Institut für Physik

Friederike Schmid

SS 2014

Übungen zur Vorlesung "Mathematische Rechenmethoden"

Blatt 4

Aufgaben (abzugeben vor der Vorlesung vom 23. Mai 2014)

Aufgabe 13) Rechnen mit komplexen Zahlen (Nachlese) (8 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil von $(2i)^{16}, (3+\sqrt{2}i)^2$

(b) Berechnen Sie $(-i - 2\sqrt{3})^{1/4}$, $\sqrt[5]{-i}^{12}$

(c) Zeigen Sie $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$

(d) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
(Hinweis: Am besten geht das anhand der Polardarstellung von z_1, z_2)

Aufgabe 14) Vektorrechnung (8 Punkte)

Gegeben seien folgende Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Betrachten Sie alle möglichen Paare von Vektoren (z.B. $(\vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{c})$ etc.). Welche Paare sind linear unabhängig, welche linear abhängig?

(b) Sind die drei Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ linear unabhängig? Wie ist es mit den Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$?

(c) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{d}$

(d) Berechnen Sie $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.

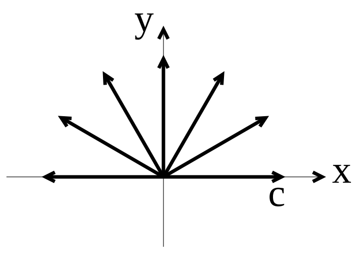
(e) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms zwischen $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

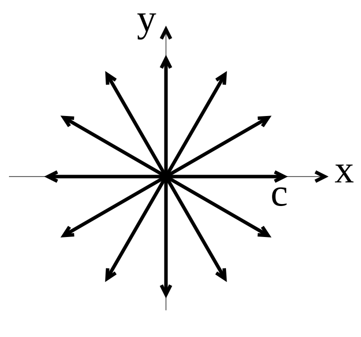
(f) Normieren Sie $\vec{a}$ und $\vec{d}$ auf die Länge 1.

Betrachten Sie für die letzten beiden Teilaufgaben planare Vektoren in der Ebene.

(g) Bilden Sie die Summe von 7 Vektoren der Länge c mit der Winkeldifferenz $\pi/6$ (siehe Bild).

(h) Bilden Sie allgemein die Summe von $2n$ Vektoren der Länge c mit der Winkeldifferenz π/n (Bild zeigt das Beispiel $n = 6$).





Aufgabe 15) Levi-Civita-Symbol (4 Punkte)

(auch genannt Epsilon-Tensor)

(a) Beweisen Sie $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Epsilon-Tensors die Gleichung
$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

Aufgabe 16) Reziproke Vektoren (8 Punkte)

Für linear unabhängige Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ kann man sogenannte reziproke Vektoren definieren:

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V}, \qquad \vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{V}, \qquad \vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V},$$

mit $V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$. Reziproke Vektoren spielen in der Festkörperphysik und der Kristallographie eine wichtige Rolle.

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ auch linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie $\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}$.

(c) Betrachten Sie nun die reziproken Vektoren von $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Zeigen Sie, dass sie wieder proportional sind zu $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$.
(Sie können dazu die Vektoren entweder ausrechnen oder die Behauptung mit Argumenten beweisen, aber bitte **nachvollziehbare** Argumente).

(d) Berechnen Sie die reziproken Vektoren für

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$