_i)/|\phi'(x_i)| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{\substack{\text{Nullstellen} \\ x_i \text{ von } \phi(x)}} \frac{1}{|\phi'(x_i)|} \delta(x - x_i) f(x) \quad \text{für alle Testfunktionen } f. \checkmark \end{aligned}$$

## 6.5 Verallgemeinerung für höhere (d) Dimensionen

Ortsvektoren  $\vec{r} = (x_1, \dots, x_d)$ .

$$\delta^d(\vec{r} - \vec{r}^0) = \delta(x_1 - x_1^0) \delta(x_2 - x_2^0) \cdots \delta(x_d - x_d^0)$$

mit Integraldarstellung 
$$\delta(\vec{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int d^d k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$



# Kapitel 7

## Die Fouriertransformation

### Motivation :

In Kapitel 3.3: Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen  $\Rightarrow$  Taylor-Reihe.  $\leadsto$  kann für praktische Rechnungen sehr nützlich sein.

In diesem Kapitel fast noch wichtigere Entwicklung: Zerlegung in Sinus- und Kosinusfunktionen bzw.  $e^{i\omega t} \Rightarrow$  Fourierreihe oder Fourierintegral. Fülle von Anwendungen in Mathematik (Differentialgleichungen) und Technik (Elektrotechnik, Signalverarbeitung, Bildverarbeitung). Konkrete physikalische Bedeutung in vielen Bereichen der Physik (Optik, Akustik, Quantenmechanik, Streuung)

### Beispiele :

\* **Lichtbrechung am Prisma** bzw. **Regenbogen:**

Weißes Licht setzt sich aus einem Spektrum an reinen Farben / Wellenlängen zusammen. Diese werden durch das Prisma sichtbar gemacht  $\leadsto$  entspricht einer *Fourierzerlegung*.

\* **Akustik**

Geräusche  $\hat{=}$  Dichteschwankungen der Luft  $\delta\rho(t)$   
 $\rightarrow$  Frequenzspektrum

Teilweise nimmt Ohr/Gehirn selbst Zerlegung in Frequenzen vor.  
(Dreiklänge, Stimmengewirr etc.)

Teilweise wird Gemisch von Frequenzen als ein Ton mit bestimmter charakteristischer "Klangfarbe" wahrgenommen.

\* **Streuexperimente**

Meßgrößen sind im Allgemeinen Fouriertransformierte von Korrelationsfunktionen.

## 7.1 Diskrete Fouriertransformation

Beginne mit dem mathematisch unproblematischsten Fall: Transformation eines endlichen Satzes von Zahlen (Datenpunkten).

Numerische Bedeutung: Datensätze im Computer sind immer endlich.

Für diskrete Fouriertransformationen gibt es ultraschnelle Algorithmen (Fast Fourier Transformation).

### 7.1.1 Definition

Gegeben Zahlenfolge  $(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}$ .

**Diskrete Fouriertransformierte :**

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i kj/N} a_j \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

**Inverse Transformation :** Ursprüngliche Daten können zerlegt werden in

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i kj/N} \hat{a}_k$$

**Verbindung** über Darstellung des Kronecker-Deltas

$$\delta_{nm} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i pn/N} e^{-2\pi i pm/N} \quad \text{für } n, m \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

(Check: Erst Gleichung für  $\delta_{nm}$ :

$$\begin{aligned} n \neq m : & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = \sum_{p=0}^{N-1} (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}})^p \\ & = \underbrace{(e^{2\pi i \frac{n-m}{N} N} - 1)}_{\text{geometrische Summe}} / (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}} - 1) = (1 - 1) / (e^{2\pi i \frac{n-m}{N}} - 1) = 0 \\ n = m : & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = \sum_{p=0}^{N-1} 1 = N \\ \Rightarrow & \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{n-m}{N} p} = N \delta_{nm} \quad \checkmark. \end{aligned}$$

Nun inverse Fouriertransformation: Einsetzen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{kj}{N}} \hat{a}_k &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{2\pi i kj/N} e^{-2\pi i kj'/N} a_{j'} \\ &= \sum_{j'=0}^{N-1} a_{j'} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i kj/N} e^{-2\pi i kj'/N}}_{\delta_{jj'}} = a_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Vorfaktoren  $(1/\sqrt{N})$  in den Gleichungen für  $\hat{a}_k$  bzw.  $a_j$  sind Konventionssache und von Anwendung zu Anwendung verschieden. Hier wurden sie so gewählt, dass die diskrete Fouriertransformation und die inverse Transformation symmetrisch sind. Eine andere häufige Wahl wäre z.B.  $\hat{a}_k = \sum_j e^{-2\pi i kj/N} a_j$  und dementsprechend  $a_j = \frac{1}{N} \sum_k e^{2\pi i kj/N} \hat{a}_k$ .

**Interpretation:** Datensatz  $(a_0, \dots, a_{N-1})$  wird durch "Frequenz-Anteile"  $e^{i\omega_k j}$  charakterisiert mit  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ . Amplituden  $\hat{a}_k$  zu kleinen Frequenzen enthalten Information über großräumige Datenstruktur (z.B.  $k = 0 \leftrightarrow$  Mittelwert).

### 7.1.2 Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation

Vorab: Von nun an Konvention: Periodische Fortsetzung.

Für  $k \notin [0, \dots, N-1]$  definiere  $\hat{a}_k := \hat{a}_{k \bmod N}$

Für  $j \notin [0, \dots, N-1]$  definiere  $a_j := a_{j \bmod N}$

(NB:  $\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{(k+lN)j}{N}} a_j \quad \forall l \in \mathbb{Z}$   
 $\Rightarrow$  Konvention ist konsistent. Dasselbe gilt für  $a_j$ ).

(i) **Linearität:**  $c_j = \alpha a_j + \beta b_j$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \hat{c}_k = \alpha \hat{a}_k + \beta \hat{b}_k$ .

(ii) **Translation:**  $c_j = a_{j-n} \Leftrightarrow \hat{c}_k = e^{-2\pi i kn/N} \hat{a}_k$

(denn:  $\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_{j-n} = e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{k(j-n)}{N}} a_{j-n}$   
 $= e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=-n}^{N-1-n} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j$   
 $\mid a_j$  und  $e^{-2\pi i \frac{kj}{N}}$  sind periodisch modulo  $N$   
 $= e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j = e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \hat{a}_k \quad \checkmark$ )

(iii) **Symmetrien:**

$a_j$  reell  $\Leftrightarrow \hat{a}_0$  reell,  $\hat{a}_{n-k} = \hat{a}_{-k} = \hat{a}_k^*$   
(denn:  $\hat{a}_{-k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{kj}{N}} a_j \stackrel{a_j = a_j^*}{=} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j \right)^* = \hat{a}_k^*$ )  
 $a_j$  rein imaginär  $\Leftrightarrow \hat{a}_0 = 0$ ,  $\hat{a}_{n-k} = \hat{a}_{-k} = -\hat{a}_k^*$   
(analog)

(iv) **Parsevalsche Gleichung:**

$$\boxed{\sum_{j=0}^{N-1} |a_j|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{a}_k|^2} \text{ bzw. allgemeiner } \boxed{\sum_{j=0}^{N-1} a_j^* b_j = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k^* \hat{b}_k}$$

(Beweis:  $\sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k^* \hat{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} e^{2\pi i \frac{kj'}{N}} a_j^* b_{j'}$   
 $= \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{j'=0}^{N-1} a_j^* b_{j'} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} e^{2\pi i \frac{kj'}{N}}}_{\delta_{jj'}} = \sum_{j=0}^{N-1} a_j^* b_j \quad \checkmark$ )

(b) **Faltungssatz:** Für  $c_l = \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{l-j}$  gilt  $\hat{c}_k = \sqrt{N} \hat{a}_k \hat{b}_k^*$

(Beweis:  $\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} c_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_j b_{l-j} \underbrace{e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}}_{e^{-2\pi i \frac{k(l-j)}{N}} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}}}$   
 $= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kj}{N}} a_j}_{\hat{a}_k} \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{k(l-j)}{N}} b_{l-j}}_{\sum_{l=-j}^{N-1-j} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} b_l = \sum_{l=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} b_l = \sqrt{N} \hat{b}_k^*}$   $= \sqrt{N} \hat{a}_k \hat{b}_k^* \quad \checkmark$ )

## 7.2 Fourierintegral

Betrachte nun statt diskreter Datenpunkte kontinuierliche Funktion  $f(x)$ .

Fourierintegral: Kontinuierliche Variante der diskreten Fouriertransformation.

### 7.2.1 Definition

Gegeben Funktion  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit Eigenschaften (Dirichlet-Jordan):

- Absolut integrierbar:  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)| < \infty$
- Hat in jedem endlichen Teilintervall nur endlich viele Sprungstellen, endlich viele Maxima und Minima und beschränkte Schwankung.

Dann ist:

$$\text{Fouriertransformierte : } \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

$$\text{Inverse Transformation : } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{f}(k) e^{ikx}$$

**Verbindung** über Darstellung der Delta-Funktion

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ipy} e^{-ip'y}$$

(Check: Gleichung für Delta-Funktion: Siehe Kapitel 6.3.2)

Inverse Fouriertransformation: Einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \hat{f}(k) e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int dk \int dx' f(x') e^{ikx} e^{-ikx'} \\ &= \int dx' f(x') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} e^{-ikx'}}_{\delta(x-x')} = f(x) \checkmark \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Auch hier wieder völliger Wildwuchs in der Literatur bezüglich Vorfaktoren! Deshalb: Immer überprüfen, über welche Gleichung die Fouriertransformation konkret definiert ist.

