

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"**Blatt 10**

Aufgaben (abzugeben vor der Vorlesung vom 4. Juli 2014)

Aufgabe 45) Separable Differentialgleichungen (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

(a) $y'(x) = a x y(x) + b y(x)$ mit $y(0) = 1$

(b) $y'(x) = y(x) + 1/y(x)$ mit $y(0) = 0$

Aufgabe 46) Differentialgleichungen II (4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen

(a) $y'(x) = \cos(x)/\sin(x)$

(b) $y'(x) = \cos(y)/\sin(y)$

Aufgabe 47) Differentialgleichungen II (4 Punkte)

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung: $x y'(x) = C y^n$ für $n > 1$.

Welches ist der Definitionsbereich von x ?

Aufgabe 48) Inhomogene Differentialgleichung (4 Punkte)

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung:

$$y'(x) = -y(x)/x + \exp(-x^2) \text{ für } x \geq 1 \text{ mit } y(1) = 0.$$

Aufgabe 49) Exakte Differentialgleichungen (4 Punkte)

(a) Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form $a(x, y) + b(x, y) y'(x) = 0$.

Zeigen Sie: Falls es eine Funktion $F(x, y)$ gibt, so dass $a(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $b(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$, dann gilt $F(x, y(x)) = \text{const.}$ für jede Lösung der Differentialgleichung.

(b) Benutzen Sie die Aussage von (a) zur Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y^2 + 3x^2}{2xy} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(1) = 1.$$

Aufgabe 50) Lineare DGL zweiter Ordnung (8 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y'' + 2y' + y = f(x)$

- (a) Geben Sie die allgemeinste Lösung der homogenen Gleichung an (der Gleichung mit $f(x) = 0$).
- (b) Lösen Sie die homogene Gleichung für $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
- (c) Lösen Sie die inhomogene Gleichung für den Fall $f(x) = \exp(kx)$ mit $k \neq -1$ und Anfangsbedingungen $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
- (d) Betrachten Sie nun speziell den Fall $f(x) = \exp(-x)$ und lösen sie diesen für $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
- (e*) (4 Bonuspunkte) Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für die allgemeine Lösung für beliebige $f(x)$ mittels der Methode der Variation der Konstanten her. (Das Ergebnis ist eine Mehrfachintegral).

Zusatzaufgabe (4 Bonuspunkte)

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'(x) = y/x + \exp(y/x)$$