Institut für Physik SS 2014

Friederike Schmid

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 11

Aufgaben (abzugeben vor der Vorlesung vom 11. Juli 2014)

Aufgabe 51) Radioaktiver Zerfall (2 Punkte)

Zur Zeit $t = 0$ seien $N(0) = 8 \cdot 10^{22}$ Atome eines radioaktiven Stoffes vorhanden. Nach 5 Stunden sind noch $2 \cdot 10^{22}$ Atome da. Stellen Sie die zugehörige Differentialgleichung auf und lösen Sie sie. Bestimmen Sie die Halbwertszeit, d.h. die Zeit, nach der die Hälfte der Atome zerfallen sind.

Aufgabe 52) Wachstum von Bakterien in Petrischale (6 Punkte)

In einer Petrischale befinden sich zur Zeit $t = 0$ zehn Bakterien. In einer optimalen Nährlösung teilen sie sich jede Stunde.

(a) Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die das unbegrenzte Wachstum beschreibt, und lösen Sie diese.

(b) Bei Nahrungsmangel verlangsamt sich das Wachstum oder stoppt gar ganz. Dieser Effekt kann in der Differentialgleichung durch einen Zusatzterm $-\gamma N^2(t)$ berücksichtigt werden, wobei $N(t)$ die Anzahl der Bakterien zur Zeit t ist. Stellen Sie die neue Differentialgleichung auf und lösen Sie sie.

Aufgabe 53) Integrierender Faktor (8 Punkte)

In Aufgabe 49) haben Sie die sogenannten **exakten Differentialgleichungen** kennengelernt: Eine Differentialgleichung der Form $a(x,y) + b(x,y)\, y'(x)$ heisst exakt, wenn es eine Funktion $F(x,y)$ gibt mit $\frac{\partial F}{\partial x} = a(x,y)$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = b(x,y)$. Dann gilt $F(x,y) \equiv$ const. für jede Lösung der Differentialgleichung (Aufgabe 49 a).

(a) Betrachten Sie nun eine solche Differentialgleichung $a(x,y)+b(x,y)y'(x)$. Zeigen Sie: Falls sie exakt ist und $a(x,y)$, $b(x,y)$ stetig differenzierbar, dann gilt die sogenannte Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$.

(Die Umkehrung gilt in den meisten Fällen auch: Falls $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$, ist die Differentialgleichung exakt.)

(b) Benutzen Sie (a), um zu überprüfen, ob die folgenden Differentialgleichungen exakt sind:

- $2xyy' + y^2 - 3x^2 = 0$
- $y' + ky - x = 0$
- $\mathrm{e}^{kx}y' + \mathrm{e}^{kx}(ky - x) = 0$

(c) Manche Differentialgleichungen, die nicht exakt sind, kann man durch Anmultiplizieren eines sogenannten **integrierenden Faktors** $\mu(x,y)$ exakt machen. (d.h. $a + by' = 0$ ist nicht exakt, aber $\mu a + \mu b y'$ ist exakt).

Zeigen Sie:

- Eine Funktion $\mu(x)$ ist ein integrierender Faktor, die die Differentialgleichung $\mu'(x)b(x,y) + \mu(x)(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}) = 0$ erfüllt.
- Jede Funktion $\mu(y)$ ist ein integrierender Faktor, die die Differentialgleichung $\mu'(y)a(x,y) + \mu(x)(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}) = 0$ erfüllt.

(d) Finden Sie mit Hilfe von (c) einen integrierenden Faktor für die Differentialgleichung $xy' - y - x^2 = 0$ und lösen Sie diese für die Anfangsbedingung $y(0) = 0$.

Aufgabe 54) **Kurvenintegral** (6 Punkte)

Ein Teilchen folge der spiralförmigen Bahn $\vec{r}(t) = \binom{t\cos(t)}{t\sin(t)}$.

(a) Berechnen Sie die Länge der Bahnkurve für das Intervall $t \in [0 : 10]$.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$ für $t \in [0 : 10]$ und $\vec{f}(\vec{r}) = \vec{r}$.

Aufgabe 55) **Oberflächenintegral** (6 Punkte)

Berechnen Sie das Oberflächenintegral eines Paraboloiden, der durch $z = x^2 + y^2$ beschrieben wird und bei $x^2 + y^2 = 1$ abgeschnitten wird.

(Hinweis: Benutzen Sie Zylinderkoordinaten).