**Verallgemeinerung** auf  $d$  Dimensionen:

$$\hat{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \iiint d^d r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \iiint d^d k \hat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

### 7.2.2 Eigenschaften und Rechenregeln

(Beweise völlig analog dem Fall der diskreten Fouriertransformationen)

(i) **Linearität:**  $h(\vec{r}) = \alpha f(\vec{r}) + \beta g(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \alpha \hat{f}(\vec{k}) + \beta \hat{g}(\vec{k})$

(ii) **Translation:**  $h(\vec{r}) = f(\vec{r} - \vec{a}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}} \hat{f}(\vec{k})$

(iii) **Symmetrien:**  $f(\vec{r})$  reellwertig  $\Leftrightarrow \hat{f}(-\vec{k}) = \hat{f}^*(\vec{k})$   
 $f(\vec{r})$  rein imaginär  $\Leftrightarrow \hat{f}(-\vec{k}) = -\hat{f}^*(\vec{k})$

(iv) **Parsevalsche Gleichung:**  $\int d^d r |f(\vec{r})|^2 = \int d^d k |\hat{f}(\vec{k})|^2$   
 bzw. verallgemeinert  $\int d^d r f^*(\vec{r}) g(\vec{r}) = \int d^d k \hat{f}^*(\vec{k}) \hat{g}(\vec{k})$

(v) **Faltungssatz:**  $h(\vec{r}) = \int d^d r' f(\vec{r}') g(\vec{r} - \vec{r}') \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\vec{k}) \hat{g}(\vec{k})$

#### Zusätzliche wichtige Eigenschaften

(vi) **Produkt:**  $h(\vec{r}) = f(\alpha \vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{|\alpha|^d} \hat{f}(\vec{k}/\alpha)$

(denn:  $\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d \vec{r} f(\alpha \vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$   
 $\stackrel{\text{Substitution}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d \tau \frac{1}{|\alpha|^d} f(\vec{\tau}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{\tau}/\alpha} \quad \checkmark$   
Jacobi-Determinante)

(vii) **Ableitungen:**  $h(\vec{r}) = \partial_\alpha f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = ik_\alpha \hat{f}(\vec{k})$   
 $h(\vec{r}) = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_n} f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i^n k_{\alpha_1} \cdots k_{\alpha_n} \hat{f}(\vec{k})$

(denn: Für  $h(\vec{r}) = \partial_\alpha f(\vec{r})$  gilt  
 $\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \partial_\alpha f(\vec{r}) \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r f(\vec{r}) \partial_\alpha (e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}})$   
 $= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r f(\vec{r}) (-ik_\alpha) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = ik_\alpha \hat{h}(\vec{k})$   
 Höhere Ableitungen analog.)

(viii) **Momente:**  $h(\vec{r}) = r_\alpha f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \hat{f}(\vec{k})$   
 $h(\vec{r}) = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_n} f(\vec{r}) \Leftrightarrow \hat{h}(\vec{k}) = i^n \frac{\partial^n}{\partial k_{\alpha_1} \cdots \partial k_{\alpha_n}} \hat{f}(\vec{k})$

(Herleitung: Analog zu (vii) wegen Symmetrie von Fouriertransformation und inverser Fouriertransformation, oder, für  $h(\vec{r}) = r_\alpha f(\vec{r})$   
 $\hat{h}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r \underbrace{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} r_\alpha}_{i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}} f(\vec{r}) = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^d r f(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = i \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \hat{f}(\vec{k}) \quad \checkmark$   
 Höhere Momente analog.)

## 7.2.3 Paare von Fourier-Transformierten

in einer Dimension

|                          | $f(x)$                               | $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx e^{-ikx} f(x)$   |                  |
|--------------------------|--------------------------------------|--|------------------|
| (i) Delta-Funktion       | $\delta(x)$                          | $1/\sqrt{2\pi}$  | laut 6.3.2       |
| (ii) Konstante           | $C$                                  | $C \sqrt{2\pi} \delta(x)$  | laut 6.3.2       |
| (iii) Kosinus<br>Sinus   | $\cos(\omega x)$<br>$\sin(\omega x)$ | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \delta(k + \omega) + \delta(k - \omega) \right)$<br>$\sqrt{\frac{\pi}{2}} i \left( \delta(k + \omega) - \delta(k - \omega) \right)$ | Euler-<br>formel |
| (iv) Gaußkurve           | $e^{-x^2/2\sigma^2}$                 | $\sigma e^{-k^2\sigma^2/2}$  | siehe unten      |
| (v) Lorentzkurve         | $1/(x^2 + a^2)$                      | $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{ a } e^{- ka }$   | siehe unten      |
| (vi) Exponentialfunktion | $e^{-a x } \quad (a > 0)$            | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2 + a^2}$   | Invers zu (v)    |
| (vii) Rechteckfunktion   | $\theta(a -  x ) \quad (a > 0)$      | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}$  | Übungsaufgabe    |

**Bemerkungen:**

- \* Manche der obigen Funktionen erfüllen das Kriterium der absoluten Integrierbarkeit  $\int dx |f(x)| < \infty$  *nicht!* (z.B. Konstante, Sinus, Kosinus). In diesem Fall kann man sich einfach einen infinitesimalen "Dämpfungsterm"  $e^{-\epsilon|x|}$  im Integral dazudenken mit  $\epsilon \rightarrow 0^+$  (vgl. 6.3.2).
- \* Aus schmalen Peaks werden breite Peaks und umgekehrt. Zum Beispiel Gaußfunktion:  $f(x)$  hat Breite  $\sigma$ ,  $\hat{f}(k)$  hat Breite  $1/\sigma$ .

Generell gilt: 
$$\left( \int dx x^2 |f(x)|^2 \right) \left( \int dk k^2 |\hat{f}(k)|^2 \right) \geq \frac{1}{4}$$

(ohne Beweis,

Spezialfall der Unschärferelation, Stoff von Theorie III).

**Rechnungen** zu (iv)-(vi)

Brauche Theorie der analytischen Funktionen (3.3.4)

Erinnerung: Falls  $f(z)$  analytisch (differenzierbar) innerhalb eines Gebietes  $G$  in der komplexen Ebene, das von einer Kurve  $C$  umschlossen wird, gilt:

– Cauchyscher Integralsatz:  $\oint dz f(z) = 0$

– Cauchysche Integralgleichung:  $\oint dz \frac{f(z)}{z-w} = 2\pi i f(w)$  für  $w \in G$

Dabei wird Kurve  $C$  gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen.

Nun Rechnungen:

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad f(x) &= e^{-x^2/2\sigma^2} \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/2\sigma^2} \stackrel{\substack{\text{Quadratische} \\ \text{Ergänzung}}}{=} e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+ik\sigma^2)^2} \\
 &\quad \left| \begin{array}{l} \text{Substituiere } \tilde{x} = x + ik\sigma^2 \\ \text{Verschiebe Integrationsweg parallel zur reellen Achse} \\ \rightarrow \text{Wert des Integrals gleich, da keine Singularität überstrichen wird.} \end{array} \right. \\
 &= e^{-k^2\sigma^2/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} e^{-\tilde{x}^2/2\sigma^2}}_{\sqrt{2\pi}\sigma} = \sigma e^{-k^2\sigma^2/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(vi)} \quad f(x) &= e^{-a|x|} \\
 \Rightarrow \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a|x|} e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx e^{-ax} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{k^2+a^2}
 \end{aligned}$$

(v) Folgt im Prinzip aus (vi) wegen Symmetrie der Fouriertransformation und der inversen Fouriertransformation.

Alternative Herleitung: Betrachte  $f(x) = 1/(x^2 + a^2)$

$$\Rightarrow \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{x^2+a^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \left( \frac{1}{x-i|a|} - \frac{1}{x+i|a|} \right) \frac{1}{2i|a|}$$

Schließe Integrationsweg in komplexer Ebene über Halbkreis im Unendlichen in oberer oder unterer Halbene

$k < 0$ : Weg  $C$  oben herum (über  $i\infty$ ), da  $e^{-ikx} \sim e^{-iki\infty} \sim e^{-|k|\infty} = 0$ .

$k > 0$ : Weg  $C'$  unten herum (über  $-i\infty$ ), da  $e^{-ikx} \sim e^{iki\infty} \sim e^{-k\infty} = 0$ .

Achtung: Damit Integral über  $C'$  gegen den Uhrzeigersinn läuft, dreht sich dabei Vorzeichen um!

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow k < 0: \hat{f}(k) &= \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_C dz e^{-ikz} \left( \frac{1}{z-i|a|} - \frac{1}{z+i|a|} \right) = \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\oint_C dz \frac{e^{-ikz}}{z-i|a|}}_{2\pi i e^{-ik(i|a|)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{k|a|} \quad \text{Pol nicht eingeschlossen, kein Beitrag}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k > 0: \hat{f}(k) &= -\frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{C'} dz e^{-ikz} \left( \frac{1}{z-i|a|} - \frac{1}{z+i|a|} \right) = \frac{1}{2i|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\oint_{C'} dz \frac{e^{-ikz}}{z+i|a|}}_{2\pi i e^{-ik(-i|a|)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{-k|a|} \quad \text{Pol nicht eingeschlossen, kein Beitrag}
 \end{aligned}$$

$$\text{Zusammen: } \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|a|} e^{-|ka|} \quad \checkmark$$

### 7.2.4 Anwendungsbeispiel

Neben physikalischen Anwendungen sehr nützlich zum Lösen linearer Differentialgleichungen.

**Beispiel:** Lösung der Gleichung  $\Delta G(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$  in beliebigen Dimensionen.

**Vorgehen:** (hier)

Benutze Fouriertransformation, um auf geeigneten Ansatz zu kommen.  
Benutze dann Gaußschen Satz, um das Problem zu lösen.

1. Schritt: Lösung der Gleichung im "Fourierraum"  $\vec{k}$ .

$$G(\vec{r}) \rightarrow \hat{G}(\vec{k}), \quad \Delta G(\vec{r}) \rightarrow -k^2 \hat{G}(\vec{k}), \quad \delta(\vec{r}) \rightarrow 1/\sqrt{2\pi}^d.$$

$$\Rightarrow -k^2 \hat{G}(\vec{k}) = 1/\sqrt{2\pi}^d \Rightarrow \hat{G}(\vec{k}) = -1/(\sqrt{2\pi}^d k^2)$$

2. Schritt: Rücktransformation in "Ortsraum"  $\vec{r}$ .

**Allgemeines Verfahren für Dimensionen**  $\boxed{d > 2}$

$$G(\vec{r}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int d^d k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{1}{k^2} e^{ikr \cos \phi(\vec{k}, \hat{r})}$$

| mit  $\hat{k} = \vec{k}/k, \hat{r} = \vec{r}/r$ .

|  $d^d k = dk k^{d-1} d\Omega_d$  mit  $\Omega_d$ :  $d$ -dimensionaler Raumwinkel

$$\stackrel{k'=kr}{=} -\frac{1}{(2\pi)^d} r^{2-d} \underbrace{\int_0^\infty dk' k'^{d-3} \int d\Omega_d e^{ik' \cos(\theta)}}_{\text{unabhängig von } |r|} \propto r^{2-d}$$

Berechnung von  $\int_0^\infty dk' k'^{d-3} \int d\Omega_d \dots$  ist aufwendig.

Übernimm daher lieber  $G(\vec{r}) \propto r^{2-d}$  als *Ansatz*.

**Problem bei  $d \leq 2$**  :  $\int_0^\infty dk' k'^{d-3} \dots$  divergiert bei  $k' \rightarrow 0$

$\Rightarrow$  Rücktransformation nicht zulässig.

Ausweg: Versuchen, ob Abschneiden von  $\hat{G}(\vec{k})$  zum Erfolg führt:

Ersetze  $\hat{G}(\vec{k})$  durch  $\hat{G}_\epsilon(\vec{k}) = -1/(\sqrt{2\pi}^d (k^2 + \epsilon^2))$  mit  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

$$\boxed{d=1} : \hat{G}_\epsilon(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} / (k^2 + \epsilon^2) \xrightarrow{7.2.3(v)} G_\epsilon(x) = -\frac{1}{2\epsilon} e^{-|x|\epsilon}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\epsilon} + |x|/2 = \text{const.} + |x|/2.$$

NB: Die Differentialgleichung  $\Delta G = \delta(x)$  definiert  $G$  bis auf eine Konstante (und eine konstante Steigung), deshalb darf const. abgezogen werden. Man zeigt leicht, dass  $G(x) = |x|/2$  die Differentialgleichung  $\Delta G = \frac{d^2}{dx^2} G = \delta(x)$  erfüllt (Übungsaufgabe).

$\boxed{d=2}$  Wähle  $x$ -Achse in Richtung  $\vec{r}$

$$G_\epsilon(\vec{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + \epsilon^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos \phi}$$

$$\stackrel{k'=kr}{=} -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk' \frac{k'}{k'^2 + (\epsilon r)^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{ik' \cos \phi}$$

| Integral dominiert vom Beitrag bei kleinen  $k'$

$$\sim -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dk' k'}{k'^2 + (\epsilon r)^2} \int_0^{2\pi} d\phi \sim \frac{1}{2\pi} \ln(\epsilon r) = \text{const.} + \frac{1}{2\pi} \ln(r)$$

Konstante kann wieder abgezogen werden.

$\Rightarrow$  Führt zu Ansatz  $G(\vec{r}) \propto \ln(r)$ .

(De facto ist  $G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r)$  bereits die Lösung, siehe 3. Schritt).

3. Schritt: Auswerten des Ansatzes aus dem 2. Schritt.

$$\begin{aligned}
 d > 2: & \quad \text{Ansatz } G(\vec{r}) = C_d r^{2-d} \Rightarrow \nabla G(\vec{r}) = C_d (2-d) r^{1-d} \frac{\vec{r}}{r} \\
 & \quad \text{Integriere über Kugel um Ursprung mit beliebigem Radius.} \\
 & \quad \rightarrow \int_V d^d r \Delta G \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \nabla G = C_d (2-d) \Omega_d. \\
 & \quad \text{mit } \Omega_d : \text{Oberfläche der } d\text{-dimensionalen Einheitskugel.} \\
 & \quad \text{Andererseits: } \int_V d^d r \Delta G \stackrel{!}{=} \int_V d^d r \delta(\vec{r}) = 1. \\
 & \quad \Rightarrow C_d = -\frac{1}{(d-2)\Omega_d}, \quad G(\vec{r}) = -\frac{1}{(d-2)\Omega_d} r^{2-d}. \\
 d = 2: & \quad \text{Ansatz } G(\vec{r}) = C_2 \ln(r) \Rightarrow \nabla G(\vec{r}) = C_2 \frac{1}{r} \frac{\vec{r}}{r} \\
 & \quad \text{Verfahren wie oben } \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\Omega_2} = \frac{1}{2\pi}, \quad G(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \\
 d = 1: & \quad G(r) \text{ oben direkt berechnet: } G(x) = |x|/2.
 \end{aligned}$$

## 7.3 Fourierreihe

Zum Abschluss und zur Vervollständigung:

Fouriertransformation von Funktionen auf *endlichen Intervallen* oder von *periodischen Funktionen*  $\rightarrow$  **Fourierreihen**

### 7.3.1 Definition

Gegeben periodische Funktion  $f(t+nT) = f(t)$  für  $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$  mit Eigenschaften (Dirichlet-Bedingungen): Auf Intervall  $[0 : T]$  hat  $f(t)$  nur endlich viele Sprungstellen und endlich viele Minima/Maxima. An jeder Unstetigkeitsstelle existiert linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert.

Dann läßt sich  $f(t)$  schreiben als:

$$\text{Fourierreihe : } f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T}$$

$$\text{mit Fourierkoeffizienten : } c_n = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) e^{-2\pi i n t / T}$$

( $C \in \mathbb{R}$  beliebig).

**Verbindung** über

$$\delta_{nm} = \frac{1}{T} \int_C^{C+T} dt e^{-2\pi i n t / T} e^{2\pi i m t / T} \quad (*)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t / T} e^{-2\pi i n t' / T} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - t' + Tm) \quad (**)$$

(Check:

(\*): Klar (einfach Integral ausrechnen!)

$$\begin{aligned}
 (**): \text{ Betrachte } S_M &= \sum_{n=-M}^M (e^{2\pi it/T})^n = x^{-M} \sum_{n=0}^{2M} x^n \quad \text{mit } x := e^{2\pi it/T} \\
 &= \underset{\text{geometrische}}{x^{-M} \frac{x^{2M+1}-1}{x-1}} = \underset{x \text{ einsetzen}}{\frac{\sin(\pi(2M+1)t/T)}{\sin(\pi t/T)}}
 \end{aligned}$$

im Grenzwert  $M \rightarrow \infty$ :

Interessant sind  $t$ -Werte mit  $\sin(\pi t/T) \rightarrow 0 \Rightarrow t^* = mT$

Entwickle  $t = mT + x, x \ll 1$

$$\Rightarrow \sin(\pi t/T) \approx \pi \frac{x}{T} \cos(\pi m) = (-1)^m \pi \frac{x}{T}$$

$$\sin(\pi(2M+1)\frac{t}{T}) = \sin(\pi m + \pi(2M+1)\frac{x}{T}) = (-1)^m \sin(\pi(2M+1)\frac{x}{T})$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\pi(2M+1)t/T)}{\sin(\pi t/T)} \approx \frac{\sin(\pi(2M+1)x/T)}{\pi x/T} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \pi \delta(\pi \frac{x}{T}) = T \delta(x)$$

$$\Rightarrow S_M \xrightarrow{M \rightarrow \infty} T \sum_m \delta(t - mT) \quad \checkmark$$

Rest ergibt sich durch Einsetzen und Benutzen von (\*) und (\*\*).

**Bemerkung:** Fourierreihenentwicklung kann ohne weiteres auf nichtperiodische Funktionen angewendet werden, die nur in einem Intervall  $[0 : T]$  definiert sind. Diese werden dann einfach periodisch fortgesetzt.

### 7.3.2 Darstellung in trigonometrischen Funktionen

Im Prinzip dieselbe Entwicklung, aufgespalten in Sinus- und Kosinus-Funktionen.

**Definition** Gegeben eine *reelle* Funktion  $f(t)$ , die periodisch mit der Periode  $T$  ist und die Dirichlet-Bedingungen erfüllt. Sie kann dann geschrieben werden als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_n \left\{ a_n \cos(2\pi n \frac{t}{T}) + b_n \sin(2\pi n \frac{t}{T}) \right\}$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) \cos(2\pi n \frac{t}{T}) = c_n + c_{-n} \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) \sin(2\pi n \frac{t}{T}) = i(c_n - c_{-n}) \\
 a_0 &= \frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt f(t) = 2c_0.
 \end{aligned}$$

Speziell  $f(t)$  gerade  $(f(t) = f(-t))$  : Reine Kosinusreihe ( $b_n = 0 \forall n$ )  
 $f(t)$  ungerade  $(f(t) = -f(-t))$  : Reine Sinusreihe ( $a_n = 0 \forall n$ )

Wichtigste weitere Eigenschaft: **Parseval-Gleichung**

$$\frac{2}{T} \int_C^{C+T} dt |f(t)|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

# Kapitel 8

## Partielle Differentialgleichungen

### 8.1 Übersicht über die wichtigsten Beispiele in der Physik

Partielle Differentialgleichungen: Differentialgleichungen für Funktionen  $u(\vec{x})$  mit Ableitungen nach mehreren Variablen  $x_i$ .

In der Physik sind sie

- ★ In der Regel **linear**:  $L u(\vec{x}) = f(\vec{x})$   
mit  $L$ : Linearer Differentialoperator  
$$L = \left\{ \sum_i A_i^{(1)}(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{ij} A_{ij}^{(2)}(\vec{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \right\}$$
  
⇒ Es gilt das Superpositionsprinzip:  
Falls  $u_j(\vec{x})$  Lösung von  $LU_j = f_j$ , dann ist  $u(\vec{x}) = \sum_j \alpha_j u_j(\vec{x})$  Lösung von  $Lu = \sum_j \alpha_j f_j(\vec{x})$ .
  
- ★ In der Regel **zweiter Ordnung**:  
Die höchste Ableitung ist zweiter Ordnung.  
Ausnahme z.B. Dirac-Gleichung: Nur erster Ordnung.  
Höhere Ordnungen treten praktisch nicht auf.

Die linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung werden in drei Kategorien eingeteilt: Elliptisch, Hyperbolisch, Parabolisch.

Betrachte dafür nur die Terme mit zweiten Ableitungen:

$$L = \sum_{ij} A_{ij}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \dots \text{ mit } A_{ij}^{(2)} = A_{ji}^{(2)} \text{ symmetrisch}$$

(kann symmetrisiert werden, da Ableitungen vertauschen.)

Diagonalisiere Matrix  $(A_{ij}^{(2)}) \rightarrow$  Eigenwerte  $\lambda_\alpha$

Klassifizierung auf Basis der Eigenwerte:

- Alle gleiches Vorzeichen: Elliptischer Typ
- Verschiedene Vorzeichen: Hyperbolischer Typ
- Einige Eigenwerte sind Null: Parabolischer Typ

Nun: Kurze Charakterisierung dieser drei Typen mit Beispielen.

Danach: Wichtige Lösungsverfahren anhand von Beispielen.

### 8.1.1 Elliptischer Typ

Wichtigstes Beispiel:

**Laplace-Gleichung** für Funktion  $u(\vec{r})$ :  $\Delta u = 0$

bzw **Poisson-Gleichung**:  $\Delta u = -4\pi f(\vec{r})$

(inhomogene Laplace-Gleichung).

Anwendungen in der Physik: Statische Zustände, z.B.

- Elektrostatik und Magnetostatik: Gleichungen für Potentiale
- Wärmelehre: Temperaturverteilung im Gleichgewicht
- Strömungslehre: Ideale Flüssigkeiten ohne Wirbel (Potentialströmung)

Lösung hängt von Randbedingungen am Rand  $\partial G$  des Definitionsgebietes ab (Randwertproblem).

Wichtigste Typen von Randbedingungen:

- Dirichletsche Randbedingungen:  $u$  auf  $\partial G$  vorgegeben.
- von-Neumannsche Randbedingung: Normalenableitung von  $u$  auf  $\partial G$  vorgegeben, also  $\frac{\partial u}{\partial n} := \vec{n} \cdot \nabla u$  mit  $\vec{n}$ : Einheitsvektor senkrecht zu  $\partial G$ .
- Cauchysche Randbedingung:  $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})$  vorgegeben.

Für elliptische partielle Differentialgleichungen kann man zeigen:

Bei vorgegebenen Dirichletschen oder von-Neumannschen Randbedingungen ist die Lösung einer elliptischen partiellen Differentialgleichung eindeutig (evtl. bis auf Konstante).

↪ Man kann an einem Randpunkt nicht beides gleichzeitig vorgeben, man darf allenfalls mischen (teils Dirichlet, teils von-Neumann)

### 8.1.2 Hyperbolischer Typ

Wichtigstes Beispiel:

**Wellengleichung** für Funktionen  $u(\vec{r}, t)$ :  $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u(\vec{r}, t) = 0$

bzw. inhomogene Wellengleichung  $\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)u(\vec{r}, t) = 4\pi f(\vec{r})$

Anwendungen in der Physik: Schwingungszustände

(Schall, elektromagnetische Wellen, Wasserwellen, ...)

Lösung hängt wieder von Randbedingungen ab. Diese schließen in der vierdimensionalen Raumzeit auch Anfangsbedingungen ein, aber i.A. nicht "Endbedingungen" (keine Vorgaben an die Zukunft!)

→ Randwertproblem nur für einen offenen Teil des Randes. Dafür müssen aber sowohl  $u$  als auch Ableitungen von  $u$  angegeben werden.

→ Cauchy-Problem:

- $u(\vec{r}, t = 0)$  und  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}$  im (3 dimensionalen) Definitionsbereich  $G$  vorgegeben (Anfangsbedingungen)
  - $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})$  auf dem Rand  $\partial G$  des Definitionsbereiches vorgegeben. (Cauchy-Randbedingung)
    - $\alpha = 1$  und  $\beta = 0 \rightarrow$  Dirichlet
    - $\alpha = 0$  und  $\beta = 1 \rightarrow$  von-Neumann
- NB: Rand kann auch im Unendlichen liegen.

### 8.1.3 Parabolischer Typ

Wichtigstes Beispiel:

**Diffusionsgleichung** für Funktion  $u(\vec{r}, t)$ :  $\boxed{(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u(\vec{r}, t) = 0}$

Anwendungen in der Physik: – Diffusionsgleichung – Wärmeleitungsgleichung

– Schrödingergleichung

(freie Teilchen:  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) \rightarrow$  Diffusionsgleichung mit  $D = i\hbar/2m$ .)

Teilchen im Potential:  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}))\psi(\vec{r}, t)$

$\rightarrow$  Zusatzterm, aber nach wie vor parabolische Gleichung.)

Im Grenzfall  $t \rightarrow \infty$  stellt sich ein statischer Zustand ein (siehe 8.2.3), in dem  $u$  einfach die Laplace-Gleichung erfüllt (anders als bei 8.1.2).

Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  sollten vorgegeben sein.

→ Wieder Cauchy-Problem:

- $u(\vec{r}, t = 0)$  vorgegeben (reicht hier!)
- $(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})$  auf dem Rand  $\partial G$  des Definitionsbereiches vorgegeben. (Cauchy-Randbedingung)

## 8.2 Lösungsverfahren für partielle Differentialgleichungen

Im Folgenden: Wichtige Lösungsverfahren für lineare partielle Differentialgleichungen anhand von Beispielen.

Methoden, die gleich praktisch erläutert werden:

- Separation der Variablen
- Fouriertransformation
- Greensfunktion
- ( – Ansatzweise numerische Verfahren )

### 8.2.1 Laplace-Gleichung

Löse konkret folgende Aufgabe:

Wärmeverteilung in einer rechteckigen Platte (quasi 2D), deren Ränder auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden.

⇒ Gesucht ist Funktion  $u(x, y)$  mit  $\Delta u = 0$  in einem rechteckigen Gebiet  $(x, y) \in [0 : L] \times [0 : L]$  und Dirichlet-Randbedingungen:

$$u(x = 0, y) \equiv T_1; \quad u(x = L, y) \equiv T_2; \quad u(x, y = 0) \equiv T_3; \quad u(x, y = L) \equiv T_4.$$

#### 8.2.1.1 Numerische Lösung

Einfachstes Verfahren: Relaxationsverfahren

Schritte:

- 1) Diskretisierung: Zerlege Gebiet  $G$  in  $N \times N$  Pixel, Länge  $\epsilon = L/N$   
 ⇒ Funktion  $u(x, y)$  ersetzt durch Matrix  $u_{ij}$ .  
 Diskretisierung des Laplace-Operators (einfachste, nicht beste Art):  
 In 1D wäre  $u(x) \rightarrow u_i$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\epsilon^2}(u(x + \epsilon) + u(x - \epsilon) - 2u(x)) \rightarrow \frac{1}{\epsilon^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i)$ .  
 In 2D:  $\Delta u \rightarrow \frac{1}{\epsilon^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij})$ .
- 2) Diskretisierte Laplace-Gleichung  $u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$
- 3) Lösung mit Relaxationsverfahren
  - Starte mit beliebiger Matrix  $u_{ij}^{(0)}$  (nur Rand muss stimmen!)
  - Iteration:  $u_{ij}^{(n+1)} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)})$   
(alles außer Rand!)
  - So lange, bis  $u_{ij}^{(n+1)} = u_{ij}^{(n)}$  im Rahmen der gewünschten Genauigkeit.

#### 8.2.1.2 Lösung mit Separation der Variablen

Einfache Geometrie des Problems ermöglicht analytische Lösung.

Beginne mit einfacherem Problem:  $T_1 = T_2 = T_3 = 0, T_4 \neq 0$ .

- 1) Separationsansatz: Setze an  $u(x, y) = f(x)g(y)$ ;  
 Randbedingungen:  $u(x, 0) = u(0, y) = u(L, y) \equiv 0$   
 ⇒  $f(0) = f(L) = 0, g(0) = 0$ .  
 Randbedingung  $u(x, L) =: u_0(x) \equiv T_4$  vorerst nicht berücksichtigt.  
 Einsetzen in  $\Delta u = 0 \Rightarrow g(y)\frac{d^2}{dx^2}f(x) + f(x)\frac{d^2}{dy^2}g(y) = 0$   
 Teile durch  $u(x, y) = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}f(x)/f(x) + \frac{d^2}{dy^2}g(y)/g(y) = 0$ .
- 2) Separation der Variablen  
 Argumentiere:  $F(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)/f(x)$  hängt nur von  $x$  ab.  
 $G(y) = \frac{d^2}{dy^2}g(y)/g(y)$  hängt nur von  $y$  ab.

Aus  $F(x) + G(y) \equiv 0$  folgt  $F(x) = \text{const.}$ ,  $G(y) = \text{const.}$   
 Konkret sogar  $F = -G =: -k^2$

$\Rightarrow$  Reduktion auf zwei unabhängige gewöhnliche Differentialgleichungen  
 $\frac{d^2 f}{dx^2} f(x) = -k^2 f(x)$ ,  $\frac{d^2 g}{dy^2} g(y) = k^2 g(y)$  mit  $k$ : Separationskonstante

NB: Separierte Gleichungen haben die Form von Eigenwertgleichungen  
 $L f = \lambda f$ . Lösungen:  $f$  Eigenfunktionen zum Eigenwert  $\lambda$ .  
 (Analog Eigenwert/Eigenvektor bei Matrizen).

### 3) Lösung der separierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2} &= -k^2 f \text{ mit Randbedingung } f(0) = f(L) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) \propto \sin(kx) \text{ und } \underline{\text{Einschränkung}} \quad kL = \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \frac{d^2 g}{dy^2} &= k^2 g \text{ mit Randbedingung } g(0) = 0 \\ &\Rightarrow g(y) \propto \sinh(ky). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Zusammen:  $u_n(x, y) \propto \sin(kx) \sinh(ky)$  mit  $k = \pi n/L$

$\leadsto$  Satz unabhängiger Lösungen von  $\Delta u = 0$   
 mit Randbedingung  $u(x, 0) = u(0, y) = u(L, y) = 0$ .

$\leadsto$  Kann zur vollständigen Lösung so zusammengesetzt werden, dass auch  
 letzte Randbedingung  $u(x, L) = u_0(x)$  erfüllt ist.

### 4) Vollständige Lösung für $T_1 = T_2 = T_3 = 0, T_4 = T_0$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_n c_n u_n(x, y) = \sum_n c_n \sin(\pi n x/L) \sinh(\pi n y/L), \\ &\text{wobei Koeffizienten } c_n \text{ so gewählt, daß } u(x, L) = u_0(x) \\ \rightarrow u_0(x) &:= \sum_n c_n \sin(\pi n x/L) \sinh(\pi n) \end{aligned}$$

$\rightarrow$  Fast die Form einer Fourier-Sinus-Reihe (7.3.2)

Ergänze  $u_0(x) = -u_0(-x)$  für  $-L < x < 0 \leadsto u_0$  ungerade auf  $[-L : L]$ .

$\Rightarrow u_0 = \sum_n b_n \sin(2\pi n \frac{x}{2L})$  mit  $b_n = c_n \sinh(\pi n)$ .

$$(7.3.2) \quad b_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L u_0(x) \sin(2\pi n \frac{x}{2L}) dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(\pi n \frac{x}{L}) dx.$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{\sinh(\pi n)} \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(\pi n \frac{x}{L}) dx.$$

$$\text{Konkret } u_0(x) \equiv T_4 \Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} \frac{1}{\sinh(\pi n)} T_0 & : \quad n \text{ ungerade} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{\text{Ergebnis:}} \quad u(x, y) = \sum_{n \text{ ungerade}} T_4 \frac{4}{\pi n} \frac{\sinh(\pi n y/L)}{\sinh(\pi n)} \sin(\pi n x/L) =: T_4 \tilde{u}(x, y)$$

### 5) Allgemeine Lösung für beliebige $T_i$ auf den vier Rändern

Aus  $\tilde{u}(x, y)$  kann man durch Drehung/Translation vier Lösungen konstruieren, bei denen jeweils an einem anderen Rand die Temperatur  $T_i \neq 0$  ist und  $T_j = 0$  für  $j \neq i$ .

$$T_1 \neq 0 \Rightarrow u_1(x, y) = T_1 \tilde{u}(y, L - x);$$

$$T_3 \neq 0 \Rightarrow u_3(x, y) = T_3 \tilde{u}(x, L - y);$$

$$T_2 \neq 0 \Rightarrow u_2(x, y) = T_2 \tilde{u}(y, x);$$

$$T_4 \neq 0 \Rightarrow u_4(x, y) = T_4 \tilde{u}(x, y)$$

Diese kann man wieder superponieren und erhält schließlich die allgemeine Lösung für beliebige Temperaturen auf allen Seiten.

NB: Man kann so auch Lösung für allgemeine, beliebige Dirichletsche Randbedingungen bestimmen. Dabei ändert sich nur der Wert der Integrale für  $c_n$  in 4).

Zusammenfassung zum Separationsansatz:

- Kann man probieren, wenn die Geometrie einfach ist.
- Zerlegung der partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen (oder partielle Differentialgleichungen mit weniger Variablen). Resultierende Differentialgleichungen sind im Allgemeinen Eigenwertgleichungen.
- Liefert Schar von möglichen Lösungen für verschiedene Eigenwerte. Kann dann zur Gesamtlösung zusammengesetzt werden (Unter Berücksichtigung der Randbedingungen).

## 8.2.2 Wellengleichung

Betrachte hier drei Probleme:

- ★ Freie Welle im unbegrenzten Raum:  $u(\vec{r}, t)$  erfüllt  $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$   
Anfangsbedingung:  $u(\vec{r}, t = 0)$  und  $\partial_t u(\vec{r}, t)|_{t=0}$  vorgegeben.
- ★ Schwingende Saite: Ausdehnung  $u(x, t)$  erfüllt  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$   
mit Randbedingung  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  (fest eingespannt)  
und Anfangsbedingung  $u(x, t = 0), \partial_t u(x, t)|_{t=0}$  vorgegeben.
- ★ Kreisförmig eingespannte Membran:  
Zweidimensionale Auslenkung  $u(\vec{r}, t)$  erfüllt  $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$   
mit Randbedingung  $u(\vec{r}, t) = 0$  für  $|\vec{r}| = R$  (fest eingespannt)  
und Anfangsbedingung:  $u(\vec{r}, t = 0), \partial_t u(\vec{r}, t)|_{t=0}$  vorgegeben.

### 8.2.2.1 Freie Wellen: Lösung mittels Fouriertransformation

Im unbegrenzten Raum führt Fouriertransformation am direktesten zum Ziel.

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \hat{u}(\vec{k}, t) \quad \text{mit} \quad \hat{u}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} u(\vec{r}, t).$$

- Wellengleichung im Fourierraum

$$u \rightarrow \hat{u}; \quad \Delta u \rightarrow -k^2 \hat{u}; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{u}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -k^2 \hat{u}}: \text{Gewöhnliche Schwingungsgleichung.}$$

- Anfangsbedingungen im Fourierraum: Kann man direkt ausrechnen

$$\hat{u}(\vec{k}, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} u(\vec{r}, t = 0) =: \hat{u}_0(\vec{k})$$

$$\partial_t \hat{u}(\vec{k}, t)|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \partial_t u(\vec{r}, t)|_{t=0} =: \hat{u}_1(\vec{k})$$

- Lösung im Fourierraum:

$$\hat{u}(\vec{k}, t) = a(\vec{k}) e^{-i\omega t} + b(\vec{k}) e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \boxed{\omega = |\vec{k}|v}$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} \hat{a}(\vec{k}) + \hat{b}(\vec{k}) &= \hat{u}_0 \\ \hat{a}(\vec{k}) - \hat{b}(\vec{k}) &= \frac{i}{\omega} \hat{u}_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{a}(\vec{k}) &= \frac{1}{2}(\hat{u}_0 + \frac{i}{\omega} \hat{u}_1) \\ \hat{b}(\vec{k}) &= \frac{1}{2}(\hat{u}_0 - \frac{i}{\omega} \hat{u}_1) \end{aligned} .$$

- Lösung im reellen Raum:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3k \{ a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + b(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\omega t)} \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3k \{ a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} + b(-\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \} \quad \text{mit} \quad \omega = |\vec{k}|v. \end{aligned}$$

### 8.2.2.2 Schwingende Saite/Membran: Lösung mit Separationsansatz

- \* Schwingende Saite:  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  mit  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ .

Separationsansatz:  $u(x, t) = f(x) T(t)$

$$\text{Einsetzen: } T \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} f \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{d^2}{dx^2} / f}_{=-k^2} - \underbrace{\frac{1}{v^2} \frac{d^2 T}{dt^2} / T}_{-k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Separierte Gleichungen: } \frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f, \quad \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 v^2 T$$

mit Randbedingung  $f(0) = f(L) = 0$ .

$$\Rightarrow f(x) \propto \sin(kx) \quad \text{mit Einschränkung } k = n\pi/L$$

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = kv.$$

$\Rightarrow$  Vollständige Lösung:

$$u(x, t) = \sum_n \sin(n\pi \frac{x}{L}) (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \quad \text{mit } \omega_n = n\pi \frac{v}{L}.$$

Koeffizienten  $A_n, B_n$  bestimmt durch Anfangsbedingungen.

- \* Schwingende kreisförmig befestigte Membran:

Auslenkung  $u(x, y, t)$  erfüllt  $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  mit  $u(\vec{r}, t)|_{r=R} = 0$ .

Separationsansatz in zwei Schritten:

- Raum und Zeit:  $u(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) T(t)$

$$\text{Einsetzen: } \underbrace{\frac{1}{U} \Delta U}_{-k^2} - \underbrace{\frac{1}{v^2} \frac{T''}{T}}_{-k^2} = 0 \Rightarrow \Delta U = -k^2 U, \quad T'' = -k^2 v^2 T$$

- Raum: Wegen der Geometrie bieten sich Polarkoordinaten an.

$$U(\vec{r}) = R(r) \Phi(\varphi) \quad \text{einsetzen in } \Delta U = (\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) U \stackrel{!}{=} -k^2 U$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{\substack{\text{const. da sonst nichts} \\ \text{von } \varphi \text{ abhängt: } -n^2}} + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi''(\varphi) = -n^2 \Phi(\varphi) \Rightarrow \Phi \sim \sin(n\varphi) \text{ oder } \cos(n\varphi) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}_0$$

$$r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - n^2) R = 0: \quad \underline{\text{Besselsche Differentialgleichung}}$$

Wird in Kapitel 9.3 besprochen. Lösung sind Besselfunktionen.

Beispiel für Anwendung des Separationsansatzes in einem etwas komplizierteren Problem.

### 8.2.3 Diffusionsgleichung

Diskutiere hier allgemeines Problem:  $(\frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u(\vec{r}, t) = 0$  auf Gebiet  $G$  mit Dirichletschen Randbedingungen am Rand  $\partial G$  und beliebigen Anfangsbedingungen  $u(\vec{r}, t_0) = u_0(\vec{r})$ .

#### 8.2.3.1 Separationsansatz und asymptotisches Verhalten

Separationsansatz:  $u(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) T(t) + U^{(0)}(\vec{r})$  mit  $U^{(0)}$ : Löst  $\Delta U^{(0)} = 0$  mit den gewünschten Randbedingungen (Laplace-Gleichung, 8.2.1).

$$\text{Einsetzen} \rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{D} \frac{d}{dt} T\right) / T}_{=:-\lambda} - \underbrace{\Delta U / U}_{-\lambda} = 0$$

mit Randbedingungen:  $U = 0$  auf  $\partial G$ .

$$\Rightarrow \text{Separierte Gleichungen } \Delta U_\lambda = -\lambda U_\lambda, T'_\lambda(t) = -\lambda D T_\lambda(t)$$

$$\Rightarrow T_\lambda(t) = e^{-\lambda D t}$$

$U_\lambda$ : Eigenfunktion von  $\Delta$  zum Eigenwert  $\lambda$

mit den vorgegebenen Randbedingungen  $U = 0$  auf  $\partial G$ .

Bemerkung: Eigenwert  $\lambda$  muss positiv sein.

$$\text{Argument: } - \int_G d^3r U_\lambda \Delta U_\lambda = - \underbrace{\int_G d^3r \nabla \cdot (U_\lambda \nabla U_\lambda)}_{\text{Gauss: } \int_{\partial G} dA (\vec{n} \cdot \nabla U_\lambda) U_\lambda = 0} + \int_G d^3r \underbrace{(\nabla U_\lambda)^2}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\text{Vgl. mit } - \int_G d^3r U_\lambda \Delta U_\lambda = \lambda \int_G d^3r \underbrace{U_\lambda^2}_{\geq 0}.$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Für  $\lambda = 0$  ist die Eigenwertgleichung einfach die Laplace-Gleichung  $\Delta U_0 = 0$ . Mit den vorgegebenen Randbedingungen ist die Lösung eindeutig (vgl. 8.1.1) und somit "trivial",  $U_0 \equiv 0$ . Eigenwerte mit nichttrivialen Eigenfunktionen müssen somit echt positiv sein.

Allgemeine Lösung:

$$u(\vec{r}, t) = U^{(0)}(\vec{r}) + \sum_\lambda U_\lambda(\vec{r}) e^{-\lambda D t} C_\lambda \text{ mit } C_\lambda \Leftrightarrow \text{Anfangsbedingungen.}$$

Asymptotisches Verhalten bei  $t \rightarrow \infty$

Beitrag  $U^{(0)}(\vec{r})$  dominiert, Rest verschwindet exponentiell.

$$\Rightarrow u(\vec{r}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} U_{(0)}(\vec{r}) \text{ mit } \Delta U_{(0)}(\vec{r}) = 0.$$

Unabhängig von Anfangsbedingung erfüllt asymptotische Lösung die Laplace-Gleichung!

NB: Nächstwichtiger Beitrag (falls  $U^{(0)} \equiv 0$ ): Kleinster Eigenwert  $\lambda_0$

$$\Rightarrow u(\vec{r}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} U_{(0)}(\vec{r}) + C_{\lambda_0} U_{\lambda_0}(\vec{r}) e^{-\lambda_0 D t}.$$

## 8.2.3.2 Propagatordarstellung

Illustriert am Beispiel des unbegrenzten Raumes

- Löse zunächst

$$\left( \frac{1}{D} \partial_t - \Delta \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = 0 \quad \text{mit} \quad G(\vec{r}, t_0; \vec{r}_0, t_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Unbegrenzter Raum:  $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$

Fouriertransformation:  $G(\vec{r}, t) \rightarrow \tilde{G}(\vec{k}, t); \quad \Delta \tilde{G} \rightarrow -k^2 \tilde{G}$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\vec{k}, t) \text{ erfüllt } \left( \frac{1}{D} \partial_t + k^2 \right) \tilde{G}(\vec{k}, t) &= 0 \text{ mit } \tilde{G}(\vec{k}, 0) = 1/\sqrt{2\pi^3} \\ \Rightarrow \tilde{G}(\vec{k}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{-k^2 D t} \end{aligned}$$

Rücktransformation in den realen Raum:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tilde{G}(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-k^2 D t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi D t}} e^{-r^2/4Dt} \end{aligned}$$

- Allgemeine Lösung für  $u(\vec{r}, t)$

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t_0) &= \int d^3 r_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) u(\vec{r}_0, t_0) \\ &\quad \downarrow \text{Zeitentwicklung } t_0 \rightarrow t \quad \downarrow \\ u(\vec{r}, t) &= \int d^3 r_0 G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) u(\vec{r}_0, t_0) \end{aligned}$$

Konkret im unbegrenzten Raum:

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= \int d^3 r_0 G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) u(\vec{r}_0, t_0) \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi D(t-t_0)}} \int d^3 r_0 \exp\left(-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)^2}{4D(t-t_0)}\right) u(\vec{r}_0, t_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Mit  $G$  kann Lösung für beliebige Anfangsbedingungen konstruiert werden.

$G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0)$  nennt man **Propagator** oder **Greens-funktion**

## 8.2.4 Inhomogene Gleichungen und Greens-Funktion

Prominente Beispiele

- Poisson-Gleichung:  $\Delta \Phi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r})$
- Inhomogene Wellengleichung:  $\left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \Phi(\vec{r}, t) = 4\pi \rho(\vec{r}, t)$

Allgemeines Lösungskonzept: Greensfunktion

Ausführlich diskutiert in "Theorie 1", hier nur kurz rekapituliert.

Verfahren analog dem Propagatorformalismus (8.2.3.2)

Gegeben inhomogene lineare Differentialgleichung  $L\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi f(\mathbf{x})$

mit Randbedingung  $\alpha\Phi + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial n} = g(\mathbf{x})$

(z.B. Poisson-Gleichung:  $\mathbf{x} = \vec{r}, L = -\Delta$ )

Wellengleichung:  $\mathbf{x} = (\vec{r}, t), L = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ )

Löse zunächst  $LG(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

mit Randbedingung  $\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \equiv 0$

und:  $L\Phi^{(0)}(\mathbf{x}) = 0$  mit den gewünschten Randbedingungen

$\Rightarrow$  Allgemeine Lösung:  $\Phi(\mathbf{x}) = \int d^d x_0 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0) + \Phi^{(0)}(\mathbf{x})$

(Beweis: Einsetzen)

Konkret für obige Beispiele: Greensfunktionen im unbegrenzten Raum

– Poissongleichung:  $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = G(\vec{r} - \vec{r}_0)$  mit  $\Delta G = -4\pi\delta(\vec{r})$   
 $\rightarrow G(\vec{r}) = 1/r$  (hergeleitet in Kapitel 5.4.1.1)

– Wellengleichung:  $G(\vec{r}, t; \vec{r}_0, t_0) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0)$   
 mit  $(\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta)G(\vec{r}, t) = 4\pi\delta(\vec{r})\delta(t)$   
 $\rightarrow G(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \delta(t \mp r/v)$

(Herleitung und Check: Siehe Übungsaufgaben)

Interpretation:  $\Phi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int dt' \delta(t - t' \mp \frac{r}{v})$

$\rightarrow G_{\text{ret}} = \frac{1}{r} \delta(t - r/v)$ : retardierte Greensfunktion:

$\Phi$  wird dargestellt als Funktion der Vergangenheit

$G_{\text{av}} = \frac{1}{r} \delta(t + r/v)$ : avancierte Greensfunktion:

$\Phi$  wird dargestellt als Funktion der Zukunft

# Kapitel 9

## Orthogonale Funktionen

### 9.1 Allgemeiner Rahmen

#### 9.1.1 Eigenwertgleichungen und Funktionensysteme

Voriges Kapitel: Separationsansatz, lieferte typischerweise Eigenwertgleichung:

$$\text{z.B. (i) } D f(x) + k^2 f(x) = 0 \text{ mit } D = \frac{d^2}{dx^2} \quad (8.2.1.2)$$

$$\text{(ii) } D f(r) + k^2 r^2 f(r) = 0 \text{ mit } D = r \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} + n^2 \quad (8.2.2.2)$$

$$\text{mit Randbedingungen (i) } f(0) = f(L) = 0 \\ \text{(ii) } f(R) = 0$$

Wegen der Randbedingungen sind die Gleichungen i.A. nur für bestimmte  $k$ -Werte lösbar  $\rightarrow$  Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen.

Implizit oder explizit wurde angenommen/benutzt: Aus Eigenfunktionen lassen sich beliebige andere Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen, zusammensetzen. (z.B. (i): Randbedingung für  $y = L$ , (ii): Anfangsbedingung).

$\rightarrow$  Jede Funktion, die die Randbedingungen erfüllt, soll sich nach Eigenfunktionen entwickeln lassen.

$$\text{z.B. (i): Gleichung } \frac{d^2}{dx^2} f(x) = -k^2 f(x) \text{ mit } f(0) = f(L) = 0. \\ \text{(Wiederholung von 8.2.1.2 mit anderen Schwerpunkten)}$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte } k = \pi n/L \text{ mit } n \in \mathbb{N}, n > 0$$

$$\text{Eigenfunktionen } f_n(x) = \sin(\pi n x/L)$$

Beliebige Funktion  $u_0(x)$  kann nach den  $f_n(x)$  entwickelt werden:

$$u_0(x) = \sum_n b_n f_n(x).$$

$$\text{Weiterhin gilt: } \frac{2}{L} \int_0^L dx f_n(x) f_m(x) = \delta_{nm}.$$

$\Rightarrow$  Funktionen  $\{f_n(x)\}$  sind orthonormal

$$\text{bzgl. Skalarprodukt } \langle f, g \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L dx f(x) g(x) \quad (\langle f_n, f_m \rangle = \delta_{nm})$$

$$\text{NB: Skalarprodukt ist } \underline{\text{kommutativ}} \quad (\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle)$$

und bilinear: Linear bzgl. beider Argumente  $f, g$ .

Damit gilt in der Entwicklung  $u_0(x) = \sum_n b_n f_n(x)$  automatisch:

$$b_n = \sum_m \delta_{mn} b_m = \sum_m \langle f_n, f_m \rangle b_m \stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \langle f_n, \sum_m b_m f_m \rangle = \langle f_n, u_0 \rangle$$

Zusammen: Eigenfunktionen  $f_n$  bilden vollständiges orthogonales Funktionensystem.

Beliebige Funktion  $u_0(x)$ , die kompatibel mit den Randbedingungen ist, kann entwickelt werden gemäß  $u_0(x) = \sum_n f_n(x) \langle f_n, u_0 \rangle$ .

Konkret: Fourier-Sinus-Reihe:  $f_n(x) = \sin(\pi n \frac{x}{L})$

$$\langle f_n, u_0 \rangle = \frac{2}{L} \int_0^L dx u_0(x) \sin(\pi n \frac{x}{L})$$

In diesem Kapitel: Klasse von Differentialgleichungen, in denen sich ein solcher Formalismus realisieren läßt, und wichtige konkrete Beispiele.

### 9.1.2 Das Sturm-Liouville-Problem

Allgemeine Klasse von Differentialgleichungen, aus denen sich orthogonale Funktionensysteme herleiten lassen:

Auf dem Intervall  $[a, b]$  gelte  $S f(x) + \lambda r(x) f(x) = 0$  (★)

mit dem Sturm-Liouville-Operator

$$S f(x) = \frac{d}{dx} (p(x) \frac{d}{dx} f(x)) + q(x) f(x)$$

$$\begin{aligned} q(x) &: \text{stetig und reell in } [a, b] \\ p(x) &> 0, \text{ zweimal stetig differenzierbar in } [a, b] \\ r(x) &> 0, \text{ stetig in } [a, b] \end{aligned}$$

und Randbedingungen:  $p(x)(u(x) v'(x) - u'(x) v(x)) \Big|_a^b = 0$

für je zwei verschiedene unterschiedliche Lösungen  $u(x), v(x)$ .

NB: Beinhaltet Dirichlet ( $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$ )

und von-Neumann ( $u'(a) = u'(b) = v'(a) = v'(b) = 0$ ).

Definiere Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx r(x) f(x) g(x) \quad (\star\star)$$

wieder kommutativ ( $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ ) und bilinear.

Dann gilt für die Eigenvektoren der Differentialgleichung (★)

Orthogonalität: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenvektoren sind orthogonal bzgl. des Skalarproduktes (★★).

(Beweis: Für verschiedene Eigenwerte  $\lambda_m, \lambda_n$  gilt:

$$S f_n + \lambda_n r f_n = 0 \Rightarrow (p f_n')' = -(q + \lambda_n r) f_n, \text{ analog } f_m$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx f_m (p f_n')' = [p f_m f_n']_a^b - \int_a^b dx p f_m' f_n' = - \int_a^b (q + \lambda_n r) f_m f_n$$

$$\int_a^b dx f_n (p f_m')' = [p f_n f_m']_a^b - \int_a^b dx p f_n' f_m' = - \int_a^b (q + \lambda_m r) f_m f_n.$$

Ziehe beide Gleichungen voneinander ab.

$$\Rightarrow \underbrace{[p(f_m f_n' - f_n f_m')]_a^b}_{\substack{0 \text{ lt. Voraussetzung} \\ \neq 0}} = (\lambda_m - \lambda_n) \underbrace{\int_a^b dx r f_m f_n}_{\langle f_m, f_n \rangle}$$

$$\Rightarrow \langle f_m, f_n \rangle = 0 \text{ für } \lambda_m \neq \lambda_n \quad \checkmark$$

$$\text{Normiere } f_n \rightarrow \hat{f}_n = f_n / \langle f_n, f_n \rangle \Rightarrow \langle \hat{f}_n, \hat{f}_m \rangle = \delta_{nm}$$

Vollständigkeit: Eigenfunktionen bilden vollständiges Orthogonalsystem,  
d.h. alle Funktionen lassen sich nach Eigenfunktionen entwickeln.

(ohne Beweis. Stichwort: Differentialgleichung ist "selbstadjungiert")

⇒ Beliebige Funktionen  $g(x)$  können entwickelt werden gemäß

$$g(x) = \sum_n \hat{f}_n(x) c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \langle \hat{f}_n, g \rangle = \int_a^b dx r(x) \hat{f}_n(x) g(x)$$

$$\text{(wg. } c_n = \sum_m \delta_{nm} c_m = \sum_m \langle \hat{f}_n, \hat{f}_m \rangle c_m = \langle \hat{f}_n, \sum_m c_m \hat{f}_m \rangle = \langle \hat{f}_n, g \rangle)$$

### 9.1.3 Beispiele für Sturm-Liouville-Gleichungen

★ **Schwingungsgleichung**  $\frac{d^2}{dx^2} f(x) + k^2 f(x) = 0$

mit  $x \in [0 : L]$ ,  $f(0) = f(L) = 0$ .

entspricht  $p(x) \equiv 1$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $r(x) \equiv 1$ ,  $\lambda =: k^2$

Eigenfunktionen:  $f_n(x) = \sin(\pi n x / L)$

(siehe 9.1.1)

★ **Legendresche Differentialgleichung**  $\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{d}{dx}f(x)) + l(l+1)f(x) = 0$

mit  $x \in [-1, 1]$ ,  $f(x)$  regulär am Rand.

entspricht  $p(x) = 1 - x^2$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $r(x) \equiv 1$ ,  $\lambda =: l(l+1)$

Eigenfunktionen: Legendresche Polynome  $P_l(x)$

(siehe 9.2.1: Werden immer dann wichtig, wenn mit Kugelkoordinaten gearbeitet wird, vgl. 9.2.4.)

★ **Besselsche Differentialgleichung**  $x \frac{d}{dx} (x \frac{d}{dx} f(x)) + (k^2 x^2 - n^2) f(x) = 0$

mit  $x \in [0 : a]$

entspricht  $p(x) = x$ ,  $q(x) = -n^2/x$ ,  $r(x) = x$ ,  $\lambda =: k^2$

(nach Division durch  $x$ ).

Eigenfunktionen: Besselfunktionen  $J_n(kr)$

(siehe 9.3: Wichtig bei Problemen mit Zylindergeometrie)

★ **Sphärische Bessel-Gleichung**  $\frac{d}{dx} (x^2 \frac{d}{dx} f(x)) + (k^2 x^2 - l(l+1)) f(x) = 0$

mit  $x \in [0 : a]$

entspricht  $p(x) = x^2$ ,  $q(x) = -l(l+1)$ ,  $r(x) = x^2$ ,  $\lambda =: k^2$

(nach Division durch  $x$ ).

Eigenfunktionen: Sphärische Besselfunktionen  $j_n(kr)$

(Probleme mit sphärischer Symmetrie, vgl. auch wieder 9.2.4.)

★ **Hermite'sche Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx} \left( e^{-x^2} \frac{d}{dx} f(x) \right) + 2n e^{-x^2} f(x) = 0$$

mit  $x \in [0, \infty]$ ,  $\int_0^\infty dx x^2 f(x) < \infty$ .

entspricht  $p(x) = e^{-x^2}$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $r(x) = 2d^{-x^2}$ ,  $\lambda =: n$

Eigenfunktionen: Hermite-Polynome  $H_n(x)$

(Lösung der Schrödingergleichung für Schwingungsprozesse)

★ **Laguerresche Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx} \left( e^{-x} \frac{d}{dx} f(x) \right) + n e^{-x} f(x) = 0$$

mit  $x \in [0, \infty]$ ,  $\int_0^\infty dx x^2 f(x) < \infty$ .

entspricht  $p(x) = x e^{-x}$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $r(x) = d^{-x}$ ,  $\lambda =: n$

Eigenfunktionen: Laguerre-Polynome  $L_n(x)$

(Lösung der Schrödingergleichung für das Wasserstoffatom)

Nun: spezielle Differentialgleichungen und Funktionensysteme

## 9.2 Legendre-Polynome

### 9.2.1 Die einfache Legendresche Differentialgleichung

**Gleichung** : Bereits in 9.1.3 eingeführt. Alternative Schreibweise:

$$(1 - x^2)f''(x) - 2x f'(x) + l(l + 1)f(x) = 0$$

für  $x \in [-1 : 1]$ , Randbedingungen:  $f(x)$  regulär.

Lösungsweg: Potenzreihenansatz  $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= l(l + 1)f(x) - 2x f'(x) + (1 - x^2)f''(x) \\ &= l(l + 1) \sum_n a_n x^n - 2 \sum_n a_n n x^n + \sum_n a_n n(n - 1) x^{n-2} - \sum_n a_n n(n - 1) x^n \\ &\quad | \text{ Sammle gleiche Potenzen} \\ &= \sum_n x^n [a_n(l(l + 1) - 2n - n(n - 1)) + a_{n+2}(n + 1)(n + 2)] \end{aligned}$$

$$\text{Koeffizientenvergleich} \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{l(l+1) - n(n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

$\Rightarrow$  Summe zweier "unabhängiger" Reihen: Eine mit geraden, eine mit ungeraden Potenzen von  $x$ . Sind durch den jeweils ersten Koeffizienten  $a_0$  bzw.  $a_1$  vollständig bestimmt.

Möglichkeiten für diese beiden Beiträge:

– Unendlich, Reihe bricht nicht ab.

$$\text{Konvergenzradius } R^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+2}} \right|$$

$\Rightarrow$  Singularität am Rand des Intervalls  $[-1, 1]$

$\rightsquigarrow$  Nicht kompatibel mit Randbedingung!

– Reihe bricht ab  $\Rightarrow n = l$  oder  $n = -(l + 1)$  für ein  $n = n_c$

$\Rightarrow l$  muss ganzzahlig sein.

OBdA  $l \geq 0$

(anderenfalls ersetze  $\tilde{l} = -(l + 1) \geq 0 \Rightarrow l(l + 1) = \tilde{l}(\tilde{l} + 1)$ )

$\Rightarrow$  Abbruchbedingung ist  $n_c = l \Rightarrow$  Polynom

$l$  gerade: Gerades Polynom

$l$  ungerade: Ungerades Polynom

**Lösung** (Zusammenfassung)

- Eigenwerte  $l \in \mathbb{N}_0$
- Eigenfunktionen: Polynome  $P_l(x)$ 
  - gerade für gerade  $l$ , ungerade für ungerade  $l$
  - Rekursionsrelation  $a_{n+2} = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)} a_n$
  - Übliche Normierung:  $P_l(1) = 1$
  - Konkret:  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ ,  $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

**9.2.2 Wichtige Eigenschaften der Legendre-Polynome**

(1) Orthogonalität  $\langle P_l, P_m \rangle := \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_m(x) = 0$  für  $l \neq m$

(2) Erzeugende Funktion  $\Phi(x, t) := \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$

kann durch einfachen analytischen Ausdruck dargestellt werden:

$$\Phi(x, t) = 1/\sqrt{1 - 2xt + t^2} \quad (\star)$$

(Beweis: Erzeugende Funktion erfüllt Differentialgleichung

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t) - 2x \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) + t \frac{\partial^2}{\partial t^2} (t \Phi(x, t)) = 0$$

mit Randbedingungen:  
 $\Phi(0, t) = 1$ ,  $\Phi(1, t) = \frac{1}{1-x}$ ,  $\Phi(x, 0) = P_0(x) = 1$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t)|_{t=0} = P_1(x) = x$ .  
 Diese Gleichung wird durch  $(\star)$  erfüllt.)

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion kann eine Reihe weiterer wichtiger Eigenschaften hergeleitet werden, z.B.

(3) Normierung:  $\langle P_l, P_l \rangle = \frac{2}{2l+1}$

(Dazu: Berechne  $\int_{-1}^1 dx \Phi^2(x, t) = \sum_{l, l'} t^{l+l'} \langle P_l, P_{l'} \rangle \stackrel{(1)}{=} \sum_l t^{2l} \langle P_l, P_l \rangle$ :  
 $\int_{-1}^1 dx \Phi^2(x, t) = \int_{-1}^1 dx / (1 - 2xt + t^2) = \frac{1}{t} \ln \frac{(1+t)}{(1-t)} = \dots = \sum_0^{\infty} t^{2l} \frac{2}{2l+1}$   
 Koeffizientenvergleich  $\rightarrow \langle P_l, P_l \rangle = 2/(2l+1) \checkmark$ )

(4) Rekursionsformeln, z.B.

- $(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$   
 (Herleitung: Zeige zunächst  $(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial}{\partial t} \Phi = (x - t)\Phi$ .  
 Dann Reihendarstellung einsetzen und Koeffizientenvergleich.)
- $xP_l'(x) - P_{l-1}'(x) + lP_l(x)$   
 (Herleitung: Zeige zunächst  $(x - t) \frac{\partial}{\partial x} \Phi = t \frac{\partial}{\partial t} \Phi$ .  
 Dann Reihendarstellung einsetzen und Koeffizientenvergleich.)

(5) Formel von Rodriguez 
$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

(Beweis:

★: Zeige, dass  $f(x) = \frac{d^l}{dx^l} v(x)$  mit  $v(x) = (x^2 - 1)^l$  die Legendresche Differentialgleichung erfüllt.

$$\text{Zunächst: } (x^2 - 1)v'(x) = (x^2 - 1)l(x^2 - 1)^{l-1}2x = 2lxv(x)$$

Dann leite diese Gleichung  $(l+1)$  mal ab

unter Berücksichtigung von  $\frac{d^n}{dx^n} x^m = 0$  für  $n > m$ .

$$\Rightarrow \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} ((x^2 - 1)v') = (x^2 - 1) \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + (l+1)2x \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + \frac{l(l+1)}{2} 2 \frac{d^l v}{dx^l}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (2lxv) = 2lx \frac{d^{l+1}v}{dx^{l+1}} + 2l(l+1) \frac{d^l v}{dx^l}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)f''(x) + 2xf'(x) - l(l+1)f(x) = 0 \quad \checkmark$$

★: Berechne  $f(1) = \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = \frac{d^l}{dx^l} ((x-1)^l (x+1)^l)|_{x=1}$

$$= (x+1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x-1)^l|_{x=1} = 2^l l! \quad \checkmark$$

$\frac{d^l}{dx^l} (x-1)^m|_{x=1} = 0$   
für  $m < l$

(6) Explizite Gleichung (ohne Beweis)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \binom{l}{m} \binom{2l-m}{l} x^{l-2m}$$

mit  $[l/2]$ : kleinste ganze Zahl  $> l/2$ .

(7) Reihenentwicklung beliebiger Funktionen auf  $[-1 : 1]$

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l (2l+1) P_l(x) \Leftrightarrow c_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx P_l(x) f(x)$$

Vollständigkeitsrelation: 
$$\frac{1}{2} \sum_l (2l+1) P_l(x) P_l(x') = \delta(x-x')$$

### 9.2.3 Zugeordnete Legendre-Polynome

**Gleichung: Verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung**

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d}{dx} f(x) \right) + \left( -\frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) \right) f(x) = 0$$

mit  $|x| \leq 1$ ,  $|m| \leq |l|$  ganzzahlig.

NB:  $m = 0 \rightarrow$  Einfache Legendresche Differentialgleichung, Lösung  $P_l(x)$ !

Lösungsweg für  $m \neq 0$ , OBdA  $m > 0$ .

- Singularität bei  $x \rightarrow \pm 1$  (im Term  $-m^2/(1-x^2)$ )

Analysiere zunächst asymptotisches Verhalten bei  $x \rightarrow \pm 1$ :

$$\frac{m^2}{1-x^2} \gg l(l+1), (1-x^2) \approx 2(1 \mp x)$$

$$\rightsquigarrow \text{Nähere Differentialgleichung durch } \frac{d}{dx} 2(1 \mp x) \frac{d}{dx} f - \frac{m^2}{2(1 \mp x)} f \approx 0$$

$$\text{Substituiere } y = \ln(1 \mp x) \Rightarrow \frac{d}{dy} (1 \mp x) \frac{d}{dx} \rightarrow 4 \frac{d^2}{dy^2} f - m^2 f \approx 0$$

$$\Rightarrow \text{Asymptotische Lösung: } f \approx e^{\frac{m}{2} y} = (1 \mp x)^{\frac{m}{2}}$$

- Motiviert Ansatz:  $f(x) = (1-x)^{\frac{m}{2}}(1+x)^{\frac{m}{2}}v_m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}v_m(x)$   
 Einsetzen ...  $\Rightarrow (1-x^2)v_m''(x) - 2(m+1)xv_m'(x) + (l(l+1) - m(m+1))v_m(x) = 0$   
 Trick: Diese Gleichung ableiten und sortieren  
 $\Rightarrow (1-x^2)v_m''' - 2(m+2)xv_m'' + (l(l+1) - (m+1)(m+2))v_m' = 0$   
 Vergleich  $\rightarrow u'_m = u_{m+1}$ : Ableiten entspricht Hochsetzen von  $m \rightarrow m+1!$   
 $\Rightarrow$  Rekursiv erhält man Lösung:  $v_m(x) = v'_{m-1}(x) = \dots = \frac{d^m}{dx^m}v_0(x) = \frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$

**Lösung: Zugeordnete Legendre-Polynome**  $P_l^m(x)$  mit  $-l \leq m \leq l$

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l^m(x) \\ P_l^{-m}(x) &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \end{aligned}$$

(Faktor  $((-1)^m$  und Definition für  $P_l^{-m}$ : Konvention)

**Eigenschaften :**

- Formel von Rodriguez  $P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (-1)^l (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$   
 (abgeleitet aus 9.2.2)
- Orthogonalität  $\int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_n^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lm}$   
 (- Orthogonalität: Für festes  $m$  ist die Differentialgleichung vom Sturm-Liouville-Typ mit  $p = 1-x^2, q = -m^2/(1-x^2)$ )  
 - Normierung: Übungsaufgabe)

### 9.2.4 Kugelflächenfunktionen

Nun nachgeliefert Motivation: Bedeutung der Legendre-Polynome.

Häufige Fragestellung in der Physik: Partielle Differentialgleichung mit  $\Delta$ -Operator an prominenter Stelle. Lösungen sollen nach Radial- und Winkelanteil separiert werden.

Beispiele: Fernfeldentwicklungen (Multipole, Streuung), sphärische Geometrie ...

$\rightarrow$  Suche nach Eigenfunktionen von  $\Delta$  in Polarkoordinaten, d.h. Lösungen der Eigenwertgleichung

$$\Delta u = \left[ \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}}_{=: \Delta_r} + \frac{1}{r^2} \underbrace{\left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)}_{=: -\hat{L}^2} \right] u(r, \theta, \phi) = -k^2 u(r, \theta, \phi)$$

Separationsansatz:  $u(r, \theta, \phi) = R(r) Y(\theta, \phi)$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \Delta_r R - \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{1}{Y} \hat{L}^2 Y}_{\substack{\text{unabhängig von r} \\ =: l(l+1)}} = -k^2$$

$\Rightarrow$  Radialgleichung:  $(\Delta_r - \frac{l(l+1)}{r^2}) R(r) = -k^2 R(r)$

Winkelgleichung:  $\hat{L}^2 Y(\theta, \phi) = l(l+1) Y(\theta, \phi)$

NB: Radialgleichung ist eine sphärische Besselgleichung (vgl. 9.1.3).

Hier: Schwerpunkt auf Lösung der Winkelgleichung.

↪ Zweiter Separationsansatz:  $Y(\theta, \phi) = f(\theta) \Phi(\phi)$

$$\Rightarrow \left( -\frac{1}{f(\theta)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} f(\theta) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \underbrace{\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}}_{\substack{\text{unabhängig von } \theta \\ \text{Konstante: } -m^2}} \right) = l(l+1)$$

$$\Rightarrow \text{Azimuthale Gleichung: } \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = -m^2 \Phi \text{ für } \phi \in [0 : 2\pi]$$

mit  $(2\pi)$ -periodischen Randbedingungen

$$\Rightarrow \Phi \sim e^{im\phi}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Polare Gleichung: } \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + l(l+1) \right) f(\theta) = 0$$

Substituiere  $x = \cos \theta \Leftrightarrow \frac{d}{dx} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}$ ,  $\sin^2 \theta = (1-x^2)$

$$\Rightarrow \left( \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} - \frac{m^2}{1-x^2} + l(l+1) \right) f(x) = 0$$

$\Rightarrow$  Verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung!

$\Rightarrow$  Lösung bekannt: Eigenwerte  $l(l+1)$  mit  $l \in \mathbb{N}_0$

Eigenfunktionen:  $P_l^m(x) = P_l^m(\cos(\theta))$

### Zusammenfassend: Kugelflächenfunktionen

Der Winkelanteil des Laplace-Operators

$$\hat{L}^2 := -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

hat die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{l,m}(\theta, \phi) &= \mathcal{N}_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (m > 0) \\ Y_{l,-m}(\theta, \phi) &= \mathcal{N}_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (m < 0 : \text{Konvention}) \end{aligned}$$

mit Eigenwerten  $l \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, -l \leq m \leq l$

Normierung  $\mathcal{N}_{lm}$  so gewählt, dass  $\int \sin \theta d\theta \int d\phi |Y_{lm}|^2 = 1$

$$\Rightarrow \mathcal{N}_{lm} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

Die Funktionen  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  heißen **Kugelflächenfunktionen**.

### Wichtigste Eigenschaften

Orthonormal:  $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$

$$\left( \int_0^{2\pi} d\phi Y_{lm}^* Y_{l'm'} \sim \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(m-m')\phi} = 0 \text{ für } m \neq m' \right)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^* Y_{l'm} \sim \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0 \text{ für } l \neq l'$$

Normierung: Per Definition.)

Vollständig:  $\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi') = \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta')$

(d.h., man kann alle Funktionen  $f(\theta, \phi)$  nach  $Y_{lm}$  entwickeln:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$\text{mit } c_{lm} = \iint \sin \theta d\theta d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi)$$

Additionstheorem: (ohne Beweis)

Gegeben Einheitsvektoren  $\vec{e}, \vec{e}'$  mit Winkelkoordinaten  $(\theta, \phi), (\theta', \phi')$ .

Dann gilt 
$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi) = P_l(\vec{e} \cdot \vec{e}')$$

### 9.3 Die Besselsche Differentialgleichung

Ergibt sich als Radialgleichung in zweidimensionalen Problemen oder bei Verwendung von Zylinderkoordinaten (z.B. 8.2.2.2)

Entsprechung in drei Dimensionen (Radialgleichung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten) → sphärische Besselgleichung (vgl. 9.1.3).

**Gleichung** : Nach 9.1.3 
$$x \frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} f(x) \right) + (k^2 x^2 - n^2) f(x) = 0$$

bzw. definiere  $\rho = kx$  und schreibe etwas um

$$\Rightarrow \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left( 1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \right) f(\rho) = 0$$

Lösungsweg: Wieder Potenzreihenansatz  $f(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j$

→ Rekursionsformel  $a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+n)} a_{2j-2}$  und  $a_j = 0$  für  $j$  ungerade.

Konvention:  $a_0 = [2^n n!]^{-1}$

**Lösung** : 
$$J_n(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (n+j)!} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{2j+n}$$

Besselfunktion erster Art der Ordnung  $n$ .

Weitere Lösungen (Reihen): Besselfunktion 2. Art, Hankelfunktion, ...

Für ganzzahlige  $n$  ist  $J_n(x)$  als einziges regulär bei  $n = 0$ .

**Orthogonalität** : Gehe wieder zurück zur ursprünglichen Gleichung ( $\rho = kx$ ).

Laut 9.1.3 Sturm-Liouville-Gleichung zum Eigenwert  $k$  für festes  $n$ .

→ Für jedes  $n$  erhält man einen Satz orthogonaler Funktionen  $J_n(kr)$ .

Auswahl der  $k$  aus Randbedingung. Sei zum Beispiel Bedingung  $f(R) = 0$

⇒ Orthogonales Funktionensystem ist  $\{f_n(x)\} = \{J_n(a_l) \frac{x}{R}\}$  mit  $\{a_l\}$ :

Satz der Nullstellen von  $J_l(x)$ . (davon gibt es unendlich viele)!

Orthogonalitätsrelation:  $\int_0^R dx x J_n(a_l \frac{x}{R}) J_n(a_{l'} \frac{x}{R}) = 0$  für  $l \neq l'$ .

(vgl. 9.1.3: Skalarprodukt muss hier mit Faktor  $x$  definiert werden!)

Man könnte noch vieles zu Besselfunktionen sagen, aber wir lassen es hier erst einmal dabei bewenden